DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA DE LAS CIÊNCIAS EXPERIMENTALES

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

EVOLUÇÃO HISTÓRICA DOS PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

E O SEU TRATAMENTO NO ENSINO SECUNDÁRIO

PORTUGUÊS NOS SÉCULOS XX E XXI

Tese de doutoramento de

ANA ELISA ESTEVES SANTIAGO

Realizada sob direcção de:

Dr. Modesto Sierra Vázquez

Drª Maria Teresa González Astudillo

Salamanca, 2008

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

FACULDAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

Dr. Modesto Sierra Vázquez, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca.
Dra. Mª Teresa González Astudillo, Profesora Titular de Escuela Universitaria del Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca.

HACEMOS CONSTAR
Que la presente Memoria titulada **"Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no Ensino Secundário português nos séculos XX e XXI"**, ha sido realizada bajo nuestra dirección por Ana Elisa Esteves Santiago y constituye su tesis para optar al grado de Doctor.

Y para que conste y tenga los efectos oportunos ante el Departamento de Didáctica de la Matemática e Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca, lo firmamos el dia   de Junio de 2008

Fdo.: Dr. Modesto Sierra Vázquez   Fdo.: Dra. Mª Teresa González Astudillo

Aos meus pais

Ao meu irmão

Ao Rafael

Agradecimentos

Aos meus professores e directores, Dr. Modesto Sierra Vázquez e Dra. Maria Teresa González Astudillo pelos sábios ensinamentos e pelo constante apoio, empenho e dedicação ao longo deste longo percurso.

Aos directores e funcionários das bibliotecas que consultei, pela disponibilidade prestada.

Aos meus colegas do curso de doutoramento, em especial à Marta, pelo companheirismo e amizade que se sentiu ao longo do curso e pelos bons momentos que passamos.

As amigas Ana Paula Aires e Helena Henriques, pela ajuda e apoio que me foram dando.

Ao Professor José Antunes, pela sua preciosa ajuda ao fazer a revisão de todo o documento, pelos ensinamentos que me foi dando.

A todos os colegas, professores e investigadores que me ajudaram a esclarecer algumas questões.

Aos meus pais e ao meu irmão pelo incentivo à realização do Doutoramento e ao seu constante apoio e motivação ao longo destes anos.

Ao Rafael, pelo constante incentivo, apoio e compreensão e pela ajuda prestada nos problemas que me foram surgindo.

À Lurdes, pela hospitalidade que me fez sentir e por todo o apoio que me deu.

À minha família e amigos, a quem privei da minha companhia ao longo destes anos.

A todos aqueles que de alguma forma me ajudaram e incentivaram, muito obrigado.

INDICE

Anexos

(Em CD)

Cópia dos problemas de optimização analisados

Livros Históricos

- **Anexo 1 :** *Elementos* de Euclides
- **Anexo 2 :***La Collection Mathématique* de Pappus de Alexandrie
- **Anexo 3 :** *Analyse des Infiniment Petits, pour l'intelligence des lignes courbes* de L'Hôpital
- **Anexo 4 :** *Cours de Mathématique* de Bézout
- **Anexo 5 :** *Cours d'Analyse de l´École Polytechnique* de Sturm
- **Anexo 6 :** *Cours de Calcul Différentiel et Intégral* de Serret

Manuais Escolares

- **Anexo 7:** A introdução nos manuais escolares dos problemas de optimização (1954)
- **Anexo 8:** A introdução das matemáticas modernas: A reforma de Veiga Simão (1973)
- **Anexo 9:** A introdução das matemáticas modernas: O período pós revolução
- **Anexo 10:** A reforma de Roberto Carneiro e Lei de Bases do Sistema Educativo de 1986
- **Anexo 11:** A introdução do uso da calculadora gráfica nos programas oficiais: O reajustamento de Marçal Grilo (1997)

INTRODUÇÃO

Esta investigação tem como objectivo a realização de um estudo histórico acerca dos problemas de optimização ao longo de toda a História da Matemática e da História do Ensino da Matemática em Portugal nos séculos XX e XXI.

Ao longo deste texto, entenda-se *problema de optimização* como um problema em que se pretende determinar a solução óptima. Apesar de haver muitos métodos para resolver estes problemas, vamos restringir-nos aqueles quem que intervém duas variáveis relacionadas mediante uma ligação a partir da qual se obtém uma função de uma só variável, definida num intervalo do conjunto dos números reais. Para a sua resolução é necessário: começar por definir a função a optimizar[1]; exprimir essa função em ordem a uma só variável (recorrendo às restrições apresentadas no enunciado do problema); determinar os extremos da função e, por fim, interpretar os resultados face à natureza do problema.

O Ensino da Matemática, ao longo dos tempos, foi sendo sempre influenciado pelos avanços e descobertas que foram surgindo na área da Matemática. Assim, pretendemos, com a realização deste trabalho de investigação, fazer uma análise não só dos livros históricos de Matemática, mas também dos livros didácticos de Matemática para identificar os problemas de optimização presentes nessas obras. Pretendemos também fazer uma análise das formas de demonstração/resolução dos mesmos, bem como verificar quais os tipos de problemas nelas existentes.

Este trabalho foi dividido em quatro capítulos. No primeiro, intitulado *Desenho da Investigação*, começamos por apresentar a definição do problema de investigação. De seguida, expomos os objectivos a que se propõe esta investigação, bem como as hipóteses formuladas, depois indicamos a metodologia adoptada na realização desta investigação, assim como as fases em que se divide o trabalho. Por último, o plano de recolha de dados.

No segundo capítulo, sob o tema *Análise Histórica dos Problemas de Optimização*, explanamos a análise realizada às diversas obras históricas analisadas. Este capítulo

[1] Função de uma só variável

encontra-se dividido em quatro sub-capítulos, dedicando-se cada um deles a um período distinto da História dos problemas de optimização.

No primeiro sub – capítulo, *Período Grego*, descrevemos a análise de duas obras escritas entre o século IV a.C. e o século IV D.C.: os *Elementos*, de Euclides e a obra *La collection mathématique,* de Pappus d'Alexandrie.

No segundo, *Nascimento*, analisamos uma obra do século XVII, *Analyse des infiniment petits,* de L'Hôpital.

No terceiro, *Consolidação*, apreciamos uma obra do século XVIII, *Cours de mathématique,* de Bézout.

No quarto, *Institucionalização*, fazemos a análise de duas obras do século XIX: *Cours de Calcul Differenciel et Integral,* de Serret e *Cours D'Analyse de L'École Polytechnique,* de Sturm.

No terceiro capítulo, *Análise dos Programas Oficiais e dos Manuais Escolares Portugueses do Século XX e XXI*, passamos à análise dos programas oficiais que contemplam o estudo da derivada, bem como dos respectivos manuais escolares. Este capítulo foi dividido em cinco sub-capítulos, correspondendo cada um deles a um período.

No primeiro, *Introdução nos programas oficiais do estudo da derivada*, apresentamos a análise dos programas oficiais em que surgiu pela primeira vez o estudo da derivada. Uma vez que nenhum dos manuais apresenta problemas de optimização, não se efectuou a análise de nenhum manual.

No segundo, *Introdução das aplicações da derivada nos programas oficiais*, apresentamos a análise dos programas oficiais, bem como dos problemas de optimização presentes no manual que vigorava na época como livro único.

No terceiro, *Introdução das Matemáticas Modernas em Portugal*, apresentamos a análise dos programas, bem como de um conjunto de manuais que caracterizam a época.

No quarto, *A Lei de Bases do Sistema Educativo*, apresentamos a análise dos programas oficiais bem como de um conjunto de manuais que caracterizam a época.

No quinto, *Introdução da calculadora gráfica nos programas oficiais*, apresentamos a análise dos programas oficiais, bem como de um conjunto de manuais que caracterizam a época.

No último capítulo, *Conclusões finais*, apresentamos a realização dos objectivos de investigação; as hipóteses de investigação e os resultados; as limitações do trabalho e as implicações para futuras investigações.

Com a realização deste trabalho pretendemos contribuir para uma melhor compreensão da forma como este tipo de problemas surgiu e foi abordado. Iremos também perceber a partir de quando e de que forma estes fizeram parte dos programas oficiais e dos manuais escolares ao longo de todo o século XX e XXI.

1. DESENHO DA INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo, *Desenho da investigação*, iremos começar por apresentar a definição do problema de investigação, os objectivos a que esta se propõe, bem como as hipóteses formuladas e por fim apresentamos a metodologia adoptada na realização desta investigação, as fases em que se divide o trabalho e, finalmente, o plano de recolha de dados.

1.1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE INVESTIGAÇÃO

Uma das aplicações do cálculo de derivadas está na resolução de problemas de optimização.

Antes do uso das calculadoras gráficas, no Ensino Secundário, estes problemas eram abordados depois do estudo das derivadas, ou seja, eram abordados no capítulo do Cálculo Diferencial como uma aplicação deste.

Recentemente, com a introdução do uso das calculadoras gráficas, no Ensino Secundário (a partir dos 15 anos), tornou-se possível a resolução deste tipo de problemas antes do estudo das derivadas.

Uma vez que, em Portugal, não há nenhum estudo deste tipo, com excepção de um trabalho acerca do conceito de derivada no Ensino Secundário, ao longo do século XX, nesta nossa dissertação pretende fazer-se um estudo acerca de quando surgiram na História da Matemática os problemas de optimização e quais os matemáticos que os estudaram, bem como da forma como estes eram trabalhados. Pretende-se, ainda, fazer um estudo histórico acerca da abordagem feita pelos programas oficiais e pelos manuais escolares, dos problemas de optimização, ao longo do século XX e início do século XXI.

1.2. OBJECTIVOS E HIPÓTESES

De seguida irá proceder-se à descrição dos objectivos a que se propõe este trabalho de investigação bem como a descrição das hipóteses.

1.2.1. OBJECTIVOS

Os objectivos a que se propõe esta investigação são:

- Fazer uma análise histórica dos problemas de optimização; ver como e quando surgiram na História da Matemática e ainda quais os matemáticos que os abordaram;

- Verificar quando e de que forma foram introduzidos nos programas oficiais portugueses os problemas de optimização;

- Analisar, em cada plano de estudos, a importância dada à disciplina de Matemática e, dentro desta, a importância dada ao estudo da Análise, mas especificamente ao estudo dos problemas de optimização.

- Analisar como foram abordados: os tipos de problemas propostos pelo Ministério e os tipos de problemas abordados pelos manuais escolares;

- Verificar se os manuais, acerca dos problemas de optimização, vão de encontro às propostas do Ministério;

- Observar qual a alteração sofrida pelos programas, em relação aos problemas de optimização, após a introdução das calculadoras gráficas no Ensino Secundário;

- Contribuir para um melhor conhecimento da História da Análise Matemática em Portugal;

1.2.2. HIPÓTESES

As hipóteses da investigação são:

1. Será que os problemas de optimização surgiram antes do conceito de derivada?

2. Será que as várias fases por que passou o conceito de derivada influenciaram a forma de resolução dos problemas de optimização?

3. Será que em alturas distintas eram abordados distintos tipos de problemas de optimização?

1.3. METODOLOGIA

Vamos agora fazer a descrição da metodologia utilizada na realização deste trabalho, proceder à descrição das várias etapas e ainda referir o plano de recolha dos dados.

1.3.1. METODOLOGIA

Vejamos então a metodologia utilizada.

Uma vez que se trata de um trabalho histórico, começamos por investigar os livros acerca de História da Matemática e depois os livros históricos de Matemática através de vários séculos.

Baseando-nos na classificação das modalidades de investigação, proposta por Bisquerra (1989), podemos dizer o seguinte:

- Quanto ao **processo formal**, utilizamos o raciocínio hipotético – dedutivo;

- Em relação ao **grau de abstracção**, trata-se de uma investigação básica, uma vez que não se pretende estabelecer aplicações práticas a partir do estudo de investigação;

- Quanto à **natureza dos dados**, é uma investigação qualitativa, já que os dados são filtrados pelos critérios do investigador;

- Quanto à **manipulação das variáveis**, é uma investigação descritiva, dado que não se manipula nenhuma variável;

- A respeito da **dimensão cronológica**, é uma investigação histórica, pois descreve fenómenos ocorridos no passado tendo como fontes documentais a legislação e os livros de texto da época;

- Quanto aos **objectivos**, pretende fazer-se a descrição e a explicação de que é objecto no nosso estudo;

- Considerando as **fontes**, trata-se de uma investigação bibliográfica, visto que se irá fazer uma busca, recompilação, organização, valoração e crítica acerca dos problemas de optimização. Em simultâneo trata-se também de uma investigação metodológica, pois explicita uma forma de integrar métodos descritivos, para abordar uma investigação histórica em educação sobre um tema específico de matemática: os problemas de optimização;

- Quanto à **temporização**, trata-se de uma investigação longitudinal porque engloba diferentes períodos da História da Matemática.

1.3.2. ETAPAS DO TRABALHO

As etapas seguidas para a realização desta investigação foram estabelecidas tendo em conta a Metodologia da Investigação Histórica. Segundo Escolano (1984), a História da Educação é uma disciplina histórica especializada num sector da realidade, o sector educativo. Defende ainda que a inclusão da História da Educação no âmbito da ciência histórica, como disciplina sectorial, leva à aceitação de que o seu método deve ser o método histórico, que se realiza nas seguintes fases: heurístico – crítica, hermenêutica e exposição.

Ruiz Berrio (1976) elaborou a seguinte sequência de etapas para realizar as três fases:

1. Delineamento da investigação
   - Definição do problema. Critérios
   - Estado da questão
   - Primeira recolha de fundos documentais
   - Primeira delimitação da investigação

2. Elaboração de uma hipótese ou campo de hipóteses

3. Recolha dos dados ou fase de documentação
   - Selecção e classificação dos documentos

4. Critica dos documentos
   - Critica interna
   - Critica externa ou critica de erudição

5. Análise e interpretação dos documentos

6. Construção ou síntese histórica: explicação histórico – pedagógica

7. Exposição do trabalho de investigação

1.3.3. PLANO DE RECOLHA DOS DADOS E DE TRABALHO

Como se trata de uma investigação histórica, as fontes a utilizar foram essencialmente fontes documentais. Estas foram obtidas em várias instituições:

- Biblioteca Nacional e Bibliotecas Municipais, nomeadamente a Biblioteca Municipal de Coimbra;
- Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra;
- Biblioteca Geral da Universidade de Coimbra;
- Biblioteca Joanina da Universidade de Coimbra;
- Biblioteca da Escola Superior de Educação de Coimbra;
- Biblioteca da Escola Secundária José Falcão;
- Biblioteca e Hemeroteca da Faculdade de Educação da Universidade de Salamanca.

Dado que é um trabalho histórico, começámos por estudar os livros históricos, depois fez-se a análise da legislação referente ao ensino da Matemática ao longo do século XX e XXI, passando a seguir à recolha, análise e classificação dos manuais escolares ao longo do referido século.

Como já referimos, este trabalho foi dividido em duas partes:

- 1ª Parte: Estudo histórico acerca das aplicações das derivadas: Problemas de Optimização.

Nesta parte, levámos a efeito um estudo, através dos livros de História da Matemática e História do Cálculo com o objectivo de identificar os matemáticos que, possivelmente, abordaram nas suas obras os problemas de optimização. Determinando assim as várias fases pelas quais passou o conceito de derivada.

E após a recolha das obras dos matemáticos identificados na pesquisa elaborada, localizámos as obras sobre as quais encontramos referência. Analisámos cada uma das obras encontradas com o objectivo de verificar, se, de facto, os autores abordaram nas suas obras os problemas de optimização.

Por fim, entre todas as obras localizadas que tratam os problemas de optimização, seleccionamos algumas das obras para, então, elaborarmos uma apreciação mais detalhada.

Ao longo da análise dos problemas de optimização, presentes nas obras, procedemos também a uma catalogação dos mesmos, bem como das respectivas demonstrações ou resoluções.

- 2ª Parte: Análise dos planos de estudo e dos manuais escolares.

Nesta parte fizemos uma análise e classificação dos vários planos de estudos que surgiram ao longo do século XX e XXI. Esta fase permitiu verificar quais os planos que abordavam os problemas de optimização e de que forma eram abordados. Analisámos ainda os vários manuais escolares que surgiram para cada plano de estudos, com o objectivo de verificar quais os que abordam os problemas de optimização, verificar em que contexto é foi feita a sua abordagem e classificar estes mesmos problemas. Pretendeu-se ainda verificar se estes iam de encontro ao que é referido nos programas oficiais.

Para tanto, procedemos à recolha de todos os planos de estudo que foram decretados ao longo do século para, posteriormente, os avaliar. Utilizámos também livros de História de Portugal e História do Ensino em Portugal para vermos o enquadramento social, político e económico de cada uma das reformas.

Depois identificámos e localizámos os manuais escolares da disciplina de Matemática que surgiram para cada uma das reformas educativas ao longo de todo o século. Seguidamente seleccionámos algumas destas obras para então fazer a sua análise.

2. ANÁLISE HISTÓRICA DOS PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

Tal como referimos anteriormente, um dos primeiros passos da nossa investigação foi identificar os matemáticos e as obras que abordaram os problemas de optimização. Assim começámos por procurar nos livros de História da Matemática e de História do Cálculo essa mesma informação. Nos livros clássicos da Matemática podemos encontrar informação acerca de quando, de que forma e por quem foram abordados os Problemas de Optimização.

O livro de Boyer (1993), *História da Matemática*, foi um importante ponto de partida uma vez que aí pudemos encontrar informação acerca de quando surgiram os problemas de optimização, bem como referência aos matemáticos que os estudaram. De igual modo foi possível encontrar dados importantes não só acerca da evolução o Cálculo Diferencial como importantes referências bibliográficas que nos permitiram ir de encontro aos clássicos da Matemática que abordam o tema.

Outros livros de História da Matemática que nos permitiram completar a informação recolhida na primeira obra são os seguintes:

- *A history of Mathematics*, de Katz (1993)
- *História Concisa das Matemáticas, de* Struik (1989)
- *The Historical Developmet of the Calculus, de* Edwards (1979)
- *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, de Boyer (1959)

Com base na informação que conseguimos recolher nos livros acima referidos, elaborámos um índice cronológico de autores que desenvolveram estudos na área do Cálculo Diferencial e, por esse motivo, julgamos estarem relacionados com o estudo de problemas de optimização.

A partir do índice cronológico, levamos a efeito uma pesquisa com o objectivo de identificar as obras existentes de cada um dos autores ou acerca dos mesmos. Formámos então uma tabela com todas as obras encontradas. Nessa tabela indicamos as seguintes informações: Autor, data de nascimento e falecimento do autor, título da obra ou obras do autor, ano e local de publicação, edição e por fim a localização da obra.

Indicámos a seguir o índice cronológico e a tabela de autores realizados.

ÍNDICE CRONOLÓGICO

SÉCULO	AUTOR
IV a.C.	EUCLIDES (330-260 a. C.)
I a.C.	PTOLOMEU, Claudio (168-90 a. C.)
IV	PAPPUS, de Alexandrie (290-350)
XVII	FERMAT, Pierre de (1601-1665) NEWTON, Isaac (1642-1727) BERNOULLI, Jacques (1654-1705) VARIGNON, Pierre (1654-1722) BERNOULLI, Jean (1667-1748) LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1646-1716) PASCAL, Blaise (1623-1662) L'HÔPITAL, Guillaume François Antoine de, (1661-1704)
XVIII	BEZOUT, E. (1730-1783) EULER, Leonhard (1707-1783) LAGRANGE, Joseph Louis de (1736-1813)
XIX	LACROIX, Silvestre-François (1765-1843) CAUCHY, Augustin-Louis (1789-1875) STURM, Jacques Charles François (1803 – 1855) SERRET, Joseph Alfred (1819-1885) RIEMANN, Bernhard (1826-1866) LEBESGUE, Henri, (1875-1941)

A. OBRAS ACERCA DO AUTOR

SÉC.	OBRA SOBRE:	AUTOR	TITULO	ANO E LOCAL DE PUBLICAÇÃO	EDIÇÃO
IV a.C.	**EUCLIDES (330-260 a.C.)**	**Thomas L Heath.**	**Elementos de Euclides** **The thirteen books of Euclid's Elements.**	**Lisboa: 1768** **New York: 1956**	 **2ª Ed.**
IV	**PAPPUS, A (290-350)**	**Paul Ver Eecke**	**La collection mathématique / Pappus d'Alexandrie**	**1933 ; Paris**	
XIX	LACROIX,S.F. (1765-1843)	M. Hermité e J. A. Serret	Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral	1874 ; Paris: Gauthier-Villars	8ª Ed

B . OBRAS DO AUTOR

SÉC.	AUTOR	TITULO	ANO E LOCAL DE PUBLICAÇÃO	EDIÇÃO
XVII	BERNOULLI, J. (1667-1748)	Johannis Bernoulli opera omnia. - 4 vols.	1742; Lausannae & Genevae	
	L'HÔPITAL, G. (1661-1704)	**Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes**	**1716 ; Paris**	**2ª Ed.**
XVIII	**BEZOUT, E. (1730-1783)**	**Cours de mathématique** **Elementos de analyse**	**1775; Paris** **1793; Coimbra**	 **2ª ed.**
	EULER, L. (1707-1783)	Introduction à l'analyse infinitésimale ; 2 v	Paris: 1987-1988	
	LAGRANGE, J. L. (1736-1813)	Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel Leçons sur le calcul des fonctions, servant de commentaire et de supplément à la théorie des fonctions analytiques. Theorica das funções analyticas, que contem os principios do calculo	Paris: 1847 Paris: 1808 Lisboa: 1798	3ª Ed
XIX	LACROIX, S. F. (1765-1843)	Traité élélentaire de calcul differentiel et calcul intégral		
	CAUCHY, A. L. (1789-1875)	Résumé des leçons données Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy	Paris: 1987 Paris: 1882-1938	
	STURM, J. C. F. (1803 – 1855)	**Cours D'Analyse de L'École Polytechnique**	**Paris: 1884**	**7ª Ed**
	SERRET, J. A. (1819-1885)	**Cours de Calcul Differenciel et Integral**	**Paris: 1878**	
	RIEMANN, B. (1826-1866)	Oeuvres mathématiques de Riemann	Paris: 1898	
	LEBESGUE, H. (1875-1941)	Oeuvres scientifiques	Genève : 1972	

Nota: As obras acima referidas cuja localização começa por UCBGBJ foram localizadas na Biblioteca Joanina da Universidade de Coimbra. A obra sob a sigla UCLEFI foi localizada na Biblioteca de Estudos Filosóficos da Universidade de Coimbra. Todas as outras obras acima referidas foram encontradas na Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Assim, com base nos registos presentes nos livros acerca de *História da Matemática,* podemos dividir a análise histórica dos problemas de optimização em 4 períodos:

1º Período – Período Grego: Desde o século IV a. C. até ao século IV D.C.;

2º Período – Nascimento: Século XVI e XVII;

3º Período – Consolidação: Século XVIII;

4º Período – Institucionalização: Século XIX;

Vamos agora apresentar o estudo elaborado, separadamente, de cada um dos períodos. A respeito de cada um dos quatro períodos procurámos verificar quais os autores que abordaram os problemas de optimização nas suas obras e quais os tipos de problemas de optimização presentes em cada uma delas, tentando fazer uma categorização dos mesmos.

Após um primeiro exame a cada uma das obras, seleccionámos para analisar, detalhadamente, uma ou duas dos respectivos autores da época. Para cada uma elaborámos uma ficha de referência da obra, contendo o nome do autor, a data de nascimento e falecimento do autor, o título, o ano, a editora da primeira edição e da edição consultada e por fim a localização da mesma. Seguindo-se a contextualização e intenção do autor, a caracterização da estrutura da obra e os problemas de optimização aí encontrados, bem como um comentário aos mesmos.

Na análise efectuada a cada um dos problemas, tivemos em conta os seguintes aspectos:

- Forma de Enunciado: Identificámos a forma como o problema surge enunciado
  - Proposição (PR): Problemas enunciados como uma proposição
  - Exemplo (EX): Problemas assinalados como exemplos
  - Problema (PB): Problemas enunciados como problema
  - Aplicação (AP): Problemas indicados como aplicação
  - Exercício (EXR): Problemas enunciados como exercício

- Tipo de problema: Identificámos o contexto em que este problema se enquadra
  - Geometria Plana (GP)
  - Geometria Espacial (GE)
  - Aritmética (AR)

- Física (FI)
- Astronomia (AS)

- Tipo de optimização: Identificámos o que se pretende optimizar no problema
  - Distância (OD)
  - Área (OAR)
  - Volume (OV)
  - Produto (OP)
  - Ângulo (OAN)
  - Razão (OR)
  - Tempo (OT)

- Tipo de resolução: Identificámos a forma como é feita a resolução. Se esta surge como uma demonstração, no caso em que o problema surge como uma proposição ou se apresenta a resolução, nos restantes casos.
  - Demonstração (DEM)
  - Resolução (RES)

Segue-se, a análise feita a cada uma das obras.

2.1. PERÍODO GREGO: DESDE O SÉCULO IV a. C. ATÉ AO SÉCULO IV

Verificámos através da nossa pesquisa que, de facto, antes de surgir o conceito de derivada já existiam e já se resolviam problemas de máximos e mínimos. Nesta altura os problemas que existiam eram problemas essencialmente geométricos: Geometria Plana ou Geometria Espacial.

Neste primeiro período fomos encontrar 3 autores relacionados com o nosso tema: Euclides (330 - 260 a.C.), Ptolomeu (168 – 90 a. C.) e Pappus (290-350).

Uma vez que o conceito de derivada e, consequentemente, o conceito de problemas de optimização são posteriores a este período, estes surgem e são resolvidos de uma outra forma, ou seja, sem que se faça uso do Cálculo Diferencial.

Vejamos de seguida quais os problemas de optimização encontrados nas obras de cada um dos autores referidos e analisemos também a forma como estes elaboram a sua resolução.

Vamos apenas analisar a obra de Euclides e de Pappus, uma vez que na sua obra, Pappus, apresenta uma compilação de vários trabalhos de outros autores e, em particular, de Ptolomeu.

2.1.1. *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

2.1.1.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Euclides

Data de nascimento e falecimento do autor: ≈ 330 a. C. - 260 a. C

Título: *Elementos*

Ano, editora e lugar da primeira edição: 300 a. C.

Autor da obra consultada: Thomas L. Heath

Título da obra consultada: *The thirteen books of Euclid's Elements*

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1956, New York: Dover. - Traduzidos do texto de Heiberg – 2ª edição revista e com aumentos

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Cota: 01A75/EUC.Ele/V.1; 01A75/EUC.Ele/V.2; 01A75/EUC.Ele/V.3.

2.1.1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Euclides (c. 330 a. C. - 260 a. C.) foi um dos primeiros geómetras e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes da Grécia Clássica e de todos os tempos.

Existem poucas informações sobre a sua vida. Foi chamado para ensinar Matemática na escola criada por Ptolomeu Soter (306 a. C. - 283 a. C.), em Alexandria, mais conhecida por "Museu".

Embora se tenham perdido mais de metade dos seus livros, ainda restaram, para felicidade dos séculos vindouros, os treze famosos livros que constituem os *Elementos*. Publicados por volta de 300 a. C.. Aí está contemplada a Aritmética, a Geometria e a Álgebra (BOYER, 1993).

O trabalho de Euclides é muito vasto. As suas obras foram inicialmente traduzidas para árabe, depois para latim, e a partir destes dois idiomas para outras línguas europeias.

Embora alguns conceitos já fossem conhecidos anteriormente à sua época, o que impossibilita uma análise completa da sua originalidade, pode-se considerar o seu trabalho como genial. Ao recolher tudo o que então se conhecia, sistematiza os dados da intuição e substitui imagens concretas por noções abstractas, para poder raciocinar sem qualquer apoio intuitivo (BOYER, 1993).

2.1.1.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

Observemos como está estruturado o texto dos *Elementos*, nas versões que se ajustam melhor ao texto original.

O texto de Euclides, *Elementos*, está dividido em treze capítulos, chamados *Livros*. Em cada livro estão presentes pontos diferentes. Esses pontos são: definições, proposições, porismas, lemas, postulados e noções comuns (HEATH, 1956).

Os livros distinguem-se entre si pelo conteúdo. Vejamos qual o conteúdo de cada um dos livros:

- Os quatro primeiros livros e o sexto estudam a Geometria no Plano;
- O livro quinto está dedicado à Teoria da Proporção;
- Os livros sétimo, oitavo e nono, tratam da Teoria de Números;
- O livro décimo fala sobre os Irracionais;

– Os livros décimo primeiro, décimo segundo e décimo terceiro dissertam sobre a Geometria no Espaço (HEATH, 1956).

Ora é exactamente nos livros acerca de Geometria no Plano que vamos encontrar proposições que podem ser interpretadas como problemas de optimização.

2.1.1.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO PRESENTES NA OBRA

Ao longo desta obra encontramos algumas proposições que podem ser interpretadas como um problema de optimização. As quatro primeiras surgem no livro III: proposições 7, 8, 15 e 16 e estão relacionadas com o círculo. A quinta surge posteriormente no livro VI: proposição 27 está relacionada com as proporções de figuras planas. As proposições de Euclides são de dois tipos: Ou são construções (dividir uma recta, construir um quadrado) ou são teoremas enunciados em forma condicional, como é o caso das proposições relacionadas com problemas de optimização.

Vejamos agora a forma não só como Euclides as enuncia, mas também como as demonstra. Apresentamos também os resultados em que se baseia para as demonstrar e as aplicações posteriores que o autor faz das mesmas.

> **Livro III – Proposição 7** (enunciado = prótasis)
>
> *Se tomarmos um ponto no diâmetro de um círculo que não seja o centro do círculo e desde o ponto até ao círculo caem algumas rectas, a maior será aquela na qual se encontra o centro, e a mínima o resto da máxima para o diâmetro inteiro. E das restantes a mais próxima da recta que passa no centro é sempre maior do que as mais afastadas. Do mesmo ponto não se poderão tirar para a circunferência senão duas rectas iguais, e estas cairão para uma e para outra parte daquela, que entre todas for a mínima.* (Vol. II; pag.14)

Para demonstrar esta proposição Euclides baseia-se nos seguintes resultados apresentados e demonstrados anteriormente:

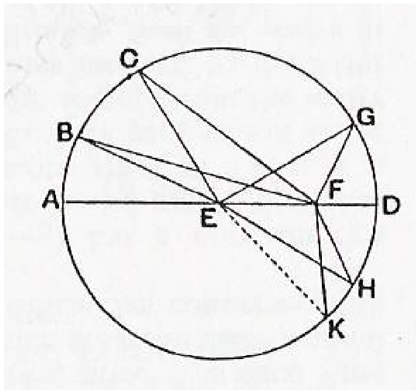
– Se dois triângulos tiverem dois lados iguais, e os ângulos formados por esses lados forem também iguais, as bases dos triângulos e os mais ângulos serão também iguais [I.4];
– Em qualquer triângulo dois lados, tomados de qualquer modo que se quiser, são maiores que o terceiro [I.20];

- Num ponto de uma linha recta dada formar um ângulo rectilíneo dado [I.23];
- Se dois triângulos tiverem dois lados iguais, e um dos ângulos compreendidos pelos lados iguais for maior, e o outro for menor, a base que estiver oposta ao ângulo maior será maior que a outra base oposta ao ângulo menor [I.24].

Vejamos agora como Euclides demonstra esta proposição, ou seja, que o diâmetro é a maior distância entre dois pontos da circunferência:

Primeira parte

Exposição (ékthesis)[2]



Seja ABCD um círculo, e seja AD o seu diâmetro; Em AD tome-se o ponto F que não seja o centro do círculo, seja E o centro do círculo. A partir do ponto F para a circunferência ABCD tracemos as rectas FB, FC, FG.

Determinação (diorismós)[3]

Eu digo que FA é a maior, e FD é a menor entre todas as rectas que vão de F para a circunferência. Digo também que FB é maior do que FC, e FC maior do que FG.

Construção (kataskeue)[4]

Tracemos agora BE, CE, GE. Como em qualquer triângulo dois lados são maiores do que o restante, EB, EF juntamente são maiores do que BF, mas AE é igual a BE, portanto AF é maior do que BF.

Demonstração (apódeixis)[5]

Além disso, como BE é igual a CE, e FE é comum, os dois lados BE, EF são iguais aos dois lados CE, EF. Mas o ângulo BEF também é maior do que o ângulo CEF; Portanto a base BF é maior do que a base CF. Pela mesma razão CF é maior do que FG.

[2] O enunciado da proposição é completamente geral enquanto que a exposição se refere ao caso particular do desenho sobre o que se vai fazer a demonstração

[3] Na determinação indica-se qual é o objectivo que se pretende alcançar em função da figura que se apresenta como exemplo para traçar a demonstração. Costuma-se iniciar com as palavras "digo que…"

[4] Completa-se a figura com os elementos necessários para desenvolver a demonstração

[5] Apesar de no raciocínio se fazer referência a uma figura, as proposições em que se baseia são gerais pelo que a validez do raciocínio é também geral.

Além disso, como GF, FE juntamente são maiores do que EG, e EG é igual a ED, então as duas GF, FE são maiores do que ED. Seja EF subtraída de cada uma; Então a restante GF é maior do que a restante FD. Portanto FA é a maior, FD é a mais pequena, e FB é maior do que FC, e FC maior do que FG.

Segunda parte

Determinação (diorismós)

Digo ainda que do ponto F para a circunferência ABCD só se poderão traçar duas rectas iguais entre si, e que estas duas rectas cairão uma para uma e outra para outra parte da menor FD.

Construção (kataskeue)

Pela recta EF, e pelo ponto E contido nela, vamos construir o ângulo FEH igual ao ângulo GEF, e vamos unir FH.

Demonstração (apódeixis)

De seguida, como GE é igual a EH, e EF é comum, as duas GE, EF são iguais ás duas HE, EF; e o ângulo GEF é igual ao ângulo HEF, portanto a base FG é igual à base FH.

Terceira parte

Determinação (diorismós)

Eu disse ainda que qualquer outra recta igual a FG não iria passar no círculo pelo ponto F.

Construção (kataskeue)

Tracemos agora FK, igual a FG

Demonstração (apódeixis)

Então, como FK é igual a FG, e FH igual a FG, então FK também é igual a FH, isto é, a mais próxima da recta que passa no centro será assim igual à mais afastada: o que é impossível. Portanto outra recta igual a GF não irá passar no ponto F.

Conclusão (syumpérasma)

Assim só uma recta está nessas condições.

Posteriormente, Euclides utiliza esta proposição para demonstrar o resultado seguinte:

- Se de um ponto tomado dentro de um círculo caírem na circunferência mais de duas rectas iguais entre si, o dito ponto será o centro do círculo [III. 19].

Livro III – Proposição 8 (enunciado = prótasis)

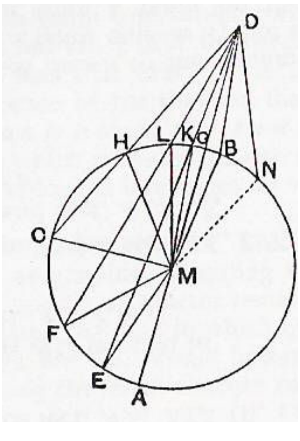
Se tomarmos um ponto exterior a um círculo e do ponto ao círculo traçarmos algumas rectas, uma das quais passe pelo centro e as restantes são traçadas ao acaso, das *rectas que caem na parte concava da circunferência, a maior é a que passa pelo centro, e das restantes sempre a mais próxima da que passa no centro é maior do que as mais afastadas. Mas das que caem na parte convexa da circunferência a menor é a que passa pelo centro, e das restantes a mais próxima à mais pequena é sempre menor que a mais afastada. E do mesmo ponto não se poderão tirar para a circunferência mais de duas rectas iguais, e destas uma cairá para uma parte e a outra para a parte oposta a respeito da recta, que entre todas seja a mínima.* (Vol. II; pag.17)

Para demonstrar esta proposição Euclides baseia-se nos seguintes resultados apresentados e demonstrados anteriormente:

- Se dois triângulos tiverem dois lados iguais, e os ângulos formados por esses lados forem também iguais, as bases dos triângulos e os mais ângulos serão também iguais [I.4];
- Em qualquer triângulo dois lados, tomados de qualquer modo que se quiser, são maiores que o terceiro [I.20];
- Se sobre os extremos de um lado de um triângulo estiverem postas duas rectas dentro do mesmo triângulo, estas serão menores que os outros dois lados do triângulo, mas compreenderão um ângulo maior do que o ângulo que fica oposto ao lado, sobre cujos extremos estão postas as ditas rectas [I.21];
- Se dois triângulos tiverem dois lados iguais, e um dos ângulos compreendidos pelos lados iguais for maior, e o outro for menor, a base que estiver oposta ao ângulo maior será maior que a outra base oposta ao ângulo menor [I.24].

Vejamos como Euclides demonstra esta proposição:

Primeira parte



Exposição (ékthesis)

Seja ABC um círculo, e seja D um ponto tomado do exterior de ABC. Tracemos as rectas DA, DE, DF, DC, e seja DA a recta que passa no centro.

Determinação (diorismós)

Disse que, das rectas que caem na parte côncava da circunferência AEFC, a recta DA que passa no centro é a maior, e DE é maior do que DF e DF maior do que DC.

Demonstração (apódeixis)

Mas, das rectas que caem sobre a parte convexa da circunferência HLKG, a recta DG que passa pelo centro é a menor; e a mais próxima da menor DG é sempre menor do que a mais afastada, DK menor do que DL e DL menor do que DH.

Construção (kataskeue)

Tracemos o centro da circunferência ABC, seja ele M, tracemos as rectas ME, MF, MC, MK, ML, MH.

Demonstração (apódeixis)

Então, como AM é igual a EM, adicionemos a cada uma MD;
Então AD é igual ás duas EM, MD. Mas EM, MD juntamente são maiores do que ED, então AD também é maior do que ED. Além disso, como ME é igual a MF, e MD é comum, Então as duas EM, MD são iguais ás duas FM, MD; E o ângulo EMD é maior do que o ângulo FMD; Então a base ED é maior do que a base FD. Da mesma forma podemos provar que FD é maior do que CD; Então DE é a maior, e DE é maior do que DF, e DF maior do que DC.

Agora, se MK, KD juntas são maiores do que MD, e MG é igual a MK; Tirando de uma e outra parte as duas MK, MG, fica GD é menor do que KD; e por consequência GD menor do que KD. Logo, GD é a menor. E, se em MD, um dos lados do triângulo MLD, duas rectas MK, KD são construídas dentro do triângulo, então as duas MK, KD juntas são menores do que as duas ML, LD. E MK é igual a ML, então a restante de DK é mais pequena que a restante de DL. Da mesma forma podemos provar que DL é também menor do que DH;

Conclusão (syumpérasma)

Então DG é a mais pequena, e DK é menor do que DL, e DL menor do que DH.

Segunda parte

Determinação (diorismós)

Disse também que do ponto D mão se poderão tirar, para a circunferência, senão duas rectas iguais, uma para uma e outra para outra parte da recta DG.

Construção (kataskeue)

Sobre a recta MD, e pelo ponto M, tracemos o ângulo DMB igual ao ângulo KMD e tire-se DB.

Demonstração (apódeixis)

Então, como MK é igual a MB, e MD é comum, os dois lados KM, MD são iguais aos dois lados BM, MD respectivamente; e o ângulo KMD é igual ao ângulo BMD;

Conclusão (syumpérasma)

Então a base DK é igual à base DB.

Terceira parte

Determinação (diorismós)

Eu disse que outra recta igual a DK iria passar no círculo pelo ponto D.

Construção (kataskeue)

Se possível, tracemos essa recta DN.

Demonstração (apódeixis)

Então, como DK é igual a DB, DB também é igual a DN, seria, a mais próxima da menor DG igual à mais afastada: o que foi provado que é impossível.

Conclusão (syumpérasma)

Então, não existem mais de duas rectas iguais que passam no círculo ABC pelo ponto D, uma em cada lado de DG a mais pequena.

Posteriormente não se encontra nenhuma aplicação desta proposição.

Livro III – Proposição 15 (enunciado = prótasis)

Num círculo o diâmetro é a recta maior e das restantes, a mais próxima ao centro é sempre maior do que a mais afastada. (Vol. II; pag.36)

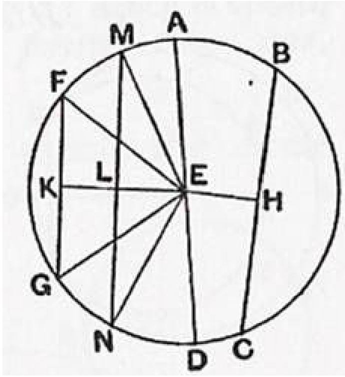
Para demonstrar esta proposição Euclides baseia-se nos seguintes resultados apresentados e demonstrados anteriormente:

– Em qualquer triângulo dois lados, tomados de qualquer modo que se quiser, são maiores que o terceiro [I.20];
– Se dois triângulos tiverem dois lados iguais, e um dos ângulos compreendidos pelos lados iguais for maior, e o outro for menor, a base que estiver oposta ao ângulo maior será maior que a outra base oposta ao ângulo menor [I.24];
– Em todo o círculo as rectas iguais distam igualmente do centro, e as que distam igualmente do centro são iguais [III.14];
– Teorema de Pitágoras. [I. 47]

Vejamos como Euclides demonstra esta proposição:

Primeira parte

Exposição (ékthesis)



Seja ABCD um círculo e seja AD o seu diâmetro e o ponto E o centro; e seja BC a mais próxima do diâmetro AD, e FG a mais afastada;

Determinação (diorismós)

Eu disse que AD é a maior e que BC é maior do que FG.

Construção (kataskeue)

Pelo centro E, tracemos EH, EK perpendiculares a BC, FG, e também os semi-diâmetros EB, EC, EF.

Demonstração (apódeixis)

Sendo AE igual a EB, e DE igual a EC, então AD é igual às duas BE, EC tomadas juntas. Mas BE, EC são maiores que BC. Logo AD é maior do que BC. Como BC está mais perto do centro do que FG, então EK é maior do que EH. Mas BC é o dobro de BH, e FG é o dobro de FK; e os quadrados de EH, HB são iguais aos quadrados de EK, KF, dos quais o quadrado de EH é menor do que o quadrado de EK, pois EH é menor do que EK.

Conclusão (syumpérasma)

Logo, o quadrado de BH será maior do que o quadrado de FK, e assim será BH maior do que FK e BC maior do que FG.

Segunda Parte

Exposição (ékthesis)

Seja BC maior do que FG.

Determinação (diorismós)

Digo, que a recta BC estará mais perto do centro do que a recta FG, isto é, feita a mesma construção, será EH menor do que EK.

Demonstração (apódeixis)

Porque sendo BC maior do que FG, será BH maior do que FK. Mas os quadrados de BH, HE são iguais aos quadrados de FK, KE, dos quais o quadrado de BH é maior que o quadrado de FK, por ser BH maior do que FK.

Conclusão (syumpérasma)

Logo, o quadrado de EH será menor que o quadrado de EK, e por consequência será EH menor do que EK.

Posteriormente, Euclides utiliza esta proposição para demonstrar o resultado seguinte:

– Dadas duas esferas concêntricas, inscrever na esfera maior um sólido poliedro, cuja superfície não toque a esfera menor [XII. 17].

Livro III – Proposição 16 (enunciado = prótasis)

A recta desenhada pelo extremo do diâmetro de um círculo formando ângulos rectos com o diâmetro, irá cair fora do círculo, e não se irá interpor outra recta no espaço entre a recta e a circunferência e o ângulo do semicírculo é maior, e o que fica é menor, do que qualquer ângulo rectilíneo agudo. (Vol. II; pag.37)

Para demonstrar esta proposição Euclides baseia-se nos seguintes resultados apresentados e demonstrados anteriormente:

- Em qualquer triângulo isósceles os ângulos que estão sobre a base são iguais; e produzidos os lados iguais, os ângulos que se formam debaixo da base também são iguais [I.5];
- Dois ângulos de um triângulo qualquer, tomados de qualquer modo, são menores que dois ângulos rectos [I.17];
- Em qualquer triângulo, o ângulo maior fica oposto ao lado maior [I.19].

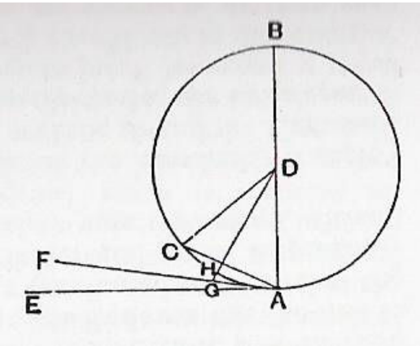
Vejamos como Euclides demonstra esta proposição:

Primeira parte

Exposição (ékthesis)

Seja ABC um círculo, D o seu centro e AB o seu diâmetro;

Determinação (diorismós)



Eu disse que as rectas traçadas a partir de A formando ângulos rectos com AB a partir da extremidade irão cair fora do círculo.

Construção (kataskeue)

Suponhamos que não é verdade, mas, se possível, de centro no círculo, como a recta AC. Tire-se DC.

Demonstração (apódeixis)

Como DA é igual a DC, o ângulo DAC é também igual a ACD. Mas o ângulo DAC é recto. Então o ângulo ACD também é recto; Assim, no triângulo ACD, os dois ângulos

DAC, ACD são iguais a dois ângulos rectos, o que é impossível. Então a recta traçada a partir do ponto A nos ângulos rectos até BA não irá cair dentro do círculo. De forma semelhante podemos provar que não irá cair sobre a circunferência;

Conclusão (syumpérasma)

Então cai fora da circunferência, como AE.

Segunda parte

Determinação (diorismós)

Eu disse depois que no espaço entre a recta AE e a circunferência CHA não pode ser interposta outra recta.

Construção (kataskeue)

Se possível, deixemos que outra recta se interponha, seja ela FA, e seja DG traçada a partir do ponto D perpendicular a FA.

Demonstração (apódeixis)

Então, como o ângulo AGD é recto, e o ângulo DAG é menor do que um ângulo recto, AD é maior do que DG. Mas DA é igual a DH; então DH é maior do que DG, o menor que o menor: o que é impossível.

Conclusão (syumpérasma)

Então não pode ser interposta outra recta no espaço entre a recta e a circunferência.

Terceira parte

Determinação (diorismós)

Eu disse, além disso, que o ângulo do semicírculo contido entre a recta BA e a circunferência CHA é maior do que qualquer ângulo agudo rectilíneo, e o restante ângulo contido entre a circunferência CHA e a recta AE é menor do que qualquer ângulo agudo rectilíneo.

Demonstração (apódeixis)

Se existe um qualquer ângulo rectilíneo maior do que o ângulo contido entre a recta BA e a circunferência CHA, e qualquer ângulo rectilíneo menor do que o ângulo contido entre a circunferência CHA e a recta AE, então dentro do espaço entre a circunferência e a recta AE irá interpor-se uma recta que irá fazer um ângulo contido entre as rectas que será maior do que o ângulo contido entre a recta BA e a circunferência CHA, e um outro ângulo contido entre rectas que é menor do que o ângulo contido entre a circunferência CHA e a recta AE. Mas tal recta não se pode interpor;

Conclusão (syumpérasma)

Então não existe nenhum ângulo agudo contido entre as rectas que seja maior do que o ângulo contido entre a recta BA e a circunferência CHA, também não existe nenhum ângulo agudo contido entre as rectas que seja menor do que o ângulo contido entre a circunferência CHA e a recta AE.

Posteriormente, Euclides utiliza esta proposição para demonstrar os resultados seguintes:

- Sobre uma linha recta dada descrever um segmento de círculo, no qual segmento possa existir um ângulo igual a outro ângulo rectilíneo dado [III. 33];
- Se de um ponto qualquer fora de um círculo se tirarem duas rectas, das quais uma corte o círculo, e a outra chegue somente até à circunferência; e se o rectângulo compreendido pela recta inteira que corta o círculo e pela parte dela que fica entre o dito ponto e a parte convexa da circunferência, for igual ao quadrado da recta incidente sobre a circunferência, será a recta incidente tangente ao círculo [III. 37];
- Inscrever um círculo num quadrado dado [IV. 8];
- Inscrever um círculo num pentágono dado equilátero e equiângulo [IV. 13].

Esta proposição utilizou-se posteriormente como definição de recta tangente a uma curva

Mais à frente, no livro VI, podemos encontrar mais uma proposição que se pode interpretar como um Problema de Optimização.

Livro VI – Proposição 27 (enunciado = prótasis)

De todos os paralelogramos aplicados a uma mesma recta e com os defeitos[6] *de figuras paralelogramas semelhantes à figura descrita sobre a metade da dita recta, e*

[6] O método de construção do paralelogramo cuja área seja equivalente à de uma recta com uma longitude dada, diz-se que se faz por justaposição (parabole ton chorion) diz-se que é por excesso (hipérbole) si a área é maior que a longitude da linha e por defeito (elleipsis) se a área é menor que a longitude da linha. Estas denominações transportaram-se posteriormente às cónicas. Esta proposição, juntamente com a 28 e a 29 foi considerada como o equivalente geométrico da forma algébrica mais generalizada de equações quadráticas quando tem uma raiz real positiva. Constitui o fundamento do livro X e do estudo realizado por Apolónio das cónicas

semelhantemente postas, o máximo é aquele que é aplicado à metade da mesma recta, e é semelhante à figura paralelograma que falta. (Vol. II; pag.257)

Para demonstrar esta proposição Euclides baseia-se nos seguintes resultados apresentados e demonstrados anteriormente:

– Os paralelogramos que estão postos sobre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais [I.36];
– Em qualquer paralelogramo os complementos dos paralelogramos, que existem ao redor da diagonal, são iguais entre si [I.43];
– Se de um paralelogramo for tirado outro paralelogramo semelhante ao total, e semelhantemente posto, e que tenha um ângulo comum ao mesmo total, o paralelogramo que for tirado, existirá ao redor da diagonal do paralelogramo total [VI.26].

Vejamos como Euclides demonstra esta proposição, ou seja, para um mesmo perímetro o paralelogramo com maior área é o quadrado:

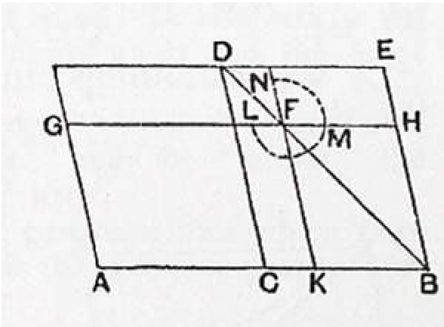
Primeira parte

Exposição (ékthesis)

Seja AB uma recta bissectada por C. Apliquemos à recta AB o paralelogramo AD com a falta da figura paralelogramica DB descrita sobre a metade de AB, seja ela CB;

Determinação (diorismós)

Eu disse que, de todos os paralelogramos aplicados em AB e com as faltas de figuras paralelogramicas semelhantes e de forma semelhante situada em BD, AD é o maior.



Construção (kataskeue)

Apliquemos à recta AB o paralelogramo AF com a falta da figura paralelogramica FB semelhante e situada de forma semelhante a DB;

Determinação (diorismós)

Eu disse que o paralelogramo AD era maior do que o paralelogramo AF.

Demonstração (apódeixis)

Seja primeiramente a base AK do paralelogramo AF maior do que a recta AC. Como o paralelogramo DB é semelhante ao paralelogramo FB, então eles têm a mesma diagonal. Tracemos essa diagonal DB, produzindo a recta KF até ao ponto L. Como o paralelogramo CF é igual a FE, e FB é comum, então a totalidade de CH é igual à totalidade de KE. Mas CH é igual a CG, pois AC também é igual a CB. Então GC também é igual a EK. Juntemos-lhe o paralelogramo CF; Então o paralelogramo AF é igual ao gnômon LMN, e por isso o paralelogramo CE, isto é, o paralelogramo AD será maior do que o paralelogramo AF.

Em segundo lugar seja a base AK do paralelogramo AF menor do que a recta AC. Suposta a mesma construção, como os paralelogramos DH, DG são iguais, pois HM é igual a MG, então DH é maior do que LG. Mas DH é igual a DK. Logo DK é maior do que LG.

Conclusão (syumpérasma)

Por isso juntando a uma e outra parte o mesmo paralelogramo AL, o paralelogramo DB, ou seja AD, é maior do que o paralelogramo AF.

Posteriormente, Euclides utiliza esta proposição para demonstrar o resultado seguinte:

- Aplicar a uma linha recta dada um paralelogramo igual a um rectilíneo dado, e com o defeito de uma figura paralelogramica semelhante à outra dada. Mas o rectilíneo dado, ao qual se quer que seja igual ao paralelogramo que se pede, não deve ser maior que o paralelogramo, que se aplica à metade da recta dada, sendo semelhantes entre si os defeitos, tanto do paralelogramo que se pede com o defeito da figura paralelogramica semelhante à outra dada [VI. 28].

2.1.1.5. CONCLUSÃO

Podemos verificar que Euclides, ao longo das suas demonstrações, denomina os segmentos de recta por rectas. Assim, sempre que se lê linha recta, devemos ler segmento de recta.

Verificamos também, através da análise destas proposições, que todos os problemas de optimização apresentados são problemas de Geometria Plana. Mais concretamente, problemas sobre optimização de áreas, de distâncias ou de ângulos.

Estes não aparecem enunciados como um problema, mas sim como uma proposição e são demonstrados tendo como base o método de redução ao absurdo. Para isso utiliza proposições prévias fundamentalmente relacionadas com a igualdade de triângulos e relações entre os ângulos de um triângulo.

Nesta obra, as ilustrações são apresentadas ao longo do texto, mas, como se trata de uma tradução da obra original, não podemos concluir se nesta se apresentavam da mesma forma.

Actualmente não seria necessário fazer uma demonstração/resolução tão extensa, já que bastaria determinar a equação que define a área ou a distância e calcular os seus extremos através da derivada da função.

Transportando estes factos para o ensino dos problemas de optimização, no Ensino Secundário, verificamos que é possível abordar os problemas de optimização antes de os alunos conhecerem o conceito de derivada.

2.1.2. *LA COLLECTION MATHEMATIQUE* DE PAPPUS DE ALEXANDRIE

2.1.2.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Pappus de Alexandrie

Data de nascimento e falecimento do autor: 290-350

Título: *La collection mathématique*

Ano, editora e lugar da primeira edição: século IV

Autor da obra consultada: Paul Ver Eecke

Título da obra consultada: *Pappus D'Alexandrie: La collection Mathématique*

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1933, Paris: Desclée de Brouwer - 2 vol. Obra traduzida pela primeira vez do Grego para o Francês com introdução e notas do autor

Localização da obra consultada: Biblioteca do Instituto de Estudos Filosóficos da Faculdade de Letras da Universidade de Coimbra. Cota: UCLEFI C-6-2/3.

2.1.2.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Pappus de Alexandria foi o último dos grandes geómetras gregos e um dos seus teoremas é citado como sendo a base da moderna geometria projectiva.

Existem poucos registos sobre a sua vida, sendo que as datas apresentadas advêm de referências bibliográficas ao seu nome e aos seus feitos. Á parte destes detalhes pouco mais se sabe, aparentemente viveu em Alexandria toda a sua vida, talvez tenha sido encorajado a estudar certos problemas matemáticos por um amigo, Hierius, e talvez tenha ensinado numa escola de Alexandria.

Os seus mais importantes legados em geometria foram a *Sinagoga* e a *Colecção Matemática*, sendo este último um grupo de oito livros que provavelmente foi escrito por partes, pois cada livro trata de diferentes tópicos e cada um conta com a sua própria introdução e com notas históricas sobre o assunto (BOYER, 1993).

2.1.2.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

A *Colecção Matemática*, como já referimos é composta por um grupo de oito livros, tratando cada livro, diferentes tópicos e tendo cada um a sua própria introdução e notas históricas sobre o assunto.

Assim, o primeiro livro, que se encontra perdido, trata de assuntos de aritmética e as partes do segundo, que sobreviveram ao tempo, tratam do método de Apolónio referente a "grandes" números. O método expressa números, como potências de uma miríade, isto é, como potências de 10 000.

O terceiro livro da colecção está dividido em quatro partes. A primeira é referente ao problema de encontrar duas médias proporcionais entre duas linhas rectas dadas. Na segunda segue-se a construção das médias aritméticas, geométricas e harmónicas. Na terceira é descrita uma colecção de paradoxos, aos quais são dados créditos a Erycinos e, finalmente, a quarta parte mostra como cada um dos cinco poliedros regulares pode ser inscrito numa esfera.

O quarto livro contém propriedades das curvas, em que se inclui a espiral de Arquimedes e as quadraturas de Hippias. Neste livro também se encontram descritos os métodos de trissecção.

No quinto livro discutem-se os treze sólidos semi-regulares descobertos por Arquimedes. Ele compara as áreas de figuras com perímetro igual e volumes de sólidos com igual superfície, provando que a esfera tem um maior volume que qualquer sólido regular com a mesma área de superfície. Prova também que, dados dois sólidos regulares com igual área de superfície, aquele com maior número de faces tem um maior volume.

Os livros seis e sete são uma referência a livros de outros autores, como por exemplo, Euclides, Teodósio e Eratóstenes. No sexto livro surge também um comentário aos livros de Astronomia da obra *Pequena Astronomia*. Para além da revisão destes textos, Pappus aponta e corrige erros prévios. Ele escreveu depois sobre o *Tesouro da Análise*. É também neste livro que surge o "Problema de Pappus", problema esse que teve grande impacto no desenvolvimento da geometria. Foi discutido, posteriormente, por Descartes e Newton e aquele que é agora conhecido como o Teorema de Guldin, foi provado aqui por Pappus.

Por fim, no oitavo e último livro, Pappus escreveu sobre mecânica (BOYER, 1993).

2.1.2.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO PRESENTES NA OBRA

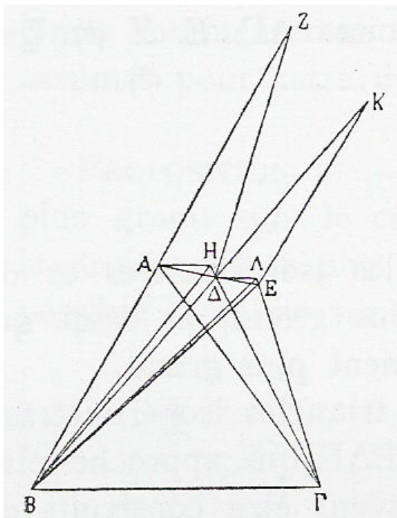
Ao longo desta obra encontramos algumas proposições que podem ser interpretadas como um problema de optimização. As primeiras surgem no livro V, onde aparecem quatro proposições acerca do nosso tema, as proposições 5, 10, 18 e 57. Seguidamente, no livro V encontramos a proposição 44. E, por fim, no livro VI, a proposição 73.

A proposição 57 do livro V não é um problema de optimização, mas sim um problema de comparação.

Vejamos agora a forma como Pappus as enuncia, bem como a forma como as demonstrou.

Livro V – Proposição 5

Entre os triângulos isoperimétricos e com a mesma base, o triângulo isósceles é o maior, e o que mais se aproxima do triângulo isósceles é continuamente maior. (Tomo I; pag.247)



Sigamos a demonstração apresentada por Pappus:

Tracemos sobre a base ΒΓ, os triângulos isoperimétricos: o triângulo isósceles ΑΒΓ e o triângulo ΒΔΓ que se aproxima mais do triângulo isósceles do que o triângulo ΒΕΓ; digo que o triângulo ΑΒΓ é maior do que o triângulo ΒΔΓ e maior do que o triângulo ΒΕΓ.

Prolonguemos a recta ΒΑ; coloquemos a recta ΑΖ igual à recta ΓΑ e transportemos as rectas de junção ΖΔ, ΔΑ. Então, como as rectas ΖΔ, ΒΔ são maiores do que a recta ΒΖ, elas são também maiores do que as rectas ΒΑ, ΑΓ (pois a recta ΑΓ é igual à recta ΑΖ). Mas as rectas ΒΑ, ΑΓ são iguais às rectas ΒΔ, ΔΓ. Se cortarmos de um lado e doutro a recta ΒΔ, a restante recta ΖΔ é maior do que a recta ΔΓ. Ora, as duas rectas ΖΑ, ΑΔ, são respectivamente iguais às duas rectas ΓΑ, ΑΔ, e a base ΖΔ é maior do que a base ΔΓ; então, o ângulo compreendido entre ΖΑ, ΑΔ é maior do que o ângulo compreendido entre ΓΑ, ΑΔ; então o ângulo entre ΖΑ, ΑΓ é maior do que o dobro do ângulo compreendido entre ΔA, AΓ; assim, o ângulo compreendido entre ZA, AΓ é maior do que o dobro do ângulo compreendido entre ΔA, AΓ. Mas, ele é o dobro do ângulo compreendido entre AB, BΓ, isto é, o ângulo compreendido entre AΓ, ΓB (visto que o triângulo é isósceles); assim o ângulo compreendido entre ΔA, AΓ é também maior do que o ângulo compreendido entre ΔA, AΓ. Tracemos o ângulo compreendido sobre as rectas ΓA, AH igual ao ângulo compreendido entre as rectas AΓ, ΓB; segue-se que a recta AH é paralela À recta BΓ pois os ângulos alternos são iguais. De seguida, prolonguemos a recta ΓΔ até ao ponto H, e transportemos as rectas de junção BH, é claro que o triângulo ABΓ é maior do que o triângulo B ΔΓ, visto que o triângulo ABΓ é equivalente ao triângulo BHΓ.

Mais uma vez, prolonguemos a recta BΔ até ao ponto K; coloquemos a recta ΔK igual à recta ΔΓ, e transportemos as rectas de junção KE, ΔE. Como as rectas BE, EK são maiores do que a recta BK, o mesmo acontece com as rectas B Δ,ΔΓ, o mesmo acontece com as rectas BE, EΓ, se cortarmos de ambos os lados da recta BE, a recta restante EK é maior do que a recta EΓ. Ora, as duas rectas KΔ, ΔE são respectivamente iguais às duas rectas ΓΔ, ΔE, e a base KE é maior do que a base EΓ; então, o ângulo compreendido entre as rectas KΔ, ΔE é maior do que o que está compreendido entre as rectas ΓΔ, ΔE; assim, o ângulo compreendido entre KΔ, ΔΓ é maior do que o dobro do ângulo compreendido entre ΓΔ, ΔE. Ora, este mesmo ângulo compreendido entre KΔ, ΔΓ é mais pequeno do que o dobro do ângulo compreendido entre ΔΓ, ΓB (pois o Ângulo compreendido entre ΔΓ, ΓB é maior do que aquele que está compreendido entre ΔB, BΓ, pois os ângulos compreendidos entre AB, BΓ e entre AΓ, ΓB são iguais); então o ângulo compreendido entre ΔΓ, ΓB é maior do que aquele que está entre ΓΔ, ΔE. Assentemos sobre a recta ΔΓ e sobre o ponto Δ, um ângulo compreendido sobre as rectas ΓΔ, ΔΛ igual ao ângulo compreendido entre ΔΓ, ΓB. ORA, é claro que a recta ΔΛ, paralela à recta BΓ por causa dos ângulos alternos, situar-se-á entre as rectas ΔE, ΔK; então, se a recta ΓE se prolongar até à paralela ΔΛ que se intersecta no ponto Λ, e se transportarmos a recta de junção BΛ, o triângulo BΓΛ será equivalente ao triângulo BΛΓ;

Dessa forma o triângulo ABΓ é maior do que o triângulo BEΓ que é mais pequeno do que o triângulo BΔΓ.

Neste primeiro problema de Geometria Plana o autor pretende optimizar a área de um triângulo dado o seu perímetro e a medida da base. Na demonstração o autor usa um método construtivo, comparando segmentos de recta, ângulos e triângulos.

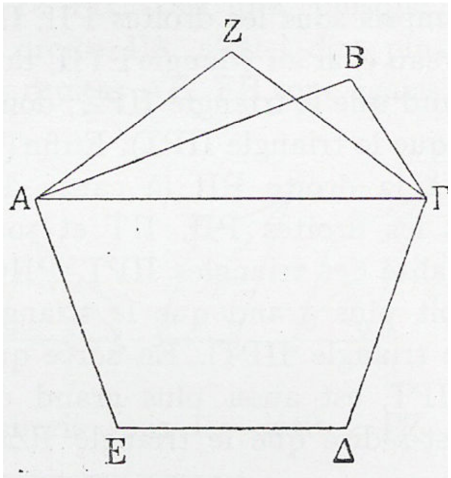
Livro V – Proposição 10

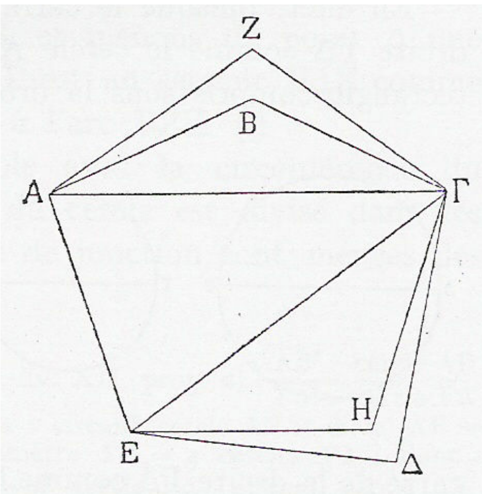
Entre as figuras rectilíneas com o mesmo perímetro e o mesmo número de lados, a maior é a que é equilateral e equiângular[7]. (Tomo I; pag.258)

Analisemos a demonstração apresentada por Pappus:

Seja ΑΒΓΔΕ o maior dos pluriláteros com o mesmo perímetro e o mesmo número de lados; eu digo que ele é equilátero.

Com efeito, suponhamos que não o é; mas que as rectas ΑΒ, ΒΓ são, se possível, desiguais, e transportemos a recta de junção ΑΓ de forma a construir o triângulo isósceles ΑΖΓ, de forma que as rectas ΑΖ, ΖΓ sejam iguais à soma das rectas ΑΒ, ΒΓ. Assim, como demonstramos anteriormente que o triângulo isósceles é o maior dos triângulos isoperimétricos construídos sobre a mesma base, concluímos que o triângulo ΑΖΓ é maior do que o triângulo ΑΒΓ. Acrescentemos de uma e de outra parte o quadrilátero ΑΓΔΕ; temos uma área ΖΓΔΕΑ maior do que a área maior ΑΒΓΔΕ, com o mesmo perímetro que a outra e tendo o mesmo número de lados; o que é impossível. Em consequência, ΑΒΓΔΕ é equilateral. E fica claro que o plurilátero mais equilateral é continuamente maior.





Digo também que o plurilátero ΑΒΓΔΕ é também equiângular.

Com efeito, suponhamos que não é verdade; mas que o ângulo Β é maior do que o ângulo Δ, se possível. Assim, a recta ΑΓ é também maior do que a recta ΓΒ. Assim, a recta ΑΓ é também maior do que a recta ΓΕ (pois a soma das rectas ΑΒ, ΒΓ é igual à soma das rectas ΓΔ, ΔΕ). Tracemos, sobre as rectas

[7] Esta proposição está demonstrada no opúsculo de Zénodoro, onde esta constitui a proposição II. Pappus reproduz a demonstração de Zénodoro com a mesma estrutura, mas de uma forma um pouco mais explícita.

desiguais ΑΓ, ΓΕ, os triângulos semelhantes isósceles ΑΖΓ, ΓΗΕ, determinemos a soma dos lados ΑΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΕ igual à soma dos lados ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, como o demonstremos numa proposição anterior. Em consequência, a soma dos triângulos estabelecidos ΑΖΓ, ΓΗΕ será maior do que a dos triângulos primitivos ΑΒΓ, ΓΔΕ (resultado demonstrado em proposições anteriores). E se acrescentarmos de uma e de outra parte do triângulo ΑΓΕ, ele apresentar-se-á de igual forma, o que não pode ser; assim o plurilátero ΑΖΓΗΕ será maior do que o maior plurilátero ΑΒΓΔΕ tendo o mesmo perímetro que ele. Em consequência, o plurilátero ΑΒΓΔΕ é equiângular (Mas é também equilateral); assim entre as figuras rectilíneas isoperimétricas e com o mesmo número de lados, a maior é equilateral e equiângular.

E é evidente que o círculo é a maior das figuras isoperimétricas, pois nós demonstramos que é maior do que uma figura regular, ou seja, equilateral e equiângular.

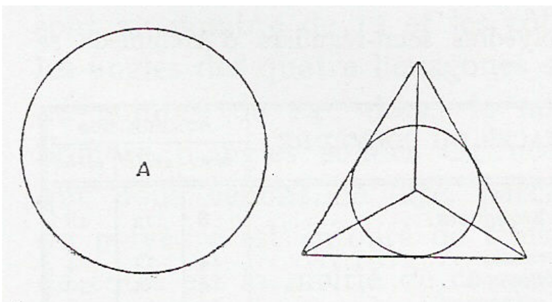
Neste segundo problema, de Geometria Plana, o autor pretende optimizar a área de um polígono dado o seu perímetro. Na demonstração o autor usa o método de redução ao absurdo, trabalhando com a decomposição da figura em triângulos.

Livro V – Proposição 18

Consideremos uma esfera com o seu centro A, e consideremos uma das cinco figuras de que falamos[8]*, com a superfície total equivalente à da esfera; eu digo que a esfera é maior.* (Tomo I; pag.276)

Vejamos a demonstração apresentada por Pappus:

Com efeito, imaginemos uma esfera inscrita num poliedro de maneira a ficar tangente que a envolvem; verifica-se que a superfície do poliedro é maior do que a superfície da esfera inscrita, pois ele envolve-a. Mas a superfície do poliedro é equivalente à superfície da esfera A; Assim a superfície da esfera A é também maior do que a superfície da esfera inscrita no poliedro, e o



raio da esfera A é também maior do que o raio da esfera inscrita. Ora, a superfície da esfera A é equivalente à superfície do poliedro; então, o cone cuja base é o círculo

[8] Os cinco sólidos platónicos: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro

equivalente à superfície da esfera A (e com a altura igual ao raio da esfera A) é maior do que a pirâmide cuja base é rectilínea equivalente à superfície do poliedro, e cuja altura é o raio da esfera inscrita no poliedro. Mas este cone é equivalente à esfera A (Este resultado está demonstrado por Arquimedes no livro De la Sphère et du Cylindre); enquanto que esta pirâmide é equivalente ao poliedro; consequentemente, a esfera A é maior do que o poliedro proposto.

Verificamos que nesta proposição, de Geometria Espacial, o autor pretende verificar que a esfera é o sólido com maior volume, comparado com os cinco sólidos platónicos com a mesma área. A demonstração é feita por construção, comparando o volume da superfície esférica com o volume do poliedro circunscrito à esfera e utilizando uma segunda esfera com a área do poliedro. Utiliza ainda um cone cuja base é equivalente à superfície da segunda esfera e a altura é o raio da segunda esfera e uma pirâmide cuja base é equivalente à superfície do poliedro e cuja altura é igual ao raio da esfera inscrita no poliedro.

A proposição apresentada a seguir não é sobre optimização, é uma proposição onde se estabelece uma comparação entre o número de bases de cada uma das cinco figuras poliédricas e o respectivo volume. Por esse motivo não apresentamos a respectiva demonstração.

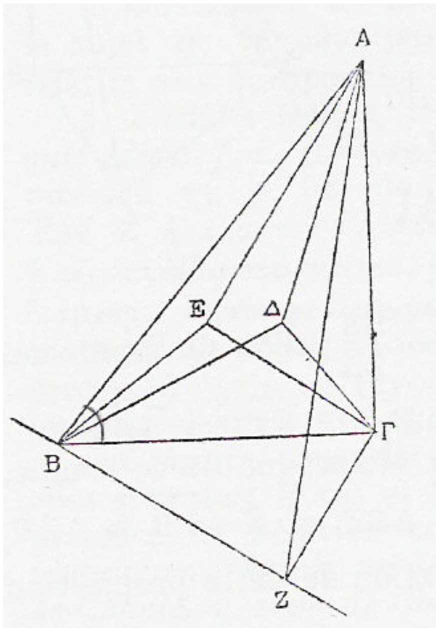
Livro V – Proposição 57

Entre as cinco figuras denominadas poliédricas, a que é mais poliédrica (com as bases mais numerosas) é continuamente maior, e reconheceremos da forma seguinte que dessas cinco figuras, é impossível encontrar outras que estejam compreendidas entre os polígonos equilaterais iguais e semelhantes. (Tomo I; pag.363)

Livro VI – Proposição 44

De um ponto elevado A, tracemos sobre o plano subjacente um segmento AB não perpendicular a esse plano, e tracemos desde o ponto A uma perpendicular a esse plano; que o intersecta no ponto Γ, tracemos também ΓB. Eu digo que o ângulo compreendido entre AB e BΓ é menor do que todos os que são estão compreendidos entre AB é qualquer um dos segmentos que passem em B contidas no plano subadjacente; e o ângulo mais próximo de este ângulo é continuamente mais pequeno do que o que está mais afastado, *e que dois ângulos iguais não se estabelecem de um e de outro lado do ângulo.* (Tomo II; pag.438)

Examinemos a demonstração apresentada por Pappus:



Com efeito, tracemos uma recta BΔ no plano subjacente; marquemos o ponto Γ, a recta ΓΔ perpendicular à outra recta, e tracemos a recta de junção AΔ. A recta AΔ é portanto perpendicular sobre a recta BΔ. E porque o ângulo compreendido entre as rectas AΓ, ΓΔ é recto, a recta ΔA é maior do que a recta AΓ; consequentemente, a razão ente a recta BA e a recta AΓ, é maior do que entre BA e AΔ. E os ângulos compreendidos entre as rectas BΓ, BA e entre as rectas BΔ, ΔA são rectos; assim, o ângulo compreendido entre as rectas BA, AΓ é maior do que o que está compreendido entre as rectas BA, AΔ (Por um lema que foi demonstrado anteriormente); assim o ângulo restante compreendido entre AB, BΓ é mais pequeno do que o ângulo compreendido entre AB, BΔ. Demonstraremos também que o ângulo compreendido entre AB, BΓ é mais pequeno do que todos os outros[9]; então, o ângulo compreendido entre AB, BΓ é o mais pequeno.

Eu digo também que o ângulo mais próximo de este ângulo é continuamente mais pequeno do que o que está mais afastado.

Com efeito, tracemos uma recta BE no plano subjacente[10]; marquemos a partir do ponto Γ a perpendicular ΓE a essa recta, e tracemos a recta de junção AE. A recta AE é perpendicular a BE. E como o ângulo recto entre BΔ, ΔΓ é igual ao ângulo recto que está entre as rectas ΓE, EB; e como o ângulo entre as rectas BΓ, ΓΔ é também maior do que o ângulo que está entre as rectas BΓ, ΓE, deduz-se que a razão entre EΓ e ΓB é maior do que a razão entre ΔΓ e ΓB; assim, a recta EΓ é maior do que a recta ΓΔ. E a recta ΓA faz ângulos rectos com cada uma das rectas ΓΔ, ΓE; assim, a recta EA é também maior do que a recta AΔ; assim a razão entre a recta BA e a recta AΔ é maior do que a sua razão com AE. E os Ângulos situados nos pontos Δ, E são rectos; assim, o ângulo compreendido

[9] Subentende-se: que estão compreendidos sobre AB é qualquer outra recta que passam em B no plano subjacente.

[10] Ou seja, uma recta BE tal que o ângulo EBΓ > ângulo ΔBΓ

entre as rectas BA, AΔ, é maior do que o que está compreendido entre as rectas BA, AE. Consequentemente, o ângulo compreendido entre as rectas AB, BΔ, é mais pequeno do que o ângulo compreendido entre as rectas AB, BE. Demonstraremos em paralelo que o ângulo mais próximo do ângulo entre as rectas AB, BΓ é continuamente mais pequeno que o que está mais afastado.

Enfim, eu digo que dois ângulos iguais não se estabelecem de um e de outro lado do ângulo.

Estabeleçamos sobre a recta ΓB, no ponto B, no plano subjacente, um ângulo compreendido sobre as rectas ΓB, BZ igual ao ângulo compreendido entre as rectas ΔB, BΓ; tracemos a partir do ponto Γ a perpendicular ΓZ sobre a recta BZ, e tracemos a recta de junção AZ. Como o ângulo compreendido entre as rectas ΓB, BΔ é igual ao que está compreendido entre as rectas ΓB, BZ; e o ângulo recto compreendido entre as rectas ΓΔ, ΔB é igual ao ângulo recto compreendido entre as rectas ΓZ, ZB, e a recta ΓB é o lado comum dos triângulos, conclui-se que a recta BΔ é igual à recta BZ e a recta ΓΔ é igual à recta ΓZ; assim, a recta AΔ é também igual à recta AZ. Então, como a recta ΔB é igual à recta BZ; e a recta BA é comum e a base ΔA é igual à base AZ, conclui-se que o ângulo compreendido entre as rectas AB, BΔ é igual ao ângulo compreendido entre as rectas AB, BZ. Demonstraremos em paralelo não estabelece outro ângulo igual ao que está compreendido entre as rectas AB, BΔ.

O ângulo compreendido entre as rectas AB, BΓ é então o mais pequeno; o ângulo que está mais próximo é continuamente mais pequeno do que o que está mais afastado, e dois ângulos iguais não se estabelecem de um e do outro lado deste ângulo.

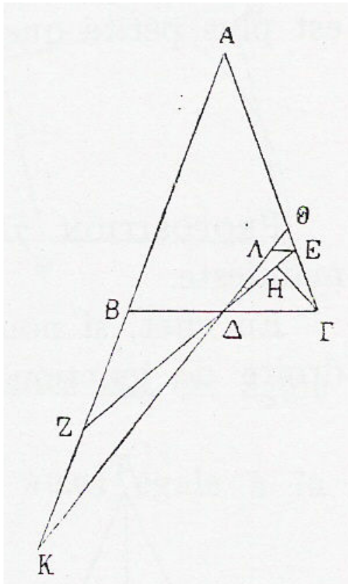
Neste problema, de Geometria Espacial, o autor pretende determinar o ângulo mínimo entre uma recta e um plano. Também esta demonstração é feita por construção, traçando perpendiculares e comparando rectas e ângulos.

Livro VII – Proposição 73

Consideremos a recta BA igual à recta AΓ, e cortemos a recta BΓ, em duas partes iguais no ponto Δ; eu digo que a recta BΓ, é a mais pequena de todas as rectas que passam pelo ponto Δ.(Tomo II; pag.608)

Vejamos a demonstração apresentada por Pappus:

Com efeito, tracemos uma outra recta EZ, e prolonguemos a recta AB até ao ponto Z; eu digo que a recta EZ é maior do que a recta ΓB. Como o ângulo



compreendido entre as rectas AB, BΓ, ou seja, o ângulo Γ, é maior do que o ângulo compreendido entre as rectas BZ, ZE, é possível cortar ao ângulo Γ um ângulo igual ao ângulo compreendido entre as rectas BZ, ZE. Que o ângulo compreendido entre as rectas ΔΓ, Γ seja igual a este último ângulo. Assim, a recta ΓΔ, está para a recta ΔH como a recta ZΔ está para a recta ΔB. Ora a recta ZΔ é maior do que a recta ΔB; então, a recta ΓΔ é também maior do que a recta ΔH. Consequentemente, como a recta ZΔ é maior do que a recta ΔB, ou seja, a recta ΔΓ, mas a recta ΔΓ é maior do que a recta ΔH, [Deduz-se que a recta ZΔ é a maior e a recta ΔH é a mais pequena]. Então, como as quatro rectas ZΔ, ΔB, ΔΓ, ΔH são em proporção, que a recta ZΔ é a maior e a recta ΔH a mais pequena, deduz-se que a recta ZH é maior do que a recta BΓ; de forma que a recta BΓ, mais pequena que a recta ZH, é mais pequena do que a recta EZ. Demonstraremos em paralelo que a recta BΓ é mais pequena do que todas as rectas que passam pelo ponto Δ. Consequentemente, a recta BΓ é a mais pequena de todas as rectas que passam no ponto Δ. Eu digo agora que aquela que está mais próxima é mais pequena do que aquela que está mais afastada.

Com efeito, tracemos transversalmente uma outra recta ΘK, e estabeleçamos o ângulo compreendido entre as rectas ΔE, EΛ igual ao ângulo K. Então, a recta KΔ é de novo, maior do que a recta ZΔ e a recta EΔ maior do que a recta ΔΛ; deste modo a recta inteira KΛ é maior do que a recta EZ. Em consequência, a recta ΘK é, maior do que a recta EZ; deste modo a recta ZE é mais pequena do que a recta ΘK. Assim, a recta BΓ, é mais pequena do que todas as rectas que passam por Δ, e aquela que está mais próxima é mais pequena do que aquela que está mais afastada.

Neste problema, de Geometria Plana, pretende-se optimizar a distância entre um ponto e uma recta. A demonstração é feita por construção e, também nesta demonstração, o autor utiliza a comparação de medidas de segmentos de recta e de ângulos para chegar à solução óptima.

2.1.2.5. CONCLUSÃO

Podemos verificar que, tal como Euclides, Pappus não tem enunciados de problemas ou exercícios, mas sim de proposições.

As proposições apresentadas e demonstradas por Pappus são problemas de Geometria Plana e Geometria Espacial, ou seja, são problemas de optimização de áreas, de volumes ou de ângulos.

Pappus não faz a distinção entre rectas, semi-rectas ou segmentos de recta e a todos denomina de rectas.

Verificamos também que, nas demonstrações, não se usa a derivada, uma vez que também, nesta altura, o conceito ainda não tinha surgido. As demonstrações são demonstrações feitas de forma construtiva ou usando a redução ao absurdo. Usa a comparação entre medidas de ângulos, medida de lados e semelhança de triângulos.

Na obra de Pappus encontramos, para além de proposições de optimização, proposições onde se estabelece uma comparação/relação entre figuras geométricas.

2.2. NASCIMENTO: SÉCULO XVI E XVII

Foi no século XVII que, por volta de 1635, começaram a surgir distintos métodos de construção de linhas tangentes a curvas. Posteriormente, no último terço do mesmo século, a combinação entre estes métodos de cálculo de tangentes e problemas sobre áreas produziram o Cálculo como um novo e unificador método de Análise Matemática.

Fermat (1601-1665) foi o autor do método de construção de tangentes a curvas. Assim, este foi o primeiro matemático a resolver problemas de máximos e mínimos, usando tangentes, mas, infelizmente, nunca explicou a base teórica do método com clareza suficiente.

Posteriormente a Fermat, realizaram estudos nesta área, outros distintos matemáticos da época. John Wallis (1616-1703) estendeu a Álgebra numa verdadeira Análise, escreveu em 1665 o livro *Arithmetica Infinitorum*. Christian Huygens (1629-1695) achou os pontos máximos, pontos mínimos e os pontos de inflexão e também conseguiu esboçar correctamente a curva $y^n = kx^n(a-x)^b$. Também Isaac Newton (1642-1727) desenvolveu estudos nesta área, tendo escrito o mais admirado tratado científico de todos os tempos, *Philosophiae Naturalis Pincipia Mathematica*. Os irmãos Bernoulli, Jacques Bernoulli (1654-1705) Jean Bernoulli (1667-1748) deram também um grande contributo nesta área. O segundo escreveu dois pequenos livros didácticos sobre cálculo diferencial e integral que foram posteriormente publicados. Pierre Varignon (1654-1722) escreveu o livro *Eclaircissement sur L'Analyse dês infinitements petits*, 1725, que era um comentário à obra escrita por L'Hôpital. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) publicou em 1684 a primeira exposição sobre Cálculo Diferencial intitulada, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentus, qua nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus*[11], fez uma abordagem geométrica baseada na abordagem cinemática de Newton.

O matemático L'Hôpital (1661-1704) escreveu a obra *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, publicada pela primeira vez em Paris, no ano de 1696. Esta foi a obra que seleccionámos para analisar neste período. Sabe-se que L'Hôpital foi aluno de Jean Bernoulli e, por esse motivo, não se sabe ao certo qual o conteúdo da obra que é, de facto, da sua autoria.

[11] Novo método para determinar máximos e mínimos, assim como tangentes, método que não entrava as expressões fraccionárias ou irracionais, acompanhado com o cálculo original que se aplica.

2.2.1. *ANALYSE DES INFINIMENT PETITS, POUR L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES* DE L'HÔPITAL

2.2.1.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Guillaume François Antoine, Marquês de L'Hôpital

Data de nascimento e falecimento do autor: 1661-1704

Título: *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1988; ACL – éditions ; Paris

Ano, editora e lugar da primeira edição: 1696; Imprimerie Royale; Paris

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Cota: 01A75/L'HO.

2.2.1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Guillaume-François-Antoine de l'Hôpital (1661-1744) nasceu em Paris, França e era de origem aristocrata. Foi oficial do exército durante a juventude, mas abandonou a carreira militar devido a problemas de visão.

Foi matemático competente e realizou trabalhos na área da Análise Matemática e da Geometria. Pertenceu ao círculo de Malebranche, onde conheceu em 1691 o jovem Johann Bernoulli.

Impressionado com o cálculo de Leibniz e com os conhecimentos que Bernoulli tinha sobre este, contratou-o para seu professor.

No início, as aulas decorriam em forma de conversação, mas l'Hôpital propôs que Bernoulli lhe proporcionasse as aulas por escrito. Essas lições e outras informações, fornecidas pelo seu professor, terão sido a base do livro de l'Hôpital. (Fernández, 2004)

2.2.1.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

A obra de l'Hôpital está dividida em 10 secções. A primeira é dedicada às regras do cálculo de diferenças. A segunda fala do cálculo de diferenças para calcular tangentes de todo o tipo de linhas curvas. A terceira trata do cálculo de diferenças para calcular máximos e mínimos. A quarta é dedicada ao cálculo de diferenças para calcular pontos de inflexão e pontos de retrocesso. A quinta trata do cálculo de diferenças para o cálculo de desenvolvimentos. Na sexta e na sétima trata do cálculo de diferenças para calcular causticas por reflexão e por refracção. A oitava trata do cálculo de diferenças para calcular pontos de linhas curvas que tocam uma infinidade de linhas dadas de posição, rectas ou curvas. A nona é dedicada à solução dos problemas que dependem dos métodos precedentes. E a décima é dedicada a uma nova forma de utilizar o cálculo de diferenças em curvas geométricas, baseado no método de Descartes e Hudde.

Em cada uma das dez secções podemos encontrar definições, proposições, corolários, problemas, regras, advertências e comentários.

Os gráficos utilizados não se encontram junto do respectivo enunciado, mas sim compiladas ao longo das várias secções.

2.2.1.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

Uma vez que esta obra de L´Hôpital é dedicada ao cálculo de diferenças, a sua estrutura é completamente distinta da estrutura das obras analisadas anteriormente.

Assim, podemos encontrar nesta obra uma secção, a secção III: *Usage du calcul pour trouver les plus grandes et les moindres appliqués, ou se réduisent les questions de maximis & minimis*[12] que é apenas dedicada a máximos e mínimos, onde podemos encontrar alguns problemas de optimização.

Entre os treze exemplos apresentados, nesta secção, por L'Hôpital, existem 7 que são problemas de optimização de uma variável. Analisemos agora cada um desses exemplos.

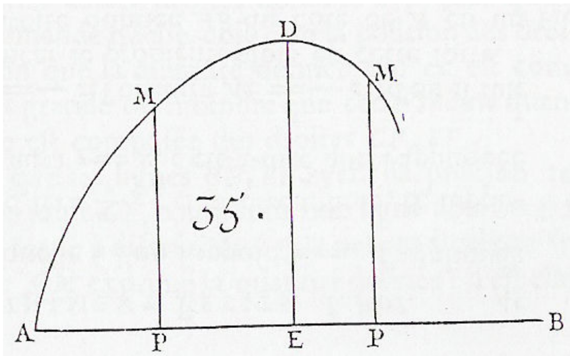
Exemplo IV

Cortar a linha dada AB num ponto E, de forma que o produto do quadrado de uma das partes AE pela outra EB, seja o maior de todos os outros produtos formados da mesma forma. (pag.44)

[12] Uso do cálculo de diferenças para calcular máximos e mínimos

Resolução:

Denominemos a medida desconhecida AE por x, e a medida dada AB por *a*; iremos ter $AE^2 \times EB = axx - x^3$, que deverá ter um máximo.



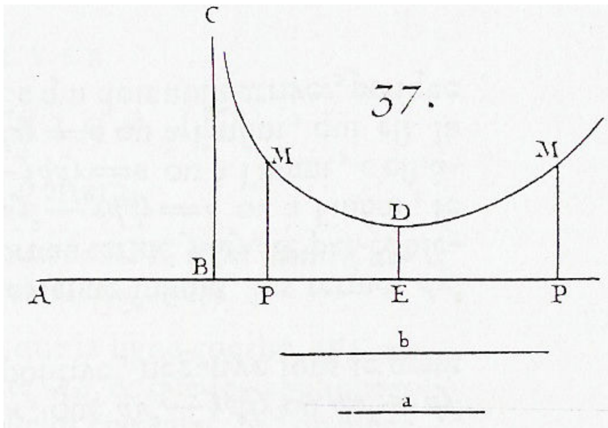
É porque iremos imaginar uma linha curva MDM, tal que a relação de aplicar MP(y) ao corte AP(x) será exprimido pela equação $y=\frac{axx\text{-}x^3}{aa}$ e iremos procurar um ponto E tal que a aplicação *ED* seja a maior de todas as semelhantes *PM*;

o que dá $dy = \frac{2axdx - 3xxdx}{aa} = 0$, de onde se tira $AE(x)=\frac{2}{3}a$.

Se virmos que, em geral $x^m \times \overline{a-x}^n$ é o maior (*m* e *n* podem ter os valores que queiramos), sai que a diferença deste produto é igual a zero ou ao infinito, o que dá $mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - n\overline{a-x}^{n-1}dx \times x^m = 0$, que dividido por $x^{m-1} \times \overline{a-x}^{n-1}dx$, dá $am - mx - xn = 0$ e $AE(x) = \frac{m}{m+n}a$.

Se *m*=2 e *n*=-1, tem-se $AE(x) = 2a$, e o problema será enunciado assim.

Prolongar a linha dada *AB* do lado de *B* até a um ponto *E*, de forma que a quantidade $\frac{\overline{AE}^2}{\overline{BE}}$ seja um mínimo, e não um máximo, porque a equação da curva *MDM* irá ser $\frac{xx}{x-a} = y$ na qual se supusermos x = *a* a aplicação *PM* que divide *BC* irá ser $\frac{aa}{0}$, ou seja infinito, e suponhamos x infinito, tem-se *y* = *x,* ou seja a aplicação será também infinita.



Se *m*=1 e *n*=-2, tem-se $AE = -a$, donde tiramos que o problema deverá ser enunciado desta forma.

Prolongar a recta dada *AB* do lado de *A* até ao ponto *E*, como a quantidade $\frac{AE \times \overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}$ é a maior de todas as outras quantidades semelhantes $\frac{AP \times \overline{AB}^2}{\overline{BP}^2}$.

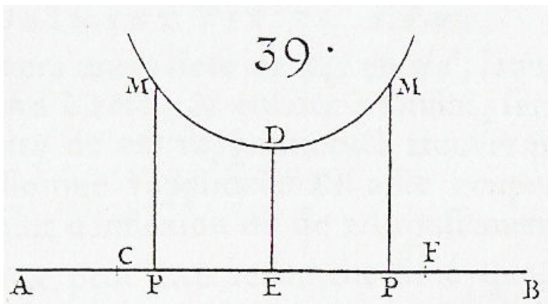
Neste problema, de Geometria Plana/Aritmética, o autor pretende optimizar um produto da medida de duas partes de um segmento. Para a resolução deste problema o autor começa por equacionar o problema, utilizando a noção de distância e calcula, de seguida, os zeros do diferencial apresentando depois o resultado.

Exemplo V

A linha recta AB é dividida em três partes AC, CF, FB, corte-se a parte do meio CF no ponto E, de forma que a razão do rectângulo AE x EB pelo rectângulo CE x EF seja a mais pequena do que todas as outras razões formadas da mesma forma. (pag.45)

Resolução:

Sejam, *AC*, *a*; *CF*, *b*; *CB*, *c*; e o desconhecido *CE*, x Tem-se $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$, e o que parte a razão de $AE \times EB$ ora será que $\frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$ deverá ser um mínimo. Isto é porque se imaginarmos uma linha curva *MDM*, tal que



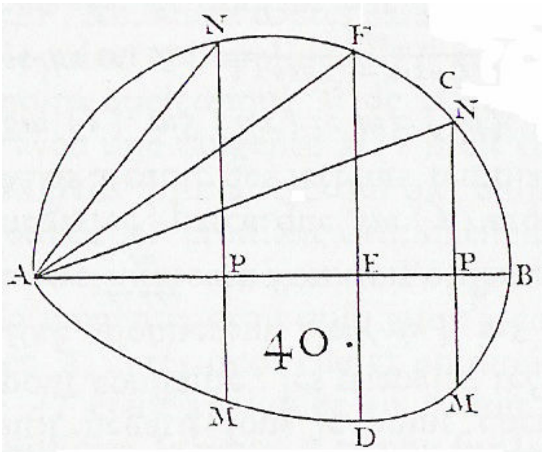
a relação da aplicação *PM (y)* com a cortada *CP (x)* é expressa pela equação $y = \frac{aac + acx - aax - axx}{bx - xx}$, a questão reduz-se a descobrir para x um valor *CE* tal que a aplicação *ED* seja a mínima de todas as semelhantes *PM*. Iremos formar (calculamos as diferenças, e dividimos por *a dx*) a igualdade $css - axx - bxx + 2acx - abc = 0$, a cujo calculo de raízes se reduz a questão. Se $c = a + b$, tem-se $x = \frac{1}{2}b$.

Verificamos que neste problema, semelhante ao anterior, o autor pretende optimizar uma razão em vez de um produto. A resolução é feita de modo idêntico à do problema anterior.

Exemplo VI

Entre todos os cones que podem ser inseridos numa esfera, determinar o que tem a maior superfície convexa. (pag.45)

Resolução:



A questão reduz-se a determinar sobre o diâmetro AB do semicírculo AFB o ponto E, de forma que traçando a perpendicular EF e ligando AF, o rectângulo $AF \times FE$ seja o maior de todos os semelhantes $NA \times NP$. Se considerar-mos que o semicírculo *AFB* faz uma revolução inteira em torno do diâmetro *AB*, fica claro que ele vai descrever uma esfera, e que os triângulos rectângulos *AEF*, *APN* irão descrever os cones inscritos nesta esfera, assim, as superfícies convexas descritas pelas cordas *AE*, *NA*, são entre elas como os rectângulos $AF \times FE, NA \times NP$.

Seja portanto a incógnita $AE = x$, a conhecida $AB = a$, tem-se, pela propriedade do círculo, $AF = \sqrt{ax}$, $EF = \sqrt{ax - xx}$; e portanto, $AF \times FE = \sqrt{aaxx - ax^3}$ que deverá ser um máximo. É porque nós imaginamos uma linha curva *MDM* tal que a relação da aplicação *MP (y)* com a cortada *AP(*x) é exprimida pela equação $\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y$; e tomamos o ponto *E*, porque a aplicação *ED* é maior do que todas as semelhantes *PM*. Temos a diferença $\frac{2axdx - 3xxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = 0$, de onde se tira $AE(x) = \frac{2}{3}a$.

Neste problema, de Geometria Espacial, o autor pretende optimizar a área de um cone inscrito numa esfera. Para resolver este problema o autor começa por observar que a determinação da área máxima do cone se reduz à determinação da área máxima do triângulo formado pelo raio, altura e geratriz do cone. Aplica depois o Teorema de Pitágoras para relacionar os lados deste triângulo com base no diâmetro da esfera. Por fim chega à função que lhe permite optimizar a área do triângulo, função irracional, calculando de seguida o diferencial e os zeros do diferencial.

Exemplo VII

Procuramos entre todos os paralelepípedos iguais a um cubo dado a^3, e que um dos seus lados é a recta dada b, aquele que tem a menor superfície. (pag.46)

Resolução:

Seja x um dos dois lados que procuramos, o outro será $\frac{a^3}{bx}$; e tomemos os planos alternativos de três lados *b*, x, $\frac{a^3}{bx}$ do paralelepípedo, a sua soma será $bx+\frac{a^3}{x}+\frac{a^3}{b}$ metade da sua superfície que deve ser um mínimo. É porque gera como de costume uma linha curva que tem como equação $\frac{bx}{a}+\frac{aa}{x}+\frac{aa}{b}=y$ tomaremos a diferença $\frac{bdx}{a}+\frac{aadx}{xx}=0$ de onde tiramos $xx=\frac{a^3}{b}$ e $x=\sqrt{\frac{a^3}{b}}$; como os três lados do paralelepípedo que satisfazem a questão, iram ser, o primeiro *b*, o segundo $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, e o terceiro $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$. De onde verificamos que os dois lados que procuramos são iguais entre eles.

Exemplo VIII

Procuramos entre todos os paralelepípedos que são iguais a um cubo dado a^3, aquele que tem a menor superfície. (pag.47)

Resolução:

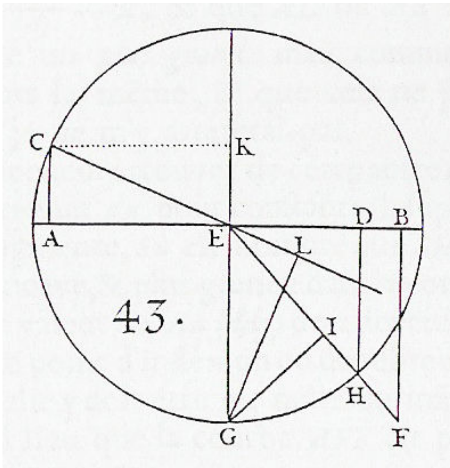
Seja x um dos lados desconhecidos, é claro pelo exemplo precedente, que os outros dois lados são, cada um deles $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$; e partamos a soma dos planos alternativos que é a metade da superfície, irá ser $\frac{a^3}{x}-2\sqrt{a^3x}$ que deverá ser um mínimo.

É porque a diferença $-\frac{a^3dx}{xx}+\frac{a^3dx}{\sqrt{a^3x}}=0$, de onde tiramos $x=a$; e por consequência os outros dois lados serão também cada um iguais a *a*; assim o cubo satisfaz a questão.

Nestes dois problemas o autor pretende determinar, entre os paralelepípedos com o mesmo volume o que tem menor área. No primeiro caso é dada a medida de um dos lados do paralelepípedo concluindo-se depois que os outros lados terão de ser iguais. No segundo problema não é dada a medida de nenhum dos lados mas utiliza-se o facto de, pela alínea anterior, dois dos lados terem a mesma medida. Na sua demonstração o autor começa por determinar a função que nos dá metade da área total somando a área de cada uma das três faces distintas, de seguida determina o diferencial e os seus zeros concluindo depois o pretendido.

Exemplo XI

Um viajante parte de um lugar C para ir para o lugar F, deve atravessar dois campos separados por uma linha recta AEB. Suponhamos que ele percorre dentro do campo do lado de C o espaço a no tempo c, e no outro lado de F o espaço b no mesmo tempo c: procuramos por que ponto E na recta AEB ele deve passar, a fim de empregar o menor tempo possível para chegar de C a F. (pag.49)



Resolução:

Se fizermos $a.CE(u) :: c.\frac{cu}{a}$ e $b.EF(z) :: c.\frac{cz}{b}$ fica claro que $\frac{cu}{a}$ exprime os tempos que o viajante emprega a percorrer a recta *CE*, e $\frac{cz}{b}$ exprime o que emprega a percorrer *EF*; assim $\frac{cu}{a}+\frac{cz}{b}$ deve ser um mínimo. De onde se segue[13] que colocando *EG* perpendicular sobre a linha *AB*; o seno do ângulo *GEC* deve estar para o seno do ângulo *GEF*, como a está para b.

Posto isto, se descrevermos do ponto *E* com centro no intervalo *EC* o círculo *CGH*, e tracemos sobre a recta *AEB* as perpendiculares *CA, HD, FB* e sobre *CE, EF* as perpendiculares *GL, GI*; tem-se $a.b :: GL.GI$. Ora $GL = AE$ e $GI = ED$ porque os triângulos rectângulos *GEL* e *ECA, GEI* e *EHD* são iguais e semelhantes entre eles, como é fácil de verificar. É porque se designarmos o desconhecido *AE*, *x*; tem-se $ED = \frac{bx}{a}$ e designando os

[13] Exemplo IX

conhecidos *AB, f; AC, g; BF, h*; os triângulos semelhantes *EBF, EDH* irão dar $EB(f-x).BF(h)::ED\left(\frac{bx}{a}\right).DH=\frac{bhx}{af-ax}$. Mas porque os triângulos rectângulos *EDH, EAC*, que tem as hipotenusas *EH, EC* iguais, tem-se $\overline{ED}^2+\overline{DH}^2=\overline{EA}^2+\overline{AC}^2$, ou seja, em termos analíticos $\frac{bbxx}{aa}+\frac{bbhhxx}{aaff-aaafx+aaxx}=xx+gg$. De forma que subtraindo as fracções e ordenando a igualdade, vem

$$\begin{array}{l} aax^4-2aafx^3+aaffxx-2aafggx+aaffgg=0 \\ -bb\quad +2bbf\quad +aagg \\ \qquad\qquad -bbff \\ \qquad\qquad -bbhh \end{array}$$

Podemos também determinar esta equação da maneira que segue, sem recorrer ao exemplo IX.

Denominemos os conhecidos *AB, f; AC, g; BF, h*; e o desconhecido *AE, x*; tem-se $a.CE(\sqrt{gg+xx})::c.\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}=au$ tempo que o viajante emprega a percorrer a recta CE. E da mesma forma $b.EF(\sqrt{ff-2fx+xx+hh})::c.\frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}=au$ tempo que o viajante emprega a percorrer a recta *EF*. O que faz $\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}+\frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}=$ a um mínimo; e portanto a sua diferença $\frac{cxdx}{a\sqrt{gg+xx}}+\frac{cxdx-cfdx}{b\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}=0$, de onde se tira, dividindo por cdx e subtraindo os incomensuráveis, a mesma igualdade que acima, então uma das raízes fornecerá a *AE* o valor que procuramos.

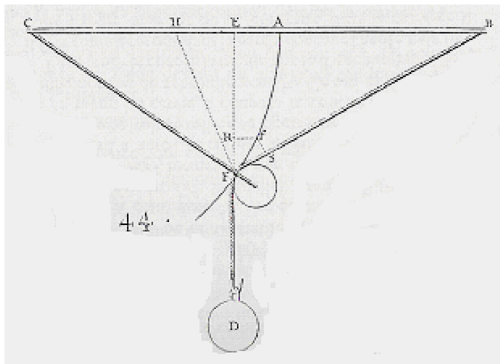
Este é um problema da vida real ligado à Física em que se pretende determinar o tempo mínimo para percorrer um percurso de duas partes que se percorrem a velocidades distintas. A demonstração é feita utilizando a relação entre ângulos e lados de triângulos rectângulos, a semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras para determinar a função a optimizar. Determinando por fim o diferencial e os respectivos zeros.

Exemplo XII

Seja uma roldana F que pende livremente no extremo de uma corda CF fixa em C, com um peso D suspenso da corda DFB que passa por cima da roldana F, e que está fixa em B, de forma que os pontos C, B situados na mesma linha horizontal CB. Suponhamos que a roldana e as cordas não sofrem nenhuma gravidade, perguntamos em que ponto o peso D ou a roldana F deve parar. (pag.51)

Resolução:

É claro, pelos princípios da Mecânica que o peso *D* irá descer o mais baixo que lhe for possível, em baixo da horizontal *CB*; donde se deduz que a linha que tem o peso *DFE* tem um máximo. É porque denominando os dados *CF, a; DFB, b; CB, c;* e o desconhecido *CE, x*; tem-se $EF=\sqrt{aa-xx}$, $FB=\sqrt{aa+cc-2cx}$ e $DFE=b-\sqrt{aa+cc-2cx}+\sqrt{aa-xx}$ que deve ter um máximo; e partindo a sua diferença $\frac{cdx}{\sqrt{aa+cc-2cx}}-\frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}}=0$ de onde se tira $2cx^3-2ccxx-aaxx+aacc=0$, e dividindo por $x-c$, vem $2cxx-aax-aac=0$, então uma das raízes fornece a *CE* um valor tal que a perpendicular *ED* passa pela roldana *F* e o peso *D* que estão em repouso[14].



Neste problema Físico o autor pretende optimizar uma distância. Nesta resolução o autor aplica conhecimentos da Mecânica e o Teorema de Pitágoras para optimizar o segmento *DFE*. Por fim o autor determina o diferencial da função e os respectivos zeros.

Exemplo XIII

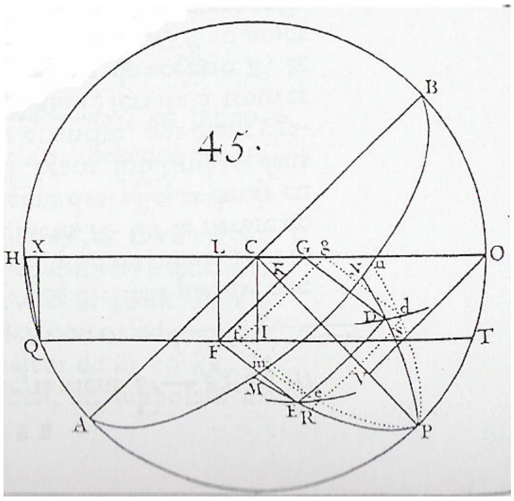
Dada a elevação do pólo, achar o dia com o menor crepúsculo. (pag.52)

Resolução:

Seja *C* o centro da esfera; *APTOBHQ* o meridiano; *HDdo* o horizonte; *QEeT* o circulo corpuscular paralelo ao horizonte; *AMNB* o equador; *FEDG* a porção da paralela ao

[14] Não apresentamos a outra parte da demonstração uma vez que envolve equações com mais do que uma variável, tema que não faz parte do nosso trabalho de investigação.

equador, que descreve o Sol no dia do mínimo crepúsculo, contido entre os planos do horizonte e o circulo crepuscular; *P* o pólo astral;



PEM, PDN os quartos dos círculos de declinação. O arco *HQ* onde *OT* a partir do meridiano compreendido entre o horizonte e o circulo crepuscular, e o arco *OP* de elevação do pólo são dados; e consequentemente os seus senos rectos *CI* ou *FL* ou *QX*, e *OV*.

Procuramos os senos *CK* do arco *EM* ou *DN* da declinação do Sol no momento em que descreve a paralela *ED*.

Se imaginarmos uma outra porção *fedg* duma paralela ao equador, infinitamente próxima de *FEDG*, com os quartos de círculo *Pem, Pdn*, é claro que o tempo que o Sol emprega a percorrer o arco *ED*, deve ser um mínimo, a diferença do arco *MN* que é a medida, e que desvia *mn* no momento em que *ED* desvia *ed*, deve ser nulo; de onde se verifica que os arcos pequenos *Mm* e *Nn*, e por consequência os arcos pequenos *Re, Sd* serão iguais entre eles. Ora os arcos *RE, SD* estão compreendidos entre as mesmas paralelas *ED, ed*, são também iguais, e os ângulos em *S* e em *R* são rectos. Assim os pequenos triângulos rectângulos *ERe, DSd* (que consideramos como rectilíneos[15] porque os seus lados são infinitamente pequenos, serão iguais e semelhantes; e por consequência as hipotenusas *Ee, Dd* irão ser também iguais entre elas.

Posto isto, as rectas *DG, EF, dg, ef* secções comuns dos planos *FEDG, fedg* paralelos ao equador com o horizonte e o círculo crepuscular, serão perpendiculares sobre os diâmetros *HO, QT*, pois os planos de todos estes círculos são perpendiculares cada um sobre o pano do meridiano, e as pequenas rectas *FG, fg* são paralelas. Assim $\sqrt{\overline{Dd}^2 - \overline{Gg}^2}$ ou $DG - dg = \sqrt{\overline{Ee}^2 - \overline{Ff}^2}$ ou $fe - FE$. Ora é claro pelo que ficou demonstrado

[15] Secção I, Art. 3: On demande qu'une ligne courbe puísse être considérée comme l'assemblage d'une infinité des lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce que est la même chose) comme un poligône d'un nombre infini de cotés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils sont entr'eux, la courbe de la ligne. On demande par exemple que la proportion de courbe Mm e l'arc de cercle MS puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle mSM puisse être censé rectiligne.

no artigo 50[16] que se metermos à descrição dentro de um semi-circulo duas aplicações infinitamente próximas, o pequeno arco que elas formam, será à sua diferença, como o raio está para o corte depois do centro; o que dá aqui (por causa dos círculos *HDO, QET)* $CO.CG :: Dd$ ou $Ee.DG - dg$ ou $fe - FE :: IQ.IF :: CO + IQ$ ou $OX.CG + IF$ ou GL. Mas por causas dos triângulos rectângulos semelhantes *CVO, CKG, FLG*, tem-se $CO.CG :: OV.GK$. E $GK.GL :: CK.FL$ ou QX. Então $OV.CK :: OX.XQ :: XQ.XH$ pela propriedade do círculo: ou seja se tomarmos *QX* pelo raio ou seno total no triângulo rectângulo *QXH*, então o ângulo *HQX* é de 9 graus porque os Astrónomos fazem o arco *HQ* de 18 graus, teremos como o seno total está para a tangente de 9 graus, da mesma forma o seno da elevação do pólo está para o seno de inclinação astral do Sol no tempo de mais pequeno crepúsculo. Donde se conclui que se subtrairmos 0,8002875 do logaritmo do seno de elevação do pólo, o resto será o logaritmo do seno procurado.

Este é um problema muito diferente dos anteriores. É um problema de Astronomia com uma demonstração feita por construção. Na demonstração o autor utiliza noções de Astronomia, relações entre ângulos e lados de triângulos e a semelhança de triângulos.

2.2.1.5. CONCLUSÃO

Esta é a primeira obra que analisamos em que se usa o Cálculo Diferencial para calcular o máximo ou o mínimo de uma qualquer função.

Nela enuncia os problemas de optimização como exemplos, apresentando de seguida a respectiva resolução. As ilustrações estão compiladas em páginas posteriores e não apresentadas ao longo de texto.

Para fazer a sua resolução o autor começa por equacionar a situação posta. Depois calcula a derivada da função e os zeros da derivada. Por fim conclui, que nesse ponto, a função tem um máximo ou um mínimo e apresenta a resposta ao problema posto.

Verificamos ainda que, na referida obra, são abordados os problemas de Geometria Plana, problemas de Geometria Espacial, problemas Aritméticos e também

[16] Exemple III.: Soit une demi roulette AMF, dont la base BF est moindre que la demi circonférence ANB du cercle générateur que a pour centre le point C. Il faut déterminer le point E sur le diamètre AB, en sorte que l'appliquée ED soit la plus grande qu'il est possible.

problemas da área da Física e da Astronomia. Pretende-se optimizar distâncias, áreas, produtos ou tempo.

Concluímos, assim, que alguns dos exemplos são problemas da vida real.

2.3. CONSOLIDAÇÃO: SÉCULO XVIII

No século XVIII deu-se a consolidação do Cálculo Diferencial e surgiram também alguns matemáticos relacionados com o nosso tema.

Leonhard Euler (1707-1783) já utilizava as notações que se usam actualmente. Escreveu a obra *Introductio in analysin infinitorum* (1748) que foi um dos livros didácticos mais conhecidos. Publicou ainda a obra *Mechanica* (1736), *Institutiones calculi diffferentialis* (1755) e *Institutiones calculi integralis* (1768-70).

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) também escreveu algumas obras nesta área. Publicou a obra *Lectures on Elementary Mathematics* e a obra *Théorie des fonctions analytiques*. Também as obras de Lagrange foram editadas noutras línguas, entre elas a Língua Portuguesa.

Etienne Bézout (1730-1783) escreveu a obra *Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine* (1764). Esta é composta de seis volumes dedicando-se cada um deles a temas distintos da Matemática. Em 1770-72 teve várias edições, sendo traduzida para outras línguas. É esta que vamos analisar neste período.

2.3.1. *COURS DE MATHÉMATIQUE* DE BÉZOUT

2.3.1.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Etienne Bézout

Data de nascimento e falecimento do autor: 1730 – 1783

Título: *Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine*

Ano, editora e lugar da primeira edição: 1764, Imp. H. Offray: Avignon

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1775

Localização da obra consultada: Biblioteca Joanina da Universidade de Coimbra. Cota: 4-2-7-27

2.3.1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Etiennne Bézout foi um Matemático francês, que nasceu em Nemours, em 1730 e faleceu em Paris em 1783. Ingressou na Academia das Ciências aos vinte e oito anos, distinguindo-se sempre pelo seu talento privilegiado e vasta cultura.

Foi autor de uma importante obra, parte da qual vamos analisar: *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine, avec un traité de navigation* (1764-69), e *Cours de mathématiques à l'usage du corps royal de l'artillerie*. (1770-72). 0s livros de Bézout foram durante muito tempo adoptados nas escolas portuguesas, e em Coimbra foram publicadas traduções de algumas das suas obras, feitas por Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá: *Elementos de Geometria, Elementos de Trigonometria Plana, Elementos de Análise e Elementos de Aritmética*.

2.3.1.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

A obra *Cours de mathématiques (, a l'usage dés grades du pavillon et de la marine)* é composta por 6 volumes, abarcando cada um, temas distintos na área da Matemática. O primeiro volume, *Eléments d'Arithmétique*, trata de Aritmética, o segundo, *Contenant les Eléments de Géométrie, la Trigonométrie Rectiligne & la Trigonométrie Sphérique*, é dedicado à Geometria e à Trigonometria, o terceiro, *Contenant l'Algèbre & L'application de cette Science à l'Arithmétique & á la Géométrie*, contempla o cálculo de quantidades algébricas e a aplicação da Álgebra à Aritmética e à Geometria, o quarto, *Contenant les Príncipes Generaux de la Mechanique*, *precedes dês Príncipes de Calcul que servent d'introductions aux Sciences Physico-Mathematiques*, é dedicado, na primeira parte, ao cálculo diferencial e integral e, na segunda, aos princípios gerais da Mecânica, o quinto, Suite de la quatrieme partie, contenant lápplication de la Mechanique, à differents cas de mouvement & d'Equilibre, é uma continuação do quarto volume e contém as aplicações da Mecânica a diferentes tipos de movimento e ao equilíbrio, por fim, o sexto desenvolve o tratado de navegação.

É no quarto volume, dedicado ao Cálculo Diferencial e Integral e aos Princípios Gerais da Mecânica, que encontramos, na secção dedicada ao Cálculo Diferencial, os problemas de Máximos e Mínimos. Vejamos então, como está estruturada esta secção:

Calculo Diferencial

Das diferenciais segundas e terceiras

Das diferenciais das diferentes quantidades afectas de senos, cossenos

Das diferenciais logarítmicas

Das diferenciais de quantidades exponenciais

Aplicações das regras precedentes

Às subtangentes, Tangentes, Normais das curvas

Aos limites das linhas curvas, e em geral aos limites das quantidades e aos ***problemas de máximos e mínimos***

Dos pontos múltiplos

Dos pontos de inflexão

Reflexão sobre Máximos e Mínimos

Dos pontos de reversão, e das diferentes espécies de contacto dos ramos de uma curva

Dos raios da curvatura ou da Evoluta

Outras aplicações do Cálculo Diferencial.

Todas as imagens que são referidas ao longo do volume encontram-se compiladas no final do livro. Estas estão distribuídas por várias páginas maiores do que as páginas com o texto e dobradas.

2.3.1.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

É na parte do capítulo sobre Cálculo Diferencial, dedicada às aplicações das regras precedentes, que encontramos os problemas de Máximos e Mínimos.

Esta parte começa por falar dos limites das linhas curvas e das quantidades. Segue-se a explicação do método para calcular máximos e mínimos de uma função ao qual dá o nome *de Maximis & Minimis*. Depois, apresenta cinco problemas de optimização e a respectiva resolução.

Analisemos agora cada um desses problemas, bem como a resolução apresentada.

Problema I

Dividir um número dado em duas partes tais, que o seu produto seja um máximo.

Resolução:

Representando uma dessas partes por x, a outra será a – x, e o produto de ambas será $ax - xx$; expressão que é susceptível de maximum, como veremos se substituirmos sucessivamente o e a em lugar de x. Supondo pois $y = ax - xx$, teremos $\frac{dx}{dy} = \frac{l}{a - 2x}$. Se igualarmos o numerador a nada, virá $l = 0$, que é absurdo; logo não podemos achar o maximum, senão igualando o denominador a nada. Fazendo isso, vem $a - 2x = 0$, e consequentemente $x = \frac{1}{2}a$ que reduz o produto a $\frac{1}{4}a^2$. Logo de qualquer modo que se divida um número em duas partes, o produto delas será o maior possível, quando cada uma for metade do mesmo númerop; e consequentemente o rectângulo formado pelas partes de uma linha a será o maior possível, quando cada uma delas for $\frac{1}{2}a$.

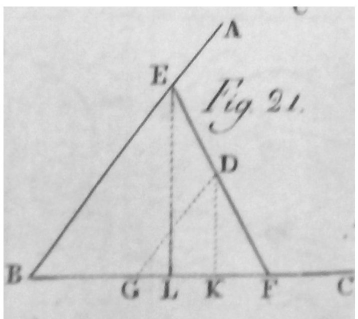
De seguida o autor apresenta o caso geral:

Dividir um número dado a em duas partes tais, que o produto de uma potência determinada de uma delas pela mesma ou outra potência de outra parte seja a maior possível.

Este é um problema Aritmético em que se pretende optimizar o produto das duas partes de um número. Na sua resolução o autor utiliza a noção de distância, para indicar um dos números em função do outro, para depois equacionar o problema em ordem a uma das variáveis. De seguida calcula o diferencial e conclui que o zero é então o máximo. Refere ainda que o produto das duas partes de um número é máximo quando cada uma das partes for metade do número. O autor deduz ainda que um rectângulo terá área máxima, dada a soma das duas medidas, quando estas forem iguais.

Problema II

Achar entre todas as linhas que se podem tirar por um mesmo ponto D, dentro do ângulo conhecido ABC (fig. 21), qual é a que forma com os lados deste ângulo o menor triângulo possível.



Resolução:

Havendo pelo ponto D conduzido DG paralela a AB, DK perpendicular sobre BC, uma recta qualquer EF, tire-se pelo ponto de encontro E de EF com AB a linha EL paralela a DK. Seja EG = *a*, DK = *b*, e a base BF do triângulo BEF = x. Bem se vê que passado um certo termo, quanto mais crescer BF, tanto mais crescerá o triângulo, e que pelo contrário se BF diminuir, também o triângulo diminui, mas só até certo limite; porque se BF viesse a ser quase igual a BG, a recta EDF seria quase paralela a AB, isto é, estaria próxima a confundir-se com GD, e então o triângulo seria extremamente grande: há pois um valor de BF entre x = *a* e x = ∞, que dá o menor triângulo possível. Para o achar, busque-se a expressão geral do triângulo BEF.

Os triângulos semelhantes BEF, GDF dão GF : BF :: DF : EF, e os dois DKF, ELF dão DF : EF :: DK : EL; logo GF(x - *a*) : BF(x) :: DK(*b*) : EL = $\frac{bx}{x-a}$; será pois a superfície do triângulo BEF ou $\frac{EL.BF}{2}=\frac{4bx^2}{(x-a)}$. Assim diferenciando $\frac{x^2}{x-a}$, acharemos x = 2*a* por um cálculo já feito anteriormente. Logo se tomarmos BF = 2BG, a linha FDE que se tirar por D, dará o menor triângulo procurado EBF = 2*ab*.

Este é um problema de Geometria Plana onde se pretende optimizar a área de um triângulo. Aplica-se a semelhança de triângulos para escrever a equação em ordem a uma só variável e depois determina-se o diferencial e os respectivos zeros.

Problema III

Achar o maior paralelepípedo de todos os que têm a mesma superfície e a mesma altura.

Resolução:

Seja *h* a altura do paralelepípedo, *ce* a sua superfície, *x* e *y* os dois lados do rectângulo que lhe serve de base. A superfície total compõe-se de seis rectângulos, dos quais dois tem cada um a altura *h* e a base *x*, dois tem a altura *h* e a base *y*, e os dois últimos tem a base x e a altura *y*; assim a superfície total $ce=2hx+2hy+2xy$ que é constante. Como a solidez *hxy* deve ser maior do que todas as da mesma superfície, teremos $xdy + ydx = 0$. Tirando desta equação o valor *dx*, e substituindo-o na expressão diferencial da superfície $2hdx + 2hdy + 2xdy + 2ydx = 0$, acharemos $y = x$; logo a base deve ser um quadrado. Para ter o lado deste quadrado, poremos em lugar de *y* o seu valor x na equação $2hx + 2hy + 2xy = ce$, e teremos $4hx + 2x^2 = ce$, que dá $x = -h \pm \sqrt{hh + \frac{1}{2}ce}$; excluindo pois a raiz negativa, que é inútil no caso presente, será $-x \pm \sqrt{hh + \frac{1}{2}ce}$ o valor conveniente de x.

Neste problema de Geometria Espacial pretende-se optimizar o volume de um paralelepípedo dada a sua área e a sua altura. Utiliza a fórmula da área do paralelepípedo para determinar uma das medidas da base em função da outra medida. Para a sua resolução o autor determina os diferenciais e os zeros do diferencial. Como obteve dois zeros para o diferencial, exclui o negativo concluindo que o outro zero é o valor pretendido.

Querendo agora saber *qual deve ser a altura h, para que o paralelepípedo tenha maior solidez entre todos os da mesma superfície*, advertiremos, que como a base deve ser um quadrado xx, a solidez irá exprimir-se por *hxx*. Diferenciando pois esta expressão na hipótese de *h* e x serem variáveis, e igualando o diferencial a nada, teremos $dh = -\frac{2hdx}{x}$. Substituindo este valor em $4hdx + 4xdh + 4xdx = 0$, que exprime então a outra condição de ser constante a superfície, acharemos *h* = *x*; logo o paralelepípedo procurado deve ser um cubo, porque a altura *h* deve ser igual ao lado do quadrado, que serve de base. Para achar agora o lado desse cubo, substitua-se x em lugar de *h* na equação $4hx + 2x^2 = ce$ e virá $6x^2 = ce$, que dá $x = \sqrt{\frac{ce}{6}}$. Logo entre todos os paralelepípedos de superfície constante, o que tem maior capacidade é o cubo, cujo lado é a raiz quadrada da sexta parte da mesma superfície.

Nesta parte o autor prova que o paralelepípedo com maior volume, dada a sua área, é o cubo.

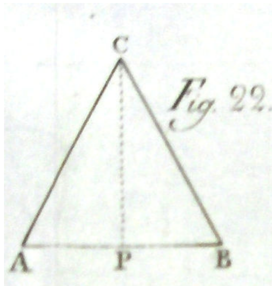
De seguida o autor apresenta a seguinte nota:

Procedemos do mesmo modo para achar o cilindro recto de maior capacidade entre todos os da mesma superfície.

Problema IV

Achar entre todos os triângulos do mesmo perímetro e base, qual é o que tem maior superfície.

Resolução:



Tire-se a perpendicular CP (Fig. 22), e seja a base AB = a, o perímetro do triângulo ABC = c, AP = x, CP = y; será $PB = a - x$, $AC = \sqrt{xx + yy}$, e $CB = \sqrt{yy + (a - x)^2}$. Logo teremos o perímetro ou $c = a + \sqrt{xx + yy} + \sqrt{yy + (a - x)^2}$, e a superfície $= \frac{ay}{2} =$ Max. Esta última condição dá $\frac{ady}{2} = 0$, logo $dy = 0$; e substituindo este valor na primeira equação depois de diferenciada, a saber $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{ydy - (a - x)dx}{\sqrt{yy + (a - x)^2}} = 0$, virá $x\sqrt{yy + (a - x)^2} = (a - x)\sqrt{xx + yy}$, isto é $xx = (a - x)^2$, que dá $x = \frac{1}{2}a$, por onde se mostra, que o triângulo deve ser isósceles. Levantemos pois uma perpendicular no meio de AB, e havendo descrito do ponto B com o raio igual à metade da diferença entre o perímetro c e a base a um arco, que corte a perpendicular em C, se tirarmos CB e CA, teremos o triângulo de maior superfície entre todos os isoperimétricos, construídos sobre a mesma base.

Neste problema o autor prova que o triângulo de maior área, dado o seu perímetro e a medida da base é o triângulo isósceles. Na sua resolução o autor aplica a noção de distância e o Teorema de Pitágoras para escrever a função a optimizar em ordem a uma só variável. Também esta resolução é feita usando diferenciais e calculando os respectivos zeros e a função que se obtém é uma função irracional.

De seguida, o autor apresenta a forma como resolver o seguinte problema:

Saber em geral, qual é o triângulo de maior superfície entre todos os isoperimétricos.

O autor apresenta ainda algumas notas/observações acerca da Resolução, bem como outras formas de demonstrar.

Explica ainda a forma de resolver do seguinte problema:

Dividir uma quantidade a em três partes x, y, a – x -y, tais que o produto de todas seja o maior possível.

Resolução:

Teremos $d\left[xy\left(a-x-y\right)\right]=0$. Porem em lugar de diferenciar de uma vez em ordem às duas variáveis x, y, diferenciamos somente em ordem a x, e virá $a-2x-y=0$, donde se conclui $x=\frac{1}{2}(a-y)$; valor que muda o produto em $\frac{1}{4}y(a-y)^2$. Diferenciando agora relativamente a y, acharemos $(a-y)^2=2y(a-y)$, que dá $y=\frac{1}{3}a$; logo as partes devem ser iguais, cada uma, a um terço da quantidade proposta.

É ainda apresentada uma outra forma de demonstrar este mesmo resultado.

Problema V

Achar entre todos os quadriláteros isoperimétricos, qual é o que tem maior superfície.

Resolução:

Abaixem-se dos ângulos C e D sobre o lado AB as perpendiculares DE, CF, e conduza-se por D a recta DK paralela a AB. Seja AE = s, DE = t, AF = u, CF = x, BF = y, o perímetro do quadrilátero igual a a; e os triângulos rectângulos darão $DA=\sqrt{ss+tt}$, $DC=\sqrt{(s+u)^2+(x-t)^2}$, $CB=\sqrt{xx+yy}$; logo será $a=u+y+\sqrt{ss+tt}+\sqrt{(s+u)^2+(s-t)^2}+\sqrt{xx+yy}$. Por outra parte $ABCD=DEFC+CFB-DAE=(t+x)\frac{s+u}{2}+\frac{xy}{2}-\frac{st}{2}$; logo devemos diferenciar esta quantidade, e a equação precedente. Porém como os radicais fariam o calculo subsequente muito complicado, suponhamos todos três constantes, o que dará … $d\sqrt{ss+tt}=0$ ou $sds+tdt=0$ … $(s+u)(ds+du)+(x-t)(dx-dt)=0$ … $xdx+ydy=0$. A equação do perímetro sendo diferenciada nesta suposição dá $du+dy=0$, e a condição do máximo dá $udt + sdx + udx + tdu + xds + xdu + xdy + ydx = 0$. Destas cinco equações diferenciais a primeira dá $ds = -\frac{tdt}{s}$, a terceira dá $dx = -\frac{ydy}{x}$ e a quarta dá $dx = -dy$. Substituindo estes valores na segunda e na quinta, teremos as equações … $-(tdt + sdy)(u + s)x - (ydy + xdt)(x - t)s = 0$ … $suxdt - suydy - ssydy - tsxdy - xxtdt - syydy = 0$; as quais mostram que $s = 0$; logo o ângulo DAB deve ser recto, e conseguintemente a equação do perímetro se torna em $a = u + y + t + \sqrt{u^2 + (x-t)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}$, e a expressão da superfície em $(t + x)\frac{u}{2} + \frac{xy}{2}$.

Diferenciemos pois supondo somente constantes os dois radicais; teremos … $udu + (x - t)(dx - dt) = 0$ … $xdx + ydy = 0$ … $dt + du + dy = 0$ … $u(dt + dx) + (t + x)du + xdy + ydx = 0$.

A segunda destas equações dá $dy = -\frac{xdx}{y}$; a terceira dá $dt = -du - dy = \frac{xdx - ydu}{y}$; e substituindo na primeira e na quanta, teremos as equações … $ydu + (x - t)(ydx - xdx + ydu) = 0$ … $u(xdx - ydu + ydx) + (t + x)ydu - x^2dx + y^2dx = 0$, as quais mostram que $y = 0$; logo o ângulo CBA deve ser recto, e conseguintemente a equação do perímetro se reduz a $a = t + u + x + \sqrt{u^2 + (x-t)^2}$, e a expressão da superfície $a(t + x)\frac{u}{2}$.

Diferenciemos agora, não supondo constante senão o radical; teremos … $udu + (x - t)(dx - dt) = 0$ … $dt + du + dx = 0$ … $u(dt + dx) + (t + x)du = 0$. A segunda dá $dt = -dx - du$; substituindo pois este valor nas outras duas, e combinando-as virá $x = t$; logo a equação do perímetro se reduz a $a = 2t + 2u$, e a expressão da superfície a ut.

Estas duas expressões sendo diferenciadas dão $dt + du = 0$ … $udt + tdu = 0$; logo $t = u$. Concluiremos pois, que as linhas AB, AD, DC, CB são iguais entre si; e como o ângulo A deve ser recto, o quadrilátero procurado necessariamente será um quadrado.

Neste problema o autor mostra que o quadrilátero de maior área, dado o seu perímetro, é o quadrado. Esta resolução é mais complexa do que as dos problemas anteriores. O autor começa por decompor o quadrilátero em três triângulos rectângulos e um rectângulo, sendo que o perímetro do quadrilátero será então a soma das hipotenusas dos três triângulos mais o comprimento do rectângulo. Aplica então o Teorema de Pitágoras para determinar as medidas das hipotenusas, depois apresenta o perímetro do quadrilátero e a função a optimizar. Utilizando os diferenciais destas duas expressões chega ao diferencial do qual pretende determinar os zeros concluindo, finalmente, que o quadrilátero de maior área, dado o seu perímetro é o quadrado.

O autor ainda apresenta a seguinte observação/generalização:

Esta propriedade podia achar-se com mais facilidade; mas não satisfaríamos então ao que nos propusemos, isto é, a mostrar de que modo a liberdade de tomar esta ou aquela quantidade por constante facilita o cálculo em muitos casos. Se aplicarmos mesmo aos outros polígonos, acharemos que em geral de todas as figuras isoperimétricas do mesmo número de lados, o polígono regular desse número de lados é o que tem maior superfície; donde se segue, que de todas as figuras isoperimétricas o círculo é a que tem maior superfície.

2.3.1.5. CONCLUSÃO

Nesta obra, Bézout designa os problemas de optimização como problemas, o que não acontecia nas obras analisadas anteriormente. Estes são seguidos das respectivas resoluções.

Para além dos problemas apresentados, o autor aborda ainda, em algumas situações, casos particulares ou generalizações dos problemas apresentados. Estes nem sempre apresentam Resolução.

Os problemas apresentados são Aritméticos, de Geometria Plana e de Geometria Espacial. Pretende-se optimizar áreas, volumes ou produtos.

Também nesta obra se utiliza o Cálculo Diferencial para resolver os problemas de máximos e mínimos.

Para fazer a resolução, o autor começa por equacionar o problema, de seguida calcula a respectiva derivada e os zeros desta. Por fim apresenta a resposta ao respectivo problema.

2.4. INSTITUCIONALIZAÇÃO: SÉCULO XIX

O século XIX é considerado o período de Ouro da Matemática, uma vez que se produziu mais durante este século do que em todas as épocas precedentes.

Neste espaço de tempo encontramos também vários autores relacionados com o nosso tema de investigação. São, por norma, professores universitários na área do Cálculo Diferencial e Integral que publicam os seus apontamentos. Muitos destes livros eram depois traduzidos e usados como manuais noutras universidades e até noutros países. De todos iremos seleccionar apenas dois para analisar detalhadamente. Vejamos alguns desses autores e quais as obras que escreveram.

Silvestre-François Lacroix (1765-1843) publicou a obra *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* (1806). Augustin-Louis Cauchy (1789-1875) foi um importante autor de livros didácticos: *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1821), *Résumé dés leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) e *Leçons sur le calcul différentiel* (1829). Um dos seus maiores sucessores foi Jacques Charles François Sturm (1803 – 1855) igualmente autor de um livro didáctico, *Cours d'Analyse* (1857). Algum tempo depois Joseph Alfred Serret (1819-1885), professor posterior a Sturm, publicou a obra *Cours de Calcul Differenciel et Integral* (1878). Bernhard Riemann (1826-1866) também desenvolveu alguns trabalhos nesta área e os seus escritos estão compilados na obra *Oeuvres mathématiques de Riemann* (1898). Por fim, Henri Lebesgue (1875-1941), que foi professor, e que editou as suas lições, sendo a primeira obra *Leçons sur séries trigonométriques* (1903) e a outra *Leçons sur l'intégration et la recherche dés fonctions primitives* (1904).

Seleccionámos, nesta parte, para analisar, a obra de Sturm e a de Serret.

2.4.1. *COURS D'ANALYSE DE L´ÉCOLE POLYTECHNIQUE* DE STURM

2.4.1.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Jacques Charles François Sturm

Data de nascimento e falecimento do autor: 1803 – 1855

Título: *Cours D'Analyse de L´École Polytechnique*

Ano, editora e lugar da primeira edição: 1857, Gauthier-Villars: Paris

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1884, Gauthier-Villars: Paris

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Cota: 26-01 STU V.1 7 Ed.

2.4.1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Jacques Charles François Sturm nasceu em Genebra, Suiça, em 1803. Provem de uma família Protestante que lhe deu uma boa educação. O seu pai Jean-Henri Sturm era professor de aritmética e faleceu quando Sturm tinha 16 anos. Nessa altura, deixou de estudar Humanidades e começou a estudar Matemática na Academia de Genebra com Simons Lhuinier, em 1821, que, de imediato, reconheceu em Sturm um génio matemático. Entretanto Lhuinier reformou-se e ficou como seu sucessor Jean Jacques Schaub, pessoa que inspirou e ensinou Sturm e também o ajudou financeiramente, na Academia, pois, desde a morte do seu pai que a família de Sturm estava com consideráveis dificuldades económicas.

Quando deixou a Academia, Sturm foi apontado como tutor do filho mais novo de Mme de Staël, no Châteaux de Coppet, perto de Genebra. Terminou os seus estudos em Maio de 1823 e, como tinha muito tempo livre, começou a estudar, a investigar e a escrever artigos sobre Geometria, que publicou no *Annales de mathématiques purés et appliqués* de Gergonne.

Pelo final de 1823 a família mudou-se para passar uma temporada em Paris e Sturm acompanhou-a. Chegado à cidade parisiense, foi inserido nos círculos científicos pela família e onde conheceu Lalace, Poisson, Fourier, Gay-Lussac, Ampere, entre outros.

Em Maio de 1824 regressou a Geneva, mas em Dezembro de 1825 regressou de novo a Paris. Em 1829 publicou um dos seus artigos mais famosos *Mémoire sur la résolution des équations numériques.*

Inicialmente não foi fácil para Sturm conseguir emprego, uma vez que era estrangeiro e Protestante. Mas após a revolução de Julho de 1830, Sturm conseguiu ser nomeado professor de Matemática, no Collège Rollin. Em 1836 foi nomeado para a Académie des Sciences. Durante estes anos publicou alguns resultados importantes acerca de Equações Diferenciais.

Entre 1838 e 1840 foi professor de Análise e Mecânica, na École Polytechnique, em Paris e sucedeu a Poisson, na cadeira de Mecânica, da Faculte des Sciences em Paris.

Durante Cerca de 10 anos deu excelentes aulas, mas desejava dar aos seus alunos os melhores cursos possíveis pelo que, despendia, muito tempo, a preparar as suas lições para os cursos de Cálculo Diferencial e Integral e de Mecânica Racional. Estes cursos, intitulados Cours D'Analyse de l'École Polytechnique 2 Vol. (1857-63) e Cours de mécanique de l'École Polytechnique 2 Vol. (1861), ambos publicados postumamente, tornaram-se nos textos mais usados.

Apesar de não ter muito tempo para pesquisar, continuava a oferecer contribuições importantes para a Geometria Infinitesimal, Geometria Projectiva e Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies e Óptica Geométrica.

A partir de 1851 começou a ficar com problemas cardíacos e acabou por falecer em 1855.

2.4.1.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

Uma vez que esta obra tinha como objectivo ser utilizada como manual escolar, apresenta por isso, uma estrutura bastante distinta das obras analisadas anteriormente.

Ela está dividida em dois tomos. O primeiro, que vamos analisar, está dividido em duas partes: A primeira trata do Cálculo Diferencial e a segunda do Cálculo Integral. Cada uma destas duas partes está subdividida em lições. A parte dedicada ao Cálculo Diferencial é constituída por 26 lições, abarcando os vários sub – temas do Cálculo Diferencial. Em cada uma das lições Sturm apresenta as noções e definições relacionadas com o tema, bem como os teoremas e respectivas demonstrações. Expõe também notas, exemplos, observações e, no final de cada lição, um conjunto de exercícios com a respectiva solução, relacionados com o tema da lição.

As imagens utilizadas estão inseridas ao longo do texto e não no final da obra ou compiladas numa página, como vimos nas obras anteriores.

A décima quarta lição (pag. 167 – 179) é dedicada aos máximos e mínimos de funções de uma variável. É nesta lição que encontramos os problemas de máximos e mínimos. Vejamos como Sturm organiza esta lição:

Quatorzième Leçon : Maximum et minimum des fonctions d'une variable

Maximums et minimums de fonctions d'une seule variable indépendante

Applications

Maximums et minimums d'une fonction implicite

No final da lição Sturm apresenta uma lista de sete exercícios relacionados com a lição.

2.4.1.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

Como já foi referido, é na décima quarta lição que Sturm aborda os problemas de máximos e mínimos e após a respectiva aplicação do método de cálculo dos máximos e mínimos, apresenta algumas aplicações das quais duas são problemas de máximos e mínimos.

Ambas as aplicações estão também enunciadas e resolvidas na obra de Serret de uma forma muito semelhante.

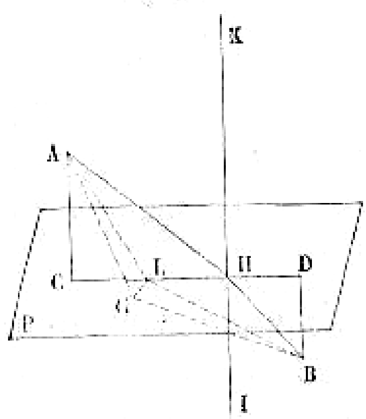
2ª Aplicação

São dados dois pontos A e B, situados em dois meios diferentes e separados por uma superfície plana P. Um móvel move-se no primeiro meio com uma velocidade uniforme u, e no segundo meio com uma velocidade uniforme v; procuramos o caminho AHB que o móvel deve fazer para ir de A a B no tempo mais curto. (pag. 170)

Resolução apresentada:

É claro antes de mais que este caminho deve ser composto de linhas rectas. Eu digo ainda que a linha cortada que resolve este problema deve estar no plano ABCD, conduzido pelas perpendiculares AC, BD ao plano P. Com efeito, suponhamos que esta linha é AGB e que ela intersecta o plano P no ponto G situado fora do plano ABCD. Tracemos GL perpendicular a CD, e juntemos AL e BL. Os triângulos AGL e BGL são rectângulos em L, tem-se AL<AG e BL<BG; assim, o móvel vai mais rapidamente do ponto A ao ponto B seguindo o caminho ALB do que seguindo o caminho AGB.

Fig 9.



Procuremos, no plano ABCD, perpendicular ao plano P, a linha AHB, que é percorrida pelo móvel no menor tempo possível.

Seja AC = a, BD = b, CD = c e CH = x;

o tempo que o móvel emprega para ir de A a H é $\frac{AH}{u} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u}$, e o que emprega para ir de Há B é $\frac{HB}{v} = \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v}$; assim, a função da qual pretendemos calcular o mínimo é

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v}$$

calculemos quando é que

$$f'(x) \text{ ou } \frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0$$

ou seja

$$\frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

Se quisermos resolver esta equação em ordem a x, deveremos elevar os dois membros ao quadrado, e teremos de seguida de resolver uma equação do quarto grau. Mas como

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin CAH = \sin AHK,$$

$$\frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = \sin HBD = \sin BHI$$

verificamos que, no caso do mínimo (a função f(x) não tem máximo), temos

$$\frac{\sin AHK}{u} = \frac{\sin BHI}{v} \text{ ou } \frac{\sin AHK}{\sin BHI} = \frac{u}{v}$$

Na teoria da luz, a quantidade $\frac{u}{v}$, razão das velocidades da luz nos dois meios, é o índice da refracção da luz, na passagem do primeiro meio para o segundo.

Este é um problema de Física que já surgiu anteriormente. Nele, pretende-se optimizar uma distância, repartida em duas partes em que um objecto se desloca a velocidades distintas. Na sua resolução surge a função a derivar como f(x) e não como y como anteriormente, depois calcula a sua derivada e respectivos zeros. Para equacionar o problema, o autor decompõe a figura em triângulos rectângulos, utilizando depois o Teorema de Pitágoras e as funções trigonométricas para relacionar os lados destes triângulos. A função obtida é uma função irracional.

4ª Aplicação

Determinar a distância mínima de um ponto dado M (a, b) a uma curva da qual conhecemos a equação (pag. 172)

$$(1)\quad y = f(x)\,.$$

Resolução apresentada:

Juntemos MK, K é um ponto qualquer da curva. Tem-se

$$\overline{MK}^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2\,.$$

Igualando a zero o diferencial desta expressão, temos

$$(x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}=0$$

equação que se transforma em

$$(2)\quad \frac{y-b}{x-a}.\frac{dy}{dx}+1=0$$

Ora esta relação entre $\frac{dy}{dx}$, coeficiente angular da tangente à curva dada no ponto *(x, y)*, e $\frac{y-b}{x-a}$, coeficiente angular da recta MK, mostra que estas duas rectas são perpendiculares entre elas. Assim a recta mínima deve cortar a curva dada num ângulo recto.

Se a distância MK for susceptível de um máximo, determiná-lo-emos ainda pela resolução das equações (1) e (2).

Consideremos em particular o círculo cuja equação é

$$x^2+y^2=r^2\,.$$

Tem-se $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, e a relação (2) ficará

$$1-\frac{y-b}{x-a}.\frac{x}{y}=0$$

Para determinar *x* e *y*, temos as duas equações

$$x^2+y^2=r^2$$

$$y=\frac{b}{a}x$$

que tomadas simultaneamente, representam os pontos de intersecção do círculo dado com a recta MO. Então KM será a distância mínima, e K'M a distância máxima, como verificaremos facilmente considerando as derivadas seguintes.

Mas apresenta-se aqui uma singularidade que podemos explicar pela definição de máximo e mínimo.

Suponhamos que o ponto dado é o ponto N situado sobre o eixo das abcissas a uma distância *a* do centro. O quadrado da distância NH será representado pela expressão

$$y^2 + (x - a)^2 ;$$

ou seja por

$$r^2 - 2ax + a^2.$$

Ora a derivada desta expressão é uma quantidade constante ($-2a$) que, por consequência, não pode ser igualada a zero. Assim, como existe uma distância mínima que é NA, não a obteremos pelo mesmo processo. Esta vem do facto de, depois da definição, uma função é mínima para um certo valor da variável, porque ele aumenta pelos valores maiores e mais pequenos dessa variável. Ora, se NH é considerado como uma função de x, NA não é mais um mínimo, pois esta função, real para os valores de *x* menores do que *r*, tornam-se imaginários para os valores maiores.

Neste problema de Geometria Analítica, o autor pretende optimizar a distância entre um ponto e uma curva dada. Na resolução desta aplicação o autor utiliza a fórmula da distância entre dois pontos para equacionar o problema. Depois determina o diferencial dessa expressão e iguala-o a zero. Trabalha então com a equação do diferencial igualada a zero e com a função da curva para determinar a solução óptima. Aplica ainda a segunda derivada para verificar se, de facto, se trata de um máximo ou de um mínimo.

No final da lição Sturm apresenta uma lista de exercícios seguidos, cada um deles, da respectiva solução.

1. *Qual é o maior quadrilátero que conseguimos formar com quatro lados dados?* (pag. 178)

Solução: O Quadrilátero inscritível.

2. *Determinar sobre uma circunferência dada um ponto tal, que a soma das suas distâncias a dois pontos dados seja um máximo ou um mínimo.* (pag. 178)

Solução: O ponto de contacto da circunferência e de uma elipse, tangente ao círculo, sendo como focos os dois pontos dados.

3. *Inscrever numa esfera dada um cone tal que a superfície total seja um máximo.* (pag. 178)

Solução: Designando por x a altura e por *r* o raio da esfera, tem-se $x = \frac{23 - \sqrt{17}}{16} r$.

4. *Circunscrever a uma esfera dada um cone tal que o volume seja mínimo.* (pag. 178)

Solução: Usando as mesmas notações.

$$x = 4r \text{ , vol. max.} = \frac{8}{3} \pi r^3$$

5. *Entre todas as parábolas que podem descrever dois corpos pesados partindo de um ponto dado com uma velocidade dada, determinar a que tem a área maior.* (pag. 178)

Solução: Parábola descrita por um corpo lançado numa direcção com uma inclinação de 60 graus em relação ao horizonte.

6. *Entre todas as cordas com o mesmo comprimento inscritas numa curva dada, determinar a que corta o segmento maior ou mais pequeno.* (pag. 179)

Solução: A corda deve formar ângulos iguais com as tangentes à curva feitas pelas suas extremidades.

7. *Duas rodas circulares exteriores uma à outra sobre um mesmo plano rodam uniformemente em tornos dos seus centros fixos, uma faz duas voltas, a outra faz três voltas por segundo. Determinar os instantes e as posições das duas rodas para os quais dois pontos marcados sobre as suas circunferências estejam à maior ou à menor distância um do outro.* (pag. 179)

Este exercício não apresenta solução.

2.4.1.5. CONCLUSÃO

Nesta obra verificamos que os problemas de optimização surgem em duas situações distintas. Primeiro, após a explicação do método de cálculo de máximos e mínimos, o autor apresenta algumas aplicações do método, bem como a respectiva resolução. No final do capítulo ou lição o autor apresenta um conjunto de exercícios de aplicação com a respectiva solução. Esta é a primeira obra analisada que apresenta, no final do capítulo, exercícios de aplicação.

Nestas aplicações e exercícios são abordados problemas da Física, de Geometria Plana e de Geometria Espacial, onde se pretende optimizar distâncias, áreas, volumes e tempo.

A primeira aplicação pode ser designada de um problema da vida real.

Nas resoluções apresentadas o autor começa por equacionar o problema; seguidamente, calcula a respectiva derivada e os zeros da mesma; por fim tira as conclusões em relação ao extremo, apresentando depois a resposta ao problema.

2.4.2. COURS DE CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL DE SERRET

2.4.2.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Joseph Alfred Serret

Data de nascimento e falecimento do autor: 1819 – 1885

Título: *Cours de Calcul Differentiel et Integral*

Ano, editora e lugar da primeira edição: 1878, Gauthier-Villars: Paris

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1879, Gauthier-Villars: Paris

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Cota: 26-01 SER T.1.

2.4.2.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Joseph Alfred Serret nasceu em Paris, em 1819. Licenciou-se na École Polytechnique de Paris em 1840. Em 1848 tornou-se um examinador de entrada da École Polytechnique. Posteriormente, em 1861 tornou-se professor de Mecânica Celeste no Collège de France, e dois anos depois foi nomedado para a cadeira de Cálculo Diferencial e Integral na Sorbone. Tornou-se membro do Bureau des Longitudes em 1873.

Serret desenvolveu um trabalho importante na área da Geometria Diferencial. Juntamente com Bonnet e Bertrand fez grandes avanços nessa área. A fórmula fundamental na teoria de curvas no espaço é a fórmula de Frenet-Serret.

Escreveu, em 1878, uma obra constituída por dois tomos, *Cours de Calcul Differentiel et Integral*, contendo a substância das aulas de Cálculo Diferencial e Integral que tinha leccionado na Sorbonne e na Faculté des Sciences de Paris.

Em 1860 sucedeu a Poisot, na Académie des Ciences e onze anos depois retirou-se para Versailles quando a sua saúde se começou a deteriorar.

Também trabalhou na área da Teoria dos Números, Cálculo e Mecânica. Editou os trabalhos de Lagrange, que foram publicados em 14 volumes, entre 1867 e 1892. Editou ainda a 5º edição, de Monge, em 1850.

2.4.2.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

A obra de Serret é constituída por dois tomos. O primeiro é dedicado às regras do Cálculo Diferencial e ás aplicações deste Cálculo à Geometria e o segundo é dedicado ao Cálculo Integral.

O primeiro tomo, obra que vamos analisar, está dividida em 12 partes que o autor intitula de Capítulos.

O Capítulo VI (pag. 198 – 240) é dedicado à teoria de máximos e mínimos. Vejamos como está estruturado este capítulo:

Chapitre VI: Théorie des Maxima et des Minima

Des maxima et des minima des fonctions d'une seule variable

Application à quelques exemples

Remarque sur les maxima et les minima relatifs

Cas des fonctions implicites d'une seule variable indépendante

Des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables indépendantes

Application à quelques exemples

Cas où les dérivés partielles d'une fonction de plusieurs variables cessent d'être déterminés quand on donne aux variables les valeurs qui répondent au maximum ou au minimum

Cas des fonctions implicites de plusieurs variables indépendantes

Remarque sur le cas d'une fonction explicite de plusieurs variables liées par les équations donnés

É na parte intitulada *Application à quelques exemples* (de funções de uma só variável independente) que podemos encontrar alguns problemas de máximos e mínimos.

2.4.2.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

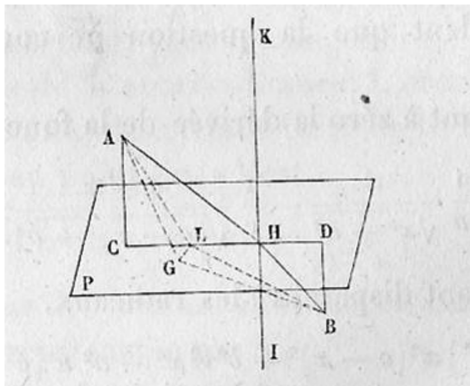
É, como já foi referido, no Capítulo VI que podemos encontrar os problemas de máximos e mínimos.

Este capítulo começa por apresentar a explicação teórica do método de cálculo de máximos e mínimos e de seguida apresenta alguns exemplos de aplicação. Iremos a seguir fazer a análise desses exemplos que estão também presentes na obra anterior. A outra parte do capítulo, como trata das funções implícitas e das funções com mais do que uma variável, não serão analisadas, uma vez que se encontram fora do âmbito desta investigação.

Exemplo III (Problema de Fermat)

Dois meios estão separados por um plano P, procuramos o caminho que deve seguir um móvel para ir, no tempo mais curto, de um ponto A do primeiro meio a um ponto B o segundo. O móvel move-se no primeiro meio a uma velocidade constante u, e no segundo meio a uma velocidade constante v. (pag. 203)

Resolução apresentada:



O caminho procurado é composto de duas linhas rectas, pois o espaço percorrido pelo móvel, num ou noutro meio, é proporcional ao tempo empregue. Além disso, esse caminho está situado no plano ACDB posto perpendicular ao plano P pelos pontos dados A e B e que o corta pela linha CD; com efeito, consideremos a linha quebrada AGB, situada fora do plano ACDB, e do ponto G onde ela encontra o plano P, tracemos GL perpendicular sobre CD, as rectas AL e LB serão respectivamente menores que AG e GB; consequentemente, os tempos para percorrer o caminho ALB será menor que o tempo necessário para ir de A a B pelo caminho AGB.

Posto isto, designemos por *a* e *b* as perpendiculares AC, BD traçadas dos pontos A e B sobre o plano P, por c a distancia CD e por x a distancia do ponto C a um qualquer ponto H de CD; teremos

$$AH = \sqrt{x^2 + a^2}\ ,\quad BH = \sqrt{(c-x)^2 + b^2}$$

assim o tempo t que o móvel empregará para ir de A a B, pelo caminho AHB será

$$(1)\ \ t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v}\ ;$$

esta é a função de x da qual procuramos o mínimo.

É evidente que a questão não comporta máximo.

Igualando a zero a derivada da função t, tem-se

$$(2)\quad \frac{1}{u}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{1}{v}\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}=0$$

onde, fazendo desaparecer os radicais,

$$(v^2-u^2)x^2(c-x)^2+b^2v^2x^2-a^2u^2(c-x)^2=0$$

assim a incógnita x depende de uma equação do quarto grau. Mas, sem resolver esta equação, podemos obter como se deduz da propriedade geométrica que caracteriza a linha procurada. Assim, coloquemos a linha KI perpendicular em H ao plano P; designemos por *i* o ângulo AHK e por *r* o ângulo IHB, tem-se

$$\sin r=\frac{DH}{BH}=\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}},$$

$$\sin i=\frac{CH}{AH}=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

e por consequência, a equação (2), que exprime a condição do mínimo, vem

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{u}{v}$$

Ela resulta de que o seno do ângulo de incidência *i* está para o seno do ângulo de refracção *r* na razão das velocidades *u* e *v* com as quais o móvel se pode mover no primeiro e no segundo meio, respectivamente.

Este é um problema de Física que já surgiu anteriormente. Nele pretende-se optimizar uma distância repartida em duas partes em que um objecto se desloca a velocidades distintas. Na sua resolução, surge a função a derivar como f(x) e não como y como anteriormente, de seguida calcula a sua derivada e respectivos zeros. Para equacionar o problema o autor decompõe a figura em triângulos rectângulos utilizando depois o Teorema de Pitágoras e as funções trigonométricas para relacionar os lados destes triângulos. A função obtida é uma função irracional.

Exemplo IV

Determinar os máximos e mínimos da distância de um ponto dado a uma curva dada. (p. 205)

Resolução apresentada:

Designemos por x_0 e y_0 as coordenadas do ponto dado relativos a dois eixos rectangulares; por x e y as coordenadas da curva dada. A ordenada y é uma função dada de x, e o quadrado da distância do ponto do ponto (x_0, y_0) ao ponto (x , y) é

$$(1)\ \ V=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$$

pretende-se calcular os valores máximo e mínimo da função de x representada por V.

Tem-se

$$(2)\ \ \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{dV}{dx}=(x-x_0)+(y-y_0)\dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2V}{dx^2}=\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)+(y-y_0)\dfrac{d^2y}{dx^2} \end{cases}$$

A condição $\dfrac{dV}{dx}=0$ do máximo ou do mínimo está aqui

$$(3)\ \ (x-x_0)+(y-y_0)\frac{dy}{dx}=0$$

ou

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}\frac{dy}{dx}=-1$$

$\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$ é o coeficiente de inclinação da recta que junta o ponto dado M_0 com o ponto procurado M da curva dada, $\dfrac{dy}{dx}$ é o coeficiente de inclinação da tangente em M à mesma curva. Assim a equação precedente exprime que a recta que junta o ponto dado ao ponto procurado é normal à curva.

Seja M um dos pontos assim determinados pela equação (3); esse ponto irá corresponder a um mínimo ou a um máximo, conforme $\dfrac{d^2V}{dx^2}$ seja positiva ou negativa. Mas, se $\dfrac{d^2V}{dx^2}$ for nula, deveremos recorrer às derivadas de ordem superior para decidir se temos um máximo ou um mínimo, ou se não é um nem outro. Este último caso apresenta-se em particular se, $\dfrac{d^2V}{dx^2}$ for nula no ponto M, o valor de $\dfrac{d^3V}{dx^3}$ é diferente de zero.

A recta M_0M será colocada, supondo que o ponto dado M_0 toma todas as posições possíveis sobre esta normal, irá existir uma posição M' do ponto M_0 para o qual a derivada $\frac{d^2V}{dx^2}$ seja nula; consequentemente, se tomarmos *x'*, *y'* coordenadas de M' tem-se

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}=0\,,$$

e a segunda equação (2) pode então escrever-se na forma

$$\frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2}=\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{y_0-y'}{y-y'}$$

Esta mostra que o valor de M_0M será um mínimo ou um máximo, dependendo de que y_0-y' e $y-y'$ estejam na mesma linha ou em linhas contrárias. Noutros termos, irá existir um mínimo quando o ponto dado M_0 esteja situado entre M' e M, irá existir um máximo caso contrário. O ponto M' é, como iremos ver posteriormente, o que designamos por *centro da curvatura* da curva dada no ponto M.

Neste problema de Geometria Analítica, o autor pretende optimizar a distância entre um ponto e uma curva dada. Na resolução desta aplicação o autor utiliza a fórmula da distância entre dois pontos para equacionar o problema. Depois determina o diferencial dessa expressão e iguala-o a zero. Trabalha então com a equação do diferencial igualada a zero e com a função da curva para determinar a solução óptima. Aplica ainda a segunda derivada para verificar se é um máximo ou um mínimo.

2.4.2.5. CONCLUSÃO

Nesta obra verificamos que os problemas de optimização surgem como exemplos, após a explicação do método de cálculo de máximos e mínimos.

Os dois exemplos apresentados pelo autor foram estudados anteriormente por Sturm e as resoluções apresentadas são muito semelhantes.

Nestes dois exemplos, apresentados pelo autor, são abordados problemas da Física e problemas de Geometria Plana. No primeiro, calcula-se uma distância mínima, numa situação da vida real e no segundo, calcula-se a distância mínima entre um ponto e uma curva dada.

Nas resoluções apresentadas o autor começa por equacionar o problema; a seguir calcula a respectiva derivada e os zeros da mesma e por fim tira as conclusões em relação ao extremo, apresentando depois a resposta ao problema.

CONCLUSÕES

Neste segundo capítulo tínhamos como objectivo efectuar uma análise de algumas obras históricas para, com esta análise, identificar os vários matemáticos que nas suas obras abordaram os problemas de optimização e fazer uma análise a esses mesmos problemas e à respectiva resolução.

Assim, após uma pesquisa nos livros de História da Matemática, fizemos a identificação dos matemáticos e das obras que, possivelmente, abordaram estes problemas. De seguida fizemos uma localização das obras e uma primeira análise das mesmas para verificar se, de facto, abordavam estes problemas. Finalmente seleccionámos algumas dessas obras que nos parecem ser representativas do nosso estudo.

Uma das primeiras conclusões a que chegámos foi que, de facto, os problemas de optimização já eram abordados muito antes de surgir o conceito de derivada. Pois o primeiro autor que verificámos ter feito a sua abordagem foi Euclides na sua obra *Elementos* no século IV (a. C.) e, posteriormente, também Pappus, no século IV D.C., fez uma abordagem dos mesmos na sua obra *La collection Mathématique*. Ambos os autores são muito anteriores ao surgimento do conceito de derivada.

Também, com base na análise que efectuámos a cada uma das obras, podemos tirar conclusões acerca dos vários tipos de problemas encontrados bem como das respectivas resoluções/demonstrações.

Quanto ao enunciado dos problemas, verificámos que estes surgem, na obra de Euclides e na obra de Pappus sob a forma de proposições. Também, na obra de L'Hôpital, uma vez que é uma das primeiras obras que surgiu após o conceito de derivada, estes são enunciados como exemplos. Na obra de Bézout, escrita na época em que se dá a consolidação do conceito de derivada, estes aparecem, pela primeira vez, enunciados como problemas. Quanto ás duas últimas obras analisadas, Sturm, enuncia-os como uma aplicação do cálculo de máximos e mínimos e são, pela primeira vez, apresentados exercícios de aplicação e na obra de Serret são enunciados como problemas.

Os problemas abordados são também de diversos tipos. Assim, na obra de Euclides apenas são abordados problemas de Geometria Plana e na obra de Pappus todos os problemas são de Geometria Plana ou de Geometria Espacial. Na obra de L'Hôpital surge um leque mais vasto de problemas, além dos dois tipos já referidos, surgem também problemas de Aritmética, de Física e até de Astronomia. Na obra de Bézout surgem problemas de Geometria Plana, Geometria Espacial e de Aritmética. Por fim, nas duas últimas obras, surgem os de Geometria Plana, de Geometria Espacial e da Física.

Também o que se pretende optimizar varia de obra para obra. Na primeira obra surgem problemas de optimização de distâncias, áreas ou ângulos. Na segunda obra, para além dos anteriores, surgem também os de optimização de volumes. Na terceira obra surgem os de optimização de áreas, produtos, razões e de tempo. Na quarta obra analisada surgem os de optimização de áreas, volumes e produtos. Por fim, nas últimas obras surgem os de optimização de distâncias, áreas, volumes e tempo.

Consequentemente, também o tipo de resolução que se faz varia significativamente. As duas primeiras obras, uma vez que enunciam os problemas como proposições, apresentam as demonstrações das mesmas. Assim usam o método de redução ao absurdo e outras proposições anteriormente apresentadas, utilizam também relações entre triângulos ou ângulos. A partir da terceira obra, uma vez que marca o surgimento do conceito de derivada, deixamos de ter demonstrações e passamos a ter as resoluções dos problemas ou exemplos apresentados. Estas resoluções começam por equacionar o problema, depois calculam a derivada da função bem como os respectivos zeros e, por fim, apresentam a resposta ao problema apresentado.

As resoluções costumam ser complementadas com imagens ao longo do texto, com excepção da obra de L'Hôpital e de Bézout que apresentam as imagens posteriormente compiladas. Em relação às duas primeiras obras, uma vez que são traduções das obras originais, não podemos conjecturar onde estas eram apresentadas.

Em relação à localização dos mesmos na obra, podemos verificar que nas duas primeiras estes se encontravam em distintas partes da obra, não existindo, obviamente, uma parte dedicada aos problemas de máximos e mínimos. Em todas as outras estes estavam incluídos no Cálculo Diferencial e eram referidos como aplicações ou como problemas de máximos e mínimos.

Assim, com base na análise que efectuámos a cada uma das obras, podemos construir uma tabela de catalogação dos vários problemas encontrados, bem como das respectivas resoluções/demonstrações. Nessa tabela podemos catalogar as várias formas de enunciar os problemas, os tipos de problemas abordados, o tipo de optimização que se efectuar e o tipo de resolução apresentada.

Na primeira coluna da tabela indicamos a obra e o número do problema da obra: E refere-se à de Euclides, P à de Pappus, L à de L'Hôpital, B à de Bézout, ST à de Sturm e SE à de Serret. O número que surge à frente da letra indica o número do problema em questão.

Na primeira linha da tabela indicamos os vários pontos que vamos analisar e na segunda linha a catalogação de cada um dos pontos analisados. O significado das siglas que usamos está indicado na grelha apresentada a seguir.

Forma de Enunciado	**Tipo de Problemas**	**Tipo de Optimização**	**Tipo de Resolução**
Proposição (PR)	Geometria Plana (GP)	Distância (OD)	Demonstração (DEM)
Exemplo (EX)	Geometria Espacial (GE)	Área (OAR)	Resolução (RES)
Problema (PB)	Aritmética (AR)	Volume (OV)	
Aplicação (AP)	Física (FI)	Produto (OP)	
Exercício (EXR)	Astronomia (AS)	Ângulo (OAN)	
		Razão (OR)	
		Tempo (OT)	

Tabela de Catalogação dos Problemas Históricos

	Forma de Enunciado					**Tipo de Problemas**					**Tipo de Optimização**							**Tipo de Resolução**	
	PR	EX	PB	AP	EXR	GP	GE	AR	FI	AS	OD	OAR	OV	OP	OAN	OR	OT	DEM	RES
E1	X					X					X							X	
E2	X					X					X							X	
E3	X					X					X							X	
E4	X					X									X			X	
E5	X					X						X						X	
P1	X					X						X						X	
P2	X					X						X						X	
P3	X						X						X					X	
P4	X						X						X					X	
P5	X						X								X			X	
P6	X					X					X							X	
L1		X				X		X						X					X
L2		X				X		X								X			X
L3		X					X					X							X
L4		X					X					X							X
L5		X					X					X							X
L6		X							X								X		X
L7		X							X										X
L8		X								X							X		X
B1			X					X						X					X
B2			X			X						X							X
B3			X				X						X						X
B4			X			X						X							X
B5			X			X						X							X
ST1				X					X								X		X
ST2				X		X					X								X
ST3					X	X						X						-	-
ST4					X	X					X							-	-
ST5					X		X					X						-	-
ST6					X		X						X					-	-
ST7					X	X			X			X						-	-
ST8					X	X					X							-	-
ST9					X	X			X		X							-	-
SE1			X						X								X		X
SE2			X			X					X								X

3. ANÁLISE DOS PROGRAMAS OFICIAIS E DOS MANUAIS ESCOLARES PORTUGUESES DO SÉCULO XX E XXI

Após a análise efectuada aos livros históricos de Matemática, impõe-se agora realizar uma análise ao sistema de ensino português. Com a realização desta análise pretendemos: verificar quando e de que forma foram introduzidos nos programas oficiais portugueses os problemas de optimização; analisar em cada plano de estudos a importância dada à disciplina de Matemática e, dentro desta, a importância dada ao estudo do Cálculo Diferencial e especificamente ao estudo dos problemas de optimização e ainda analisar como estes foram abordados, ou seja, o tipo de problemas proposto pelo Ministério e o tipo de problemas abordados pelos manuais escolares, verificar se os manuais, acerca dos problemas de optimização, vão de encontro às propostas do Ministério. Por fim, observar qual a alteração sofrida pelos programas, em relação aos problemas de optimização, após a introdução das calculadoras gráficas no Ensino Secundário.

O século XX, em Portugal, foi um século marcado por alguns acontecimentos que, certamente, influenciaram o ensino e, em particular, a elaboração dos programas oficiais para a disciplina de Matemática. No início do século passamos de um regime Monárquico para um regime Republicano que, posteriormente, se transformou num regime ditatorial. Também a evolução das novas tecnologias, especialmente do computador e da calculadora, marcaram o ensino desta disciplina.

Para esta fase da nossa investigação foi muito importante a recolha de legislação acerca dos programas oficiais da disciplina de Matemática realizada por Aires (2006), no seu trabalho de investigação "*O conceito de derivada no Ensino Secundário em Portugal ao longo do século XX: Uma abordagem histórica através dos planos curriculares e manuais escolares*". Neste foi efectuado um estudo histórico centrado na questão do ensino da noção de derivada, desde que ocorreu a sua introdução no mesmo ensino, no século XX, mais concretamente no ano de 1905, acompanhando a sua evolução ao longo do referido século. De grande importância foi também a investigação realizada por González Astudillo (2002) intitulada "*Sistemas Simbólicos de Representación en la Enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva Histórica*" que apresenta uma caracterização das representações dos pontos críticos presentes nos manuais escolares espanhóis e em livros históricos.

Também a obra de Rómulo de Carvalho (1985), *História do ensino em Portugal. Desde a fundação da nacionalidade até ao fim do regime de Salazar – Caetano,* acerca do ensino em Portugal foi de precioso auxílio, uma vez que nos permitiu ter uma visão mais alargada das alterações sofridas ao longo do século, pelo nosso sistema de ensino.

Indispensáveis foram de igual modo os livros de História de Portugal dirigidos por José Hermano Saraiva que nos permitiram ter uma visão mais ampla acerca do ambiente político, social e económico do país aquando das diversas reformas.

Foram ainda de grande interesse as publicações periódicas da revista Gazeta da Matemática, criada em 1940 e publicada pela SPM[17]. Estas permitiram-nos sentir as opiniões, criticas e comentários dos Matemáticos, Professores de Matemática e Pedagogos do nosso país em relação às sucessivas alterações curriculares sofridas pela disciplina de Matemática ao longo dos dois últimos séculos.

Todos os estudos e investigações realizadas pelas diversas entidades governamentais e não governamentais acerca das diversas reformas educativas e programas oficiais tiveram também um papel importante para a realização da nossa investigação.

Assim, começámos por fazer uma recolha de legislação para identificar as várias reformas curriculares realizadas ao ensino, em Portugal, bem como investigar se estas conduziram a alguma alteração na disciplina de Matemática, mais especificamente no estudo da derivada e suas aplicações.

Com base nesta pesquisa dividimos esta análise em cinco períodos:

- 1º Período: Introdução nos programas oficiais do estudo da derivada
- 2º Período: Introdução das aplicações da derivada nos programas oficiais
- 3º Período: Introdução das Matemáticas Modernas em Portugal
- 4º Período: A Lei de Bases do Sistema Educativo
- 5º Período: Introdução da calculadora gráfica nos programas oficiais

Posteriormente à análise dos programas oficiais da disciplina de Matemática, realizámos uma recolha de manuais escolares respeitantes às reformas curriculares que referem o estudo da derivada, mais especificamente, os que contemplam o estudo das aplicações da derivada ou o cálculo de extremos de uma função. Dado que, a partir do

[17] Sociedade Portuguesa da Matemática

momento em que deixa de estar em vigor o livro único, surge um elevado número de manuais escolares para cada ano, optámos por seleccionar, para cada um dos períodos referidos, anteriormente, alguns destes manuais a fim de analisar mais detalhadamente os problemas de optimização.

A tabela seguinte contém a listagem de todos os manuais analisados. Referindo para cada um dos manuais o nome do autor ou autores, o título do livro, o ano lectivo a que pertence, o ano da publicação, o nome da editora, a reforma curricular a que se refere e, por fim, as observações onde fazemos referência ao facto de ser ou não o livro único bem como o Diário de Governo em relação ao qual está de acordo.

Tabela de Manuais Escolares que abordam os problemas de optimização

Autor	Título da Obra	Ano Lectivo	Ano Publ.	Editora	Refor-ma	Obs.
J. Sebastião e Silva; José Duarte Silva Paulo	Compêndio de Álgebra	6º,7º Ano 3ºC-Ens. Lic.	1958	Livraria Rodrigues	1954	L. U. – DG 2ª S. de 22/1/1958
J. Sebastião e Silva; José Duarte Silva Paulo	Compêndio de Álgebra	6º,7º Ano 3ºC-Ens. Lic.	1960	Livraria Rodrigues	1954	L. U. – DG 2ª S. de 22/1/1958
J. Sebastião e Silva; José Duarte Silva Paulo	Compêndio de Álgebra	6º Ano - Ens. Lic.	1963	Livraria Popular de Francisco Franco	1954	L. U. – DG
J. Sebastião e Silva; José Duarte Silva Paulo	Compêndio de Álgebra	6º Ano – Ens. Lic.	1968	Livraria Cruz	1954	L. U. – DG 2ª S. de 8/5/1968
António Nascimento Palma Fernandes	Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética Racional	6º Ano - Liceus	1961	Livraria Didáctica	1954	
J. Sebastião e Silva	Compêndio de Matemática	7º Ano	1965		1963	2º proj. esp.STP-4/SP/Portugal
Ondina Vasconcelos	Compêndio de Matemática	1º CC (Antigo 6º)	1973	Porto Editora	1973	Matemática Clássica
Fernando Borja Santos	Sebenta de Matemáticas Modernas	5º Ano CC. (antigo 7º)	1974		1973	
Madalena Garcia; Alfredo Osório; António Ruivo	Compêndio de Matemática	2º Ano CC. V1	1975	Empresa Literária Fluminense	1973	D.L. nº 47 587 de 10/3/1967
J. A. Loureiro de Amorim	Exercícios de Matemática	2º Ano CC.	1977?	Didáctica Editora	1973	
A. César Freitas; Francelino Gomes	Matemática	11º Ano (2º CC) Vol. 2	1979	Livraria Popular Francisco Franco	1979	
Henrique Verol Marques	Exercícios de Matemática 1	11º Ano	1979	Editorial Presença	1979	

António do Nascimento Palma Fernandes	Matemática 7 – Exemplos e exercícios	11º Ano	1980	Plátano Editora	1979	
Paulo Abrantes; Raul Fernando Carvalho	M11 – Matemática 11º ano	11º Ano	1984	Texto Editora	1979	
M. A. F. Neves; M. Teresa C. Vieira; Alfredo G. Alves	Matemática	11º Ano	1988	Porto Editora	1979	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	10º Ano	1992	Editorial O Livro	1991	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	11º Ano	1994	Editorial O Livro	1991	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	12º Ano	1994	Editorial O Livro	1991	
Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo	Infinito 11	11º Ano	1994	Areal Editores	1991	
Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo	Infinito 12	12º Ano	1995	Areal Editores	1991	
M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito	Matemática 10	10º Ano	1994	Porto Editora	1991	
M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito	Matemática 11	11º Ano	1994	Porto Editora	1991	
M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito	Matemática 12	12º Ano	1995	Porto Editora	1991	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	10º Ano	1996	Editorial O Livro	1997	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	11º Ano	1997	Editorial O Livro	1997	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	12º Ano	1997	Editorial O Livro	1997	
Ana M.B. Jorge, C. Barroso Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo	Infinito 10	10º Ano	1997	Areal Editores	1997	
Ana M.B. Jorge, C. Barroso Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo	Infinito 11	11º Ano	2001	Areal Editores	1997	
Ana M.B. Jorge, C. Barroso Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo	Infinito 12	12º Ano	1995	Areal Editores	1997	
Maria Augusta F. Neves	Matemática 10	10º Ano	2001	Porto Editora	1997	
Maria Augusta F. Neves	Matemática 11	11º Ano	2001	Porto Editora	1997	
Maria Augusta F. Neves	Matemática 12	12º Ano	2002	Porto Editora	1997	

A análise de cada período foi repartida em três partes:

- Parte A – Análise do programa oficial: Nesta apresentámos o programa oficial bem como algumas características deste ou da época em que se insere.
- Parte B – Análise dos manuais: Nesta começámos por apresentar a descrição dos vários manuais consultados, indicando, para cada um, a ficha de referência da obra consultada (autor, título, ano lectivo, reforma curricular, ano, editora e lugar de edição e sua localização) e estrutura da obra. Depois apresentámos a lista de todos os problemas de optimização encontrados.
- Parte C – Análise do período: Nesta parte surge uma descrição das características dos problemas deste período.

Ao iniciar a análise dos problemas de optimização presentes nos manuais escolares, a primeira questão que se colocou foi relativamente à forma como poderíamos fazer essa análise de forma a conseguir caracterizar os problemas presentes em cada período.

González Astudillo (2002) dá-nos uma caracterização das representações presentes nos manuais escolares espanhóis. Camacho Machin (1998) faz uma classificação dos tipos de problemas de optimização que surgem nos manuais escolares e de apresenta-nos uma proposta de resolução, utilizando a calculadora gráfica TI92. Martin Kindt (1995) compara diferentes métodos de resolução do mesmo problema resolvendo problemas antigos, utilizando a calculadora gráfica. Também Mesa (2004) apresenta uma caracterização dos exercícios apresentados nos livros de texto.

Como se trata de uma investigação acerca de problemas optamos por fazer essa análise baseada nas quatro fases de resolução de problemas propostas por Polya (1975), visto ser o autor referido nos manuais escolares.

Segundo Polya (1975), para resolver um problema devemos seguir os passos seguintes:

1. *Compreensão do Problema:* Identificar a incógnita, os dados e a condicionante; Verificar se é possível satisfazer a condicionante, se esta é suficiente para determinar a incógnita; Traçar uma figura.
2. *Estabelecimento de um plano:* Encontrar a conexão entre os dados e a incógnita e verificar se é necessário considerar problemas auxiliares.

3. *Execução do plano:* Verificar cada passo, verificar se cada passo está correcto.
4. *Reflexão:* Examinar a solução obtida, verificar se esse resultado é possível.

Refere o autor que:

> "*Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão interrelacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.*"

Assim sendo, à medida que fomos analisando os vários problemas de optimização presentes nos manuais utilizados, tentamos identificar as características destes relativamente a cada uma das quatro fases da resolução de problemas.

Criámos então um conjunto de treze categorias repartidas pelas quatro fases: seis categorias para a primeira fase, três para a segunda, três para a terceira e uma para a última. Cada uma das categorias é composta pelas diferentes características que identificámos nos problemas analisados.

Primeira fase: Compreensão do problema

Nesta primeira fase pretende-se proceder à identificação das incógnitas, dos dados e das condicionantes.

Identificámos, para esta fase, seis categorias:

– Tipo de Problema (T): Nesta categoria referimos a forma como o problema é apresentado no manual.
  - Exemplo Resolvido (TEP) – Problemas que surgem sob a forma de exemplo de aplicação seguido da respectiva resolução.
  - Exercício Resolvido (TER) – Problema que surge sob a forma de exercício mas seguido da respectiva resolução.
  - Exercício (TE) – Problema que surge sob a forma de exercício, normalmente no final do capítulo ou nas margens do manual, sem resolução, mas com solução no final.
  - Demonstração (TDM) – Problema que surge sob a forma de demonstração.

  - Relatório (TR) – Problema em que se pretende que o aluno elabore um relatório ou uma composição, explicando assim, o processo de resolução.

- Contexto do problema (C): Nesta categoria referimos qual é o contexto em que o problema se enquadra.
  - Geometria Métrica (CGM) – Problema de geometria métrica.
  - Geometria Analítica (CGA) – Problema de geometria analítica.
  - Aritmética (CAR) – Problema de aritmética, normalmente ligado à optimização de produtos ou somas.
  - Contexto Real Medida (CRM) – Problema em contexto real de medida em que se pretendem, normalmente, optimizar distâncias, áreas, volumes.
  - Contexto Real Física (CRF) – Problema em contexto real de física, normalmente relacionado com velocidade ou intensidade.
  - Contexto Real Economia (CRE) – Problema em contexto real da área da economia em que se pretende optimizar um custo ou um lucro.

- Função a optimizar (O): Nesta categoria referimos o que se pretende optimizar no problema em questão.
  - Distância (OD);
  - Área (OA);
  - Perímetro (OPE);
  - Volume (OV);
  - Produto (OPR);
  - Soma (OS);
  - Tempo (OT);
  - Custo (OC).

- Esquemas/ Figuras auxiliares (F): Nesta categoria referimos se o enunciado do problema vem acompanhado ou não de uma figura ou um esquema auxiliar e, no caso de ter figura, se esta é uma figura simples ou se possui algum tipo de dados auxiliares.
  - Sem esquemas (FSE) – Problemas em que o enunciado não apresenta nenhuma figura ou esquema que auxilie a resolução.

- Figura simples (FFS) – Problemas que apresentam apenas a figura ou uma ilustração.
- Figura com dados (FFD) – Problemas em que, no enunciado, surge uma figura com dados que auxiliam a resolução, normalmente surgem nos problemas geométricos ou físicos.

– Tipo de dados (D): Nesta categoria distinguimos entre os problemas que apresentam dados numéricos e os problemas que apresentam dados genéricos.
  - Dados numéricos (DN) – Problemas com dados numéricos.
  - Dados genéricos (DG) – Problemas em que se determina a solução para um qualquer valor genérico

– Tipo de enunciado (EN): Nesta categoria fazemos a distinção entre os problemas que apresentam um enunciado simples e os problemas em que o enunciado pode encaminhar o aluno na resolução do problema.
  - Enunciado simples (ENS) – Problemas em que o enunciado é simples, não havendo neste nenhum tipo de ajuda à resolução do problema.
  - Resolução encaminhada (ENE) – Problemas com notas que ajudam na resolução ou com um conjunto de questões prévias que encaminham o aluno na resolução do problema.

Segunda fase: Estabelecimento de um plano

Nesta segunda fase pretende-se encontrar a conexão entre os dados e a incógnita. Foram identificadas para esta fase três categorias.

– Função/Equação auxiliar (A): Nesta categoria fazemos a distinção entre os problemas em que a função auxiliar surge explicitamente no enunciado daqueles em que o aluno tem de identificar, a partir dos dados, qual a função auxiliar que deve usar.
  - Explícita (AE) – Problemas em que a função auxiliar surge de forma explícita, ou seja, casos em que, por exemplo, é dado o valor do

perímetro ou da área, levando o aluno a pensar que este será o dado que lhe permite tirar o valor de uma variável em função da outra.

- Implícita (AI) – Problemas em que, a partir dos dados fornecidos, o aluno tem de procurar encontrar a relação que lhe permite determinar o valor de uma das variáveis em função da outra. Frequente para problemas em que se usa a noção de distância, Teorema de Pitágoras ou semelhança de figuras.

– Noções aplicadas (N): Nesta categoria pretendemos identificar as noções que têm de ser aplicadas na resolução do problema.
  - Teorema de Pitágoras (NTP) – Problemas em que se aplica o Teorema de Pitágoras para determinar o valor de uma variável em função de outra.
  - Distância (ND) – Problemas em que se usa a fórmula de cálculo da distância entre dois pontos ou em que simplesmente se usa a noção de distância para determinar o valor de uma variável em função de outra.
  - Semelhança de Figuras (NSF) – Problemas em que se aplica a noção de semelhança de figuras.
  - Perímetro (NPR) – Problemas em que aplicamos a fórmula de cálculo do perímetro de uma figura.
  - Área (NA) – Problemas em que aplicamos a fórmula de cálculo da área de uma figura.
  - Volume (NV) – Problemas em que aplicamos a fórmula de cálculo do volume de uma figura.
  - Soma (NS) – Problemas em que utilizamos a noção de soma para escrever uma variável em função da outra, normalmente surge nos problemas aritméticos.
  - Produto (NP) – Problemas em que utilizamos a noção de produto para escrever uma variável em função da outra, normalmente surge nos problemas aritméticos.
  - Função (NF) – Problemas em que utilizamos a expressão algébrica de uma função para escrever uma variável em função da outra.
  - Funções Trigonométricas (NFT) – Problemas em que utilizamos as funções trigonométricas (sin (α), cos (α), tan (α)) para relacionar duas variáveis.

  - Magnitudes físicas (NMF) – Problemas em que utilizamos magnitudes físicas para determinar uma variável em função da outra, na maioria dos casos a fórmula da velocidade e apenas num caso a noção de intensidade.

- Estratégia (E): Nesta categoria pretendemos distinguir entre os problemas que surgem pela primeira vez e que, portanto, obrigam a pensar na estratégia de resolução e os problemas que, de alguma forma, têm características comuns com problemas que surgiram anteriormente e dos quais nos podemos socorrer para a resolução do nosso problema.
  - Histórico (EH) – Problemas que encontramos nos livros históricos analisados.
  - Exame (EE) – Problemas referidos como retirados de exame.
  - Manual (EM) – Problema que surgiu em manuais anteriores.
  - Novo (EN) – Problemas que encontramos pela primeira vez no manual em questão.

Terceira fase: Execução do plano

Nesta terceira fase pretende-se executar o plano, verificando cada passo. Encontramos para esta fase três categorias.

- Funções Utilizadas (f): Nesta categoria pretendemos identificar o tipo de função que teremos de optimizar.
  - Polinomial (fp)
  - Racional (fr)
  - Irracional (fir)
  - Trigonométrica (ft)

- Esquema de cálculo de extremos (e): Nesta categoria pretendemos distinguir as diferentes formas como são calculados os extremos da função.
  - Cálculo dos zeros da derivada (ez) – Problemas em que, para determinar o extremo, apenas se calculam os zeros da função derivada.

- Cálculo dos zeros da derivada e estudo do sinal da derivada (ezs) – Problemas em que se calculam os zeros da derivada e de depois se faz o estudo do sinal da função derivada para identificar máximos e mínimos.
- Cálculo dos zeros da derivada e estudo do sinal da 2ª derivada (ezss) – Problemas em que se calculam os zeros da derivada e depois se estuda o sinal da segunda derivada nesses pontos para identificar máximos e mínimos.
- Cálculo analítico do vértice da parábola e análise da concavidade (ev) – Problemas em que se efectua o cálculo analítico do vértice da parábola, que normalmente surge nos problemas a partir da lei de bases do sistema educativo, do 10º ano.
- Utilização da calculadora gráfica para calcular extremos (ecg) – Problemas em que o cálculo dos extremos é efectuado a partir do esboço da função a optimizar obtido na calculadora gráfica.
- Utilização de outro tipo de resolução (eo) – Problemas em que a resolução foi feita por outro processo e que surgiu apenas num problema com resolução Geométrica e Algébrica.

– Gráficos, figuras ou esquemas auxiliares (g): Nesta categoria pretendemos verificar se a resolução não apresenta qualquer tipo de esquema auxiliar ou se vem acompanhada de algum tipo de gráfico, esquema ou quadro auxiliar.
  - Sem esquemas (gn) – Problemas cuja resolução não apresentam qualquer gráfico, esquema ou figura auxiliar.
  - Com figura (gf) – Problemas em que a resolução apresenta uma figura alusiva ao problema, normalmente acompanhada de dados.
  - Com quadro de monotonia (gqm) – Problemas cuja identificação dos máximos ou mínimos é efectuado através do quadro de monotonia
  - Com gráfico da função (gg) – Problemas em que a resolução vem acompanhada do gráfico da função. Em problemas dos últimos períodos é vulgar a resolução ser feita analítica e graficamente.

Quarta fase: Reflexão

Nesta quarta e última fase pretende-se examinar a solução obtida. Esta última fase apenas tem uma categoria que se refere ao valor pedido no enunciado.

– Valor pedido (v): Nesta categoria fazemos a distinção entre os problemas em que o valor pedido surge de forma explícita e os problemas em que o valor pedido surge de forma não Explícita e, portanto, o aluno tem de perceber o que, de facto, é pedido.
    - Explicito (ve) – Problemas em que o valor pedido é feito Explicitamente.
    - Implícito (vi) – Problemas em que o valor pedido é feito implicitamente. Por exemplo, nalgumas situações pedem as dimensões de uma determinada figura sem que se peça Explicitamente um determinado valor como, por exemplo, o valor da incógnita.

3.1. INTRODUÇÃO NOS PROGRAMAS OFICIAIS DO ESTUDO DA DERIVADA

Nesta secção vamos analisar as reformas do ensino liceal em Portugal, desde a introdução do conceito de derivada nos programas oficiais, mas nas quais ainda não se contempla o estudo das aplicações desta e, consequentemente, não abordam o estudo dos problemas de optimização.

A última reforma efectuada no século XIX foi a reforma de Jaime Moniz que foi regulamentada em 18 de Abril, 14 de Agosto e 14 de Setembro de 1895. Esta foi uma das reformas melhor planeadas de toda a nossa história, mas, talvez por originar muitas alterações ao sistema que estava em vigor, não foi bem sucedida, pois fez com que o número de alunos matriculados nos liceus tivesse baixado de 3658, em 1895, para 458, em 1896. Como sofreu inúmeras críticas por parte de diversos sectores da sociedade portuguesa, houve necessidade de realizar uma outra para neutralizar as deficiências desta (Carvalho, 1985, p. 644). Esta reforma não contemplava o estudo da derivada.

Assim, a 3 de Novembro de 1905 são publicados os programas relativos à primeira reforma efectuada no século XX. Era então ministro José Coelho.

Com esta o ensino nos liceus ficou dividido em dois cursos: Curso Geral com cinco classes e o Curso Complementar com duas classes. Estando este último dividido em dois cursos: Letras e Ciências.

A disciplina de Matemática estava presente nos cinco anos do Curso Geral e nos dois anos do Curso Complementar de Ciências. Tinha uma carga horária de 5 horas na primeira classe; 4 horas na segunda e terceira; 3 horas na quarta e quinta e 5 horas na sexta e sétima classe.

Terminou então o regime do livro único, podendo os professores usar qualquer compêndio que tivesse a aprovação de uma comissão nomeada pelo governo.

Esta reforma reveste-se de uma grande importância dado que é precisamente com esta que o estudo da derivada é introduzido pela primeira vez nos programas do Ensino Secundário.

Neste programa o estudo da derivada surge no último ano de escolaridade, isto é, no 7º ano (ou classe) do Curso Complementar de Ciências e é inserida no capítulo de Álgebra. Este capítulo estava estruturado da seguinte forma:

VII classe: Álgebra

Equação do 2° grau a uma incógnita: resolução e discussão. Composição da equação. Propriedades do trinómio do 2° grau. Resolução de desigualdades do 2° grau. Discussão de problemas do 2° grau. Equações biquadradas. Equações irracionais que se reduzem a equações do 1° e 2° grau.

Sistema de duas equações a duas incógnitas, uma do 1° grau e outra do 2° grau.

Função exponencial. Nova definição dos logaritmos.

Noção de derivada; sua interpretação geométrica. Derivada de uma soma, de um produto, de um quociente, de uma potencia, de uma raiz. Derivadas de funções circulares. Revisões.

Verificamos que nesta reforma apenas se pretende ensinar as regras de derivação, não se refere o estudo das aplicações da derivada.

Ao contrário da anterior reforma, onde vigorava o regime do livro único, nesta apenas se exige que os compêndios tenham prévia aprovação de uma comissão nomeada pelo governo.

No final do programa surge a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em análise aparece a seguinte referência:

Compêndio de Álgebra para a 6ª e 7ª classe.

Este compêndio não possui nenhum problema de optimização.

Nos finais do século XIX surge um movimento de oposição ao regime monárquico. Este movimento segue para o século XX, dando origem a 5 de Outubro de 1910 à Implantação da República.

Um dos objectivos, entre outros, deste movimento, era reformar a mentalidade portuguesa e uma das formas de o fazer seria através da instrução e da educação, falando-se mesmo em "educação republicana". Esta era uma educação interessada na criação e consolidação de uma nova maneira de ser português, capaz de expurgar a Nação de quantos males a tinham mantido, e mantinham, arredada do progresso europeu, sem força, sem coragem, sem meios para sacudir de si a sonolência em que mergulhara (Carvalho, 1985, p. 651).

A 7 de Julho de 1913 foi criado novamente o Ministério da Instrução Pública. Este tinha sido criado pela primeira vez em 12 de Julho de 1870 pois até a essa data todos os assuntos relacionados com a instrução eram tratados no Ministério do Reino, ministério sobrecarregado com inúmeras pastas.

Implantada a República, iniciam-se as reformas educativas. Começam por reformar a instrução primária e a seguir o ensino universitário.

Assim, só sete anos após a Implantação da República surge a primeira reforma do Ensino Secundário do período republicano. Esta data de 17 de Abril de 1917 e foi levada a cabo por Pedro Martins. Tinha como objectivo "compilar, coordenar e sistematizar as posições sobre o Ensino Secundário, contidas em numerosas leis, decretos, regulamentos e portarias" (Carvalho, 1985, p. 683).

Nesta reforma manteve-se tudo o que estava em vigor da anterior, tendo-se apenas acrescentado, ao Curso Complementar de Letras, a disciplina de Ciências Físicas e Naturais e ao Curso Complementar de Ciências, a disciplina de Filosofia. Esta decisão não agradou aos pais nem aos alunos, uma vez que estes não viam necessidade de os alunos de Letras aprenderem Ciências e vice-versa.

Por esta razão gerou grande contestação. Os Liceus foram encerrados o que levou à revogação do decreto e regressou-se à reforma de 1905.

Alfredo Magalhães realizou, em 1918, uma nova reforma do sistema educativo. Nesta época Portugal estava sob um regime ditatorial, o que se reflectiu nas linhas orientadoras desta nova reforma.

As alterações que Alfredo Magalhães pretendia fazer no Ensino Secundário eram semelhantes às de Pedro Martins, mas ainda mais fortes.

Foi a 27 de Novembro de 1918 que foram publicados os programas relativos a esta reforma.

Nesta o estudo da derivada é feito na 6ª classe do Curso Complementar de Ciências, no capítulo intitulado Elementos de Cálculo Infinitesimal e não no capítulo dedicado à Álgebra. Vejamos como se encontra organizado este capítulo:

VI Classe: Elementos de Cálculo Infinitesimal

Teoria dos limites. Teoremas sobre os limites da soma, produto e cociente. ***Derivada: importância desta noção. Derivada de uma soma, de um produto, de um cociente, de uma potência, de uma raiz, de uma função de função.***

Noção de integral (basta mostrar a existência em casos particulares).

Aplicações

(Decreto nº 5:002 do Diário de Governo nº 257 de 28 de Novembro de 1918)

.

Podemos assim verificar que, com a criação do capítulo dedicado ao Cálculo Infinitesimal, o estudo da derivada é mais aprofundado, introduzindo-se aplicações deste.

No final do programa surge a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em análise surge a seguinte referência:

Compêndio de Álgebra Elementar e Elementos de Cálculo Infinitesimal, para as classes II, IV, V, VI e VII.

Este compêndio não possui nenhum problema de optimização.

Também esta reforma não teve futuro uma vez que o regime ditatorial que tinha sido instaurado em 1917 pelo então Presidente da República Sidónio Pais, caiu em Dezembro de 1918 com o seu assassinato.

Só em 26 de Setembro de 1919, com a proximidade do início do ano lectivo, foi publicada a nova reforma. Esta levava a assinatura de Joaquim José de Oliveira que então era o Ministro da Instrução.

Com ela introduz algumas alterações, ao nível da carga horária, bem com ao das disciplinas que constituem cada um dos cursos.

A disciplina de Matemática faz parte do elenco de disciplinas da VI e da VII classe, tendo no primeiro uma carga horária de 3 horas semanais e no segundo de 4 horas semanais.

A derivada passa a ser estudada na VII classe do Curso de Ciências, dentro do capítulo dedicado aos Elementos de Cálculo Infinitesimal. Vejamos:

VII Classe: Elementos de Cálculo Infinitesimal

Teoria dos limites. Teoremas sobre os limites da soma, produto e cociente.

Derivada: importância desta noção. Derivada de uma soma, de um produto, de um cociente, de uma potência, de uma raiz, de uma função de função, de uma função composta e de funções implícitas. Derivadas das funções circulares.

Noção de integral.

Aplicações.

(Decreto nº 6:132 do Diário de Governo nº 196 de 26 de Setembro de 1919)

Verificamos assim que o programa da disciplina de Matemática se mantém praticamente sem alterações. A derivada continua a fazer parte do capítulo de Elementos de Cálculo Infinitesimal, leccionado na VII classe, acrescentando-se apenas o estudo da derivada de uma função composta, de funções implícitas e das funções circulares.

Mas, como já referimos, também no Curso Complementar de Letras existia a disciplina de Matemática. Esta apenas fazia parte do VI ano com uma carga horária de 3 horas semanais. Este programa não se encontra dividido por temas, como no curso de Ciências, os temas aparecem todos seguidos.

Vejamos como está composto o parágrafo que inclui o estudo da derivada:

VI Classe

*Análise dalgumas demonstrações, já feitas, para a aquisição da noção de limite (ciclometria, volume do tetraedro, etc.). **Noção de derivada**, de diferencial e de integral. Aplicações simples ao cálculo das áreas e volumes do movimento e das tangentes às curvas.*

Este estudo só em casos muito simples se fará exclusivamente pelo processo analítico, todo o restante é sugerido e garantido pela geometria.

(Decreto nº 6:132 do Diário de Governo nº 196 de 26 de Setembro de 1919)

Neste programa apenas se pretende fazer uma pequena abordagem da derivada, não sendo referido o estudo da sua aplicação.

O regulamento desta reforma apenas se publica a 12 de Junho de 1920, sendo então ministro da Instrução Vasco Borges. Este regulamento será depois mandado suspender por Rego Chaves, voltando a estar em vigor o regulamento de Sidónio Pais.

A 18 de Junho de 1921, sendo já ministro da Instrução Ginestal Machado, decreta-se uma nova reforma, que é muito semelhante à anterior, não sofrendo os programas de Matemática nenhuma alteração em relação, à anterior (1919).

Esta foi a última reforma que se realizou até ao final da 1ª República, em 1926.

A 28 de Maio de 1926 dá-se um golpe militar que põe termo à Primeira República. Devido à instabilidade governamental que se vivia no momento, este movimento foi, inicialmente, bem recebido.

Instala-se então, até 1974, um regime Ditatorial que faz uso da censura à Imprensa.

A 2 de Outubro de 1926 é assinado pelo ministro Ricardo Jorge o *Estatuto da Instrução Secundária* que veio alterar, profundamente, o esquema de ensino que vigorava até então.

A escolaridade é reduzida em um ano, passando o curso complementar a ter apenas um ano. O curso Complementar de Letras deixa de ter a disciplina de Matemática.

Como consequência do encurtamento da escolaridade, os programas também são encurtados.

O capítulo relativo ao Cálculo Infinitesimal deixa de existir e a derivada passa para o capítulo dedicado à Álgebra na 4ª classe. Quanto à derivada, apenas se refere o estudo da *Noção de derivada*.

A reforma efectuada por Ricardo Jorge, uma vez que provocou inúmeras alterações, foi alvo de numerosas reclamações. Assim, a 22 de Janeiro de 1927, sendo então ministro da Instrução Alfredo Magalhães (que já fora ministro no antigo regime), publica-se um novo decreto, mas, a nível do estudo da derivada, não produziu nenhuma alteração.

Cordeiro Ramos veio a suceder a Alfredo Magalhães na pasta da Instrução. As medidas duras e repressivas no ensino liceal sofrem um agravamento.

A 14 de Janeiro de 1929 são aprovados os programas dos Cursos Complementares, pois na anterior alteração os programas não foram alterados.

Nesta reforma apenas se aborda a *noção de derivada*, na 6ª classe, no capítulo dedicado à Álgebra. Vejamos como se encontra distribuindo esse capítulo:

VI Classe: Álgebra

Números algébricos e complexos.

Noção de função; representação gráfica; noção intuitiva dos limites das funções de uma variável, de continuidade e de ***derivada; interpretação geométrica.***

Polinómios inteiros; propriedades gerais e elementares.

Fracções algébricas; significação dos símbolos:

$$\frac{m}{0}, \frac{m}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \times \infty \, e \, \infty \times \infty$$

Discussão da equação do 1° grau a uma incógnita. Análise combinatória; binómio de Newton.

(Decreto nº 16:362 do Diário de Governo nº 11 de 14 de Janeiro de 1929)

Este ministro volta a fazer uma reformulação dos programas, que foi publicada a 27 de Setembro de 1930. A derivada continua a fazer parte da 6ª classe, no capítulo dedicado à Álgebra. Agora pretende fazer-se um estudo mais minucioso da derivada, introduzindo-se conteúdos que não eram abordados no anterior programa.

Vejamos como estava organizado este capítulo:

VI Classe: Álgebra

Funções; classificação das funções; propriedades elementares das funções inteiras; principio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; aplicações. Funções fraccionárias; símbolos de impossibilidade e indeterminação. Limites de funções de uma só variável; teoremas relativos à soma, ao produto e ao cociente destes limites; exercícios sobre a determinação dos limites de funções. Função continua num ponto; função continua num intervalo; exemplos de funções continuas e representação gráfica destas funções. Função crescente num ponto e num intervalo; função decrescente num ponto e num intervalo. ***Derivada e diferencial de uma função num ponto; interpretação geométrica da derivada; derivada da soma, do produto, do cociente, da potencia, da raiz, da função de função e da função inversa.***

Análise combinatória; arranjos, permutações e combinações. Binómio de Newton; aplicações. Resolução e discussão da equação geral do 1º grau a uma incógnita. Análise indeterminada do 1º grau.

(Decreto nº 20:369 do Diário de Governo nº 232 de 8 de Outubro de 1931)

No final do programa surge a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em análise aparece a seguinte referência:

Compêndio de Álgebra, num volume, para as classes 6ª e 7ª.

Este compêndio não possui nenhum problema de optimização.

Posteriormente, Cordeiro Ramos, reforma novamente os programas, uma reforma decretada em 8 de Outubro de 1931. A derivada continua a pertencer ao programa da 6ª classe, no capítulo dedicado à Álgebra. Mas em relação à derivada, o programa não introduz nenhuma alteração.

Com Carneiro Pacheco, como Ministro da Instrução Pública, o ensino sofreu grandes alterações. A 14 de Outubro de 1936 é decretada a reforma do ensino liceal. Esta introduz grandes alterações acerca da organização curricular, deixando de existir a separação entre curso Geral e Complementar, e também terminam as opções entre Letras e Ciências. Os conteúdos programáticos são encurtados e, consequentemente, o estudo da derivada é suprimido do programa.

Posteriormente foram ministros da mesma pasta Mário Figueiredo e Caeiro Mata. Mas, uma vez que se iniciou entretanto a 2ª Guerra Mundial, não surgiram, por parte destes, reformas curriculares, tendo sido feitas apenas pequenas alterações.

Os programas das disciplinas não sofreram alterações em relação ao seu conteúdo.

Em 1945 terminou a II Grande Guerra. Esperava-se então que surgisse uma viragem na política nacional. Tal não veio a suceder, mas, pelo contrário, a repressão do Estado acentuou-se.

Seguiu-se então na pasta da Educação Pires de Lima, grande apoiante da actuação de Salazar. Por esse motivo foi um dos ministros que ocupou a pasta durante o maior período de tempo (cerca de 8 anos).

A 17 de Setembro de 1947 surge a reforma do ensino liceal. Volta-se então ao esquema de estudos alterado por Carneiro Pacheco. Assim, o Curso Geral dos Liceus volta a ter cinco anos e o Curso Complementar dois, fazendo-se de novo a separação entre Letras e Ciências. A reforma dos programas foi publicada a 22 de Outubro de 1948, que foram reduzidos e as férias foram encurtadas.

Deste modo, a derivada volta a fazer parte do programa[18], passa-a para o VII ano e continua dentro do capítulo dedicado à Álgebra. O facto do conceito passar para o VII ano mereceu várias críticas uma vez que deveria surgir no VI ano, a seguir ao estudo dos infinitésimos e no ano em que o conceito é necessário para a disciplina de Física. Vejamos como ficou estruturado este capítulo:

VII Ano: Álgebra

Análise combinatória - elementos distintos e sem repetição. Binómio de Newton.

Números complexos a duas unidades; forma algébrica; igualdade, desigualdade e operações.

Equação do 2º grau a uma incógnita, resolução algébrica e gráfica; discussão.

Equação biquadrada; resolução algébrica; discussão. Transformação de um radical duplo na soma algébrica de dois radicais simples.

Equações irracionais redutíveis ao 2º grau.

Trinómio do 2º grau; representação gráfica; propriedades. Inequações: noções gerais e princípios de equivalência. Inequações do 2º grau a uma incógnita; inequações fraccionárias que se resolvam por meio de inequações do 1º ou 2º grau a uma incógnita.

Problemas do 1º e 2º grau; discussão.

O problema das tangentes e o das velocidades; noção de derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivada das funções algébricas e das funções circulares directas; derivada da função de função.

(Decreto nº 37:112 do Diário de Governo nº 247 de 22 de Outubro de 1948)

[18] Esta tinha sido excluída do programa com a reforma de Carneiro Pacheco em 1936

Aqui a derivada aparece precedida do cálculo de tangentes. Começa então a surgir a derivada, não como mais uma noção matemática, mas como uma ferramenta que se pode aplicar à resolução de problemas de tangentes e velocidades. Não se contempla ainda, posteriormente ao estudo da derivada, o estudo das aplicações desta.

No final do programa encontra-se a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em questão vem a seguinte referência:

Compêndio de Álgebra, num volume.

Depois de o analisar, verificamos que o compêndio não aborda os problemas de optimização.

Verificamos, então, que foi no início do século XX que o conceito de derivada foi introduzido nos programas oficiais, ao longo da primeira metade do século foi sofrendo algumas alterações em relação ao ano em que se aborda, ao capítulo em que se insere e à quantidade de assuntos relacionados com a derivada que se abordam. No entanto, não encontramos problemas de optimização, em nenhum dos manuais escolares, relativos a cada uma das reformas desta primeira metade do século.

3.2. INTRODUÇÃO NOS MANUAIS ESCOLARES DOS PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

Nesta secção iremos analisar as reformas curriculares, desde a introdução dos problemas de optimização nos manuais escolares até ao início das Matemáticas Modernas.

A. Análise do programa oficial

Durante a década de cinquenta o ensino liceal sofreu apenas pequenas alterações. Entre essas alterações é de referir que em 1950 se repôs novamente o livro único, medida que provocou alguma contestação, mas que apenas veio a ser alterada em 1974. Em 1952, estando ainda Pires de Lima na pasta da Educação, é lançado o Plano de Educação Popular, Cursos de Educação de Adultos e Campanha Nacional de Educação de Adultos.

Em 7 de Setembro de 1954 são aprovados os novos programas das disciplinas do Ensino Liceal. Estes tinham como objectivo simplificar o Curso Geral de forma a adequá-lo melhor à capacidade receptiva dos alunos.

Nestes novos programas, a derivada passa novamente para o 6º ano do Curso Complementar de Ciências, continuando inserida no capítulo dedicado à Álgebra. Vejamos como ficou estruturado este capítulo:

VI Ano: Álgebra

Breves noções sobre sucessivas generalizações do conceito de número; representação geométrica do sistema de números reais. Números complexos de duas unidades; forma algébrica; igualdade, desigualdade e operações. Noção elementar de variável e de função; expressão analítica de uma função; classificação das funções; funções inversas; representação gráfica de algumas funções.

Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites.

Noção elementar de continuidade de uma função.

Derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivadas das funções algébricas. Aplicação ao estudo da variação das funções nos casos simples.

Propriedades dos polinómios inteiros.

Adição algébrica, multiplicação e divisão de polinómios.

Divisão por (x-a); polinómio identicamente nulo; polinómios idênticos; principio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; regra de Ruffini.

Fracções algébricas; Símbolos de impossibilidade; símbolos de indeterminação da forma:

$$\frac{m}{0},\frac{m}{\infty},\frac{0}{0},0\times\infty e \infty\times\infty;$$

verdadeiro valor de uma expressão que se apresenta sob a forma indeterminada.

(Decreto nº 39807 do Diário de Governo nº 198 de 7 de Setembro de 1954)

Verificamos que, após o estudo da derivada, surge apenas a indicação do estudo de aplicações desta ao estudo da variação de funções nos casos simples.

Uma vez que vigora o regime do livro único, no final do programa vem a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em análise aparece a seguinte referência:

Compêndio de Álgebra, num volume.

Esta é, sem dúvida uma reforma muito importante no âmbito da nossa investigação uma vez que os manuais relativos a esta reforma são os primeiros a contemplar o estudo dos problemas de optimização.

Até ao final da década não se publica mais nenhuma alteração nos programas. Durante a mesma o ensino da Matemática é marcado pelo ensino memorístico e mecanizado. (Ponte, 1987, p. 5)

A Pires de Lima sucedeu, na pasta da Educação, Pinto Leite e Manuel Lopes de Almeida. Mas, a nível dos programas oficiais, não realizaram nenhuma alteração.

B. Análise dos Manuais

Esta é sem dúvida uma reforma com grande importância já que é nesta reforma que encontramos, pela primeira vez, problemas de optimização nos manuais escolares.

Como vigora novamente o regime do Livro Único, neste período apenas temos um manual escolar para analisar. Foram publicados mais manuais escolares, mas estes não apresentavam problemas de optimização. No entanto, o Livro Único teve várias edições que foram sofrendo algumas alterações. Assim sendo, iremos analisar as quatro edições que nos pareceram representativas deste período.

Todos os exemplares deste manual estavam rubricados e autenticados pelo Ministério da Educação Nacional.

Autor: José Sebastião e Silva; J. D. Silva Paulo
Título: Compêndio de Álgebra
Ano lectivo: 6º e7º Ano 3ºCiclo -Ensino Liceal
Ano, editora e lugar de edição: 1958, Livraria Rodrigues
Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Secundária José Falcão
Observações: Aprovado como livro único pelo D. G. nº 18, 2ª Série de 22/01/1958

Autor: José Sebastião e Silva; J. D. Silva Paulo
Título: Compêndio de Álgebra, 6º e7º Ano - 3ºCiclo -Ensino Liceal
Ano, editora e lugar de edição: 1960, Livraria Rodrigues
Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Secundária José Falcão
Observações: Aprovado como livro único pelo D. G. nº 18, 2ª Série de 22/01/1958

Autor: José Sebastião e Silva; J. D. Silva Paulo
Título: Compêndio de Álgebra, 6º ano, 1º Tomo -Ensino Liceal
Ano, editora e lugar de edição: 1963, Lisboa: Bertrand (Irmãos), Lda.
Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Secundária José Falcão
Observações: Aprovado como livro único pelo D. G. nº 100, 2ª Série de 24/04/1963.

Autor: José Sebastião e Silva; J. D. Silva Paulo
Título: Compêndio de Álgebra, 6º ano – 1º Tomo -Ensino Liceal
Ano, editora e lugar de edição: 1968, Braga: Livraria Cruz
Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Secundária José Falcão
Observações: Aprovado como livro único pelo D. G. nº 110, 2ª Série de 08/05/1968

Caracterização e estrutura da obra: A edição do Compêndio de Álgebra de 1958 estava dividida em duas partes: uma para o sexto ano e outra para o sétimo. Os Compêndios editados a seguir já estão separados para os dois anos, um para o sexto e outro para o sétimo. Na parte dedicada ao sexto ano encontramos um capítulo dedicado à derivada. Vejamos como está estruturado este capítulo:

Derivadas:

1. Introdução
2. Conceito de derivada

3. Regras de derivação

4. Aplicações das derivadas

Exercícios

Nota histórica

Observamos que existe, da parte dos autores, uma preocupação em apresentar uma introdução que permite depois perceber melhor o conceito. Existe também uma cuidado em apresentar uma nota histórica que permite aos alunos perceber quais os matemáticos que estudaram o tema bem como as várias etapas pelas quais passou o Cálculo Diferencial.

Neste compêndio, os problemas de optimização estão no quarto ponto, dedicado às aplicações das derivadas. Neste os autores começam por explicar o sentido da variação de uma função, a partir do sinal da derivada, e a seguir apresentam a aplicação dos teoremas enunciados e por fim dois exemplos de aplicações concretas. Encontramos dois problemas de optimização enunciados como exemplos de aplicação concreta do sentido da variação de uma função, seguidos da respectiva resolução. Existem depois no final do capítulo mais sete problemas de optimização, na parte dedicada aos exercícios de aplicação, as respectivas respostas surgem no final do enunciado de todos os exercícios.

Para além deste manual escolar, vamos ainda fazer a análise um livro de exercícios da autoria de António do Nascimento Palma Fernandes. Foi assistente na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e, posteriormente, professor do Liceu Pedro Nunes, sendo autor de vários livros de texto e livros de exercícios. A obra que analisamos teve várias edições. A última que encontrámos era a décima sétima edição que foi publicada em 1971 ou 1972. Vejamos, então, a ficha da obra:

Autor: António do Nascimento Palma Fernandes

Título: Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética Racional – 6º ano dos Liceus

Ano, editora e lugar de edição: 1961, Livraria Didáctica, Lisboa, 12ª edição

Localização da obra consultada: Biblioteca Pessoal

Caracterização e estrutura da obra: A obra está dividida em três partes, a primeira dedicada à Álgebra, a segunda dedicada à Trigonometria e a última à Aritmética Racional. A parte dedicada à Álgebra está dividida em sete capítulos, sendo o quinto consagrado às derivadas e ao estudo da variação das funções. Nesse capítulo o autor começa por apresentar oito exemplos resolvidos, sendo o último um problema de optimização. Depois apresenta cinquenta e um exercícios seguidos das respostas. Os exercícios estão separados por três temas:

- *Derivadas* (38 exercícios)
- *Estudo da variação de funções* (5 exercícios)
- *Problemas de máximos e mínimos* (8 exercícios)

Todos os problemas de máximos e mínimos são problemas de optimização.

Seguem-se os problemas de optimização que encontrámos nestas obras para cada um dos contextos.

Problemas de Geometria Métrica

SP1. *Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 cm, determinar os que tenham área máxima.* (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.230)

PF5. *Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 8 m, determinar os que tenham área máxima.* (Fernandes, 1961, p. 63)

SP3. *Exprimir a área, A, dum rectângulo, como função de um dos lados, x, supondo o perímetro igual a 20. Desenhar o gráfico da função no intervalo [0, 10]. Determinar, graficamente e analiticamente, o valor de x que torna a área máxima.* (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

PF1. *Dentre os rectângulos de perímetro igual a 20 cm determinar o que tem área máxima.* (Fernandes, 1961, p. 61))

SP6. *Um rectângulo está inscrito num semicírculo de raio fixo, r. Exprimir a área, A, do rectângulo, como função da base, x. Determinar o valor de x para o qual a área é máxima.* (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

PF4. *Dentre os rectângulos de área igual a 64 dm^2 qual é aquele que tem o perímetro mínimo? (Fernandes, 1961, p. 63)*

PF6. *Dentre os sectores circulares de perímetro igual a 8 metros, qual é o raio daquele que tem área máxima? (Fernandes, 1961, p. 63)*

PF7. *Dentre os prismas quadrangulares regulares que têm de volume 8 m^3, qual é aquele que tem área total mínima. (Fernandes, 1961, p. 63)*

PF8. *Dada uma esfera de raio igual a 1 metro determinar a medida do raio do cilindro de revolução inscrito de volume máximo. (Fernandes, 1961, p. 63)*

PF9. *A soma dos perímetros de uma circunferência e de um quadrado é constante. Demonstrar que a soma das áreas do círculo e do quadrado é mínima quando o diâmetro do círculo for igual ao lado do quadrado. (Fernandes, 1961, p. 63)*

Problemas de Aritmética

SP4. *A soma de dois números x e y, é uma constante a. Quando é máximo o seu produto (P = xy)? (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)*

SP5. *O produto de dois números positivos, x e y, é uma constante k. Quando mínima a sua soma (S = x + y)? (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)*

PF2. *Dois números têm por soma 12; determinar esses números de forma que a soma dos seus quadrados seja mínima. (Fernandes, 1961, p. 63)*

PF3. *Dois números têm por soma 20; determinar esses números de forma que o seu produto tenha valor máximo. (Fernandes, 1961, p. 63)*

Problemas de Medida em Contexto Real

SP2. *Pretende-se construir uma caldeira cilíndrica, fechada, com um dado volume V, de modo que a sua área total seja mínima. Determinar o raio da base, r, e a altura, h, da caldeira em tais condições.* (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.231)

SP7. *Uma caixa rectangular, sem tampa, de capacidade v, fixa, tem base quadrada. Exprimir a área total da caixa como função do lado, x, da base. Achar o valor de x para o qual a área é mínima.* (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

SP8. *Numa folha rectangular de zinco, com dimensões de 30 cm por 40 cm, cortam-se, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, dobrando-se em seguida a folha de modo a obter uma caixa aberta na parte superior. Determinar o volume da caixa como função do lado do quadrado que se cortou em cada canto. Qual deve ser a medida do lado do quadrado para que a caixa tenha volume máximo?* (Silva e Paulo, 1963, 1968 p.253)

SP9. *Pretende-se construir um gasómetro cilíndrico de volume V. Determinar a relação que deve existir entre o raio da base e a altura para que o custo da chapa metálica empregada na construção da superfície lateral e da base seja mínimo. Supõe-se que se emprega chapa da mesma espessura e da mesma qualidade em toda a superfície.* (Silva e Paulo, 1963, 1968, p.253)

C. Análise do período

Examinando o programa oficial relativo a esta reforma verificamos que o ano em que poderemos encontrar os problemas de optimização será no sexto, uma vez que é o ano em que se introduz o estudo da derivada. Esta encontra-se no capítulo de dedicado à Álgebra, precedida do estudo dos limites e da continuidade. O programa não refere especificamente o estudo dos problemas de optimização mas, após o estudo da derivada, refere-se a aplicação desta ao estudo da variação de funções em casos simples.

E como neste período vigora o regime do Livro Único, apenas efectuámos a análise dos Compêndios de Álgebra da autoria de Sebastião e Silva e de Silva Paulo editados ao longo de vários anos. Analisamos também um livro de exercícios da autoria de Palma Fernandes visto que este também foi editado ao longo de vários anos. Em ambas as obras é referido o estudo das aplicações das derivadas ou de problemas de máximos e mínimos.

No manual de Silva e Paulo **(SP)** há nove problemas de optimização: dois são apresentados como exemplos (SP1, SP2) e sete como exercícios de aplicação. No manual de Palma Fernandes **(PF)** existem nove problemas de optimização: um surge como exemplo (PF1) e os restantes como exercícios.

Observemos agora as características dos problemas deste período.

Começando por examinar as características que se prendem com a compreensão do problema, verificamos então que, dos dezoito problemas encontrados, apenas quatro apresentavam a respectiva resolução (SP1, PF5, PF1 e SP2). O problema PF9 é uma demonstração e os restantes problemas surgem como exercícios de aplicação. Nenhum dos enunciados vem acompanhado de gráficos, figuras ou esquemas auxiliares e, em relação aos problemas que apresentavam resolução, também estes não contêm qualquer tipo de figura, gráfico ou esquema auxiliar.

Identificamos, essencialmente, problemas geométricos, dez problemas de geometria métrica (SP1, PF5, SP3, PF1, SP6, PF4, PF6, PF7, PF8 e PF9) e quatro problemas em contexto real de medida (SP2, SP7, SP8 e SP9). Os restantes quatro problemas são problemas aritméticos. Assim sendo, neste período não assinalamos nenhum problema de Geometria Analítica, Física ou de Economia.

Os problemas de Geometria Métrica são do tipo:

> " ***(PF1)*** *Dentre os triângulos de perímetro igual a 20 cm determinar o que tem área máxima*"

Observemos agora um exemplo de um problema de Aritmética:

> *" **(PF3)** Dois números têm por soma 20, determinar esses números de forma que o seu produto tenha valor máximo".*

Relativamente aos problemas de medida em contexto real, temos o exemplo seguinte:

> " ***(SP9)*** *Pretende-se construir um gasómetro cilíndrico de volume V. Determinar a relação que deve existir entre o raio da base e a altura para que o custo da chapa metálica empregada na construção da superfície lateral e da base seja mínimo. Supõe-se que se emprega chapa da mesma espessura e da mesma qualidade em toda a superfície.*"

Estes três tipos de problemas estão presentes em quase todos os manuais analisados para as reformas posteriores.

Em relação à função a optimizar vimos que, nos catorze problemas geométricos, em onze pretende-se optimizar uma área: No problema SP1 e PF5 optimiza-se a área de um triângulo rectângulo dada a medida da hipotenusa, no problema SP3 e PF1 pretende-se optimizar a área de um rectângulo dada a medida do perímetro, no problema SP6 também se optimiza a área de um rectângulo, mas neste caso é ligeiramente mais complexo visto que o rectângulo está inscrito numa circunferência, de tal modo que será necessário determinar o seu comprimento e largura em função do raio da circunferência; no problema SP6 pretende-se determinar a área máxima de um sector circular, dado o perímetro; e no problema PF9 pretende-se optimizar a soma das áreas de um círculo e de um quadrado, dada a soma dos seus perímetros. Os restantes problemas em que se pretende optimizar uma área são de geometria espacial, sendo que no problema PF7 pretende-se determinar a área total mínima de um prisma quadrangular dado o volume, nos problemas SP2 e SP9 pretende-se optimizar a área de um cilindro dado o volume e no problema SP7 pretende-se optimizar a área de um paralelepípedo dado o volume.

Nos problemas PF8 e SP8 têm como objectivo optimizar o volume: sendo que no primeiro optimiza-se o volume de um cilindro de revolução inscrito numa esfera dado o raio desta e no segundo optimiza-se o volume de uma caixa dadas as dimensões da folha a utilizar para a construir. Apenas no problema PF4 se optimiza o perímetro de um rectângulo dada a sua área. Quanto aos problemas aritméticos, verificamos que em metade se pretende optimizar a soma de dois números (SP5, PF2), no primeiro pretende optimizar-se a soma de dois números dado o seu produto e no segunda pretende-se optimizar a soma dos seus quadrados dada a sua soma. Na outra metade (SP4 e PF3) pretende-se optimizar o produto de dois números dado a sua soma.

Nenhum problema tem figuras ou esquemas auxiliares. Quanto aos dados fornecidos no enunciado do problema, verificamos que a maioria dos problemas apresenta dados numéricos e apenas sete problemas dados genéricos (SP6, PF9, SP4, SP5, SP2, SP7 e SP9). Nos dois exemplos a seguir, o primeiro apresenta dados numéricos e o segundo dados genéricos:

> " ***(PF8)*** *Dada uma esfera de raio igual a 1 metro determinar a medida do raio do cilindro de revolução inscrito de volume máximo."*
>
> " **(SP7)** *Uma caixa rectangular, sem tampa, de capacidade v, fixa, tem base quadrada. Exprimir a área total da caixa como função do lado, x, da base. Achar o valor de x para o qual a área é mínima."*

Também o enunciado é na maioria dos problemas um enunciado simples e apenas quatro dos problemas encontrados apresentam um enunciado que orienta/encaminha na resolução do problema (SP3, SP6, SP7 e SP8). Vejamos:

> " ***(SP3)*** *Exprimir a área, A, dum rectângulo, como função de um dos lados, x, supondo o perímetro igual a 20. Desenhar o gráfico da função no intervalo [0, 10]. Determinar, graficamente e analiticamente, o valor de x que torna a área máxima.*

Observamos que, neste exercício, o aluno sabe que terá de começar por determinar a área do rectângulo em função de um dos lados e que a seguir irá desenhar o gráfico da função. Estas duas questões tornam-se extremamente úteis uma vez que, quando se pede para optimizar a área, o aluno já terá quase todo o trabalho realizado.

> " **(SP6)** *Um rectângulo está inscrito num semicírculo de raio fixo, r. Exprimir a área, A, do rectângulo, como função da base, x. Determinar o valor de x para o qual a área é máxima.*"

Vemos que, neste exercício, o autor começa por pedir para exprimir a área do rectângulo em função da base e só depois pede para determinar o valor de x para o qual a área é máxima.

> " **(SP7)** *Uma caixa rectangular, sem tampa, de capacidade v, fixa, tem base quadrada. Exprimir a área total da caixa como função do lado, x, da base. Achar o valor de x para o qual a área é mínima.*"

Também neste exercício o autor começa por pedir para exprimir a área total da caixa como função do lado da base e só depois pede para determinar o valor de x para o qual a área é mínima.

> " **(SP8)** *Numa folha rectangular de zinco, com dimensões de 30 cm por 40 cm, cortam-se, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, dobrando-se em seguida a folha de modo a obter uma caixa aberta na parte superior. Determinar o volume da caixa como função do lado do quadrado que se cortou em cada canto. Qual deve ser a medida do lado do quadrado para que a caixa tenha volume máximo?*"

Neste problema o autor começa por pedir para determinar o volume em função do lado do quadrado que se cortou nos quatro cantos da folha e só depois pede para determinar o valor do lado desse quadrado de forma que o volume seja máximo.

Passando agora para as características relativas ao estabelecimento de um plano observamos que, relativamente à função auxiliar que permite relacionar as variáveis, na maioria dos problemas é uma função que surge explicitamente, estando implícita apenas em seis problemas (SP1, PF5, PF1, SP6, PF8 e SP8). Vejamos um exemplo para cada uma das situações:

> " ***(PF4)*** *Dentre os rectângulos de área igual a 64 dm² qual é aquele que tem o perímetro mínimo?*"

> " **(SP8)** *Numa folha rectangular de zinco, com dimensões de 30 cm por 40 cm, cortam-se, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, dobrando-se em seguida a folha de modo a obter uma caixa aberta na parte superior. Determinar o volume da caixa como função do lado do quadrado que se cortou em cada canto. Qual deve ser a medida do lado do quadrado para que a caixa tenha volume máximo?*"

Analisando estes dois problemas verificamos que, na primeira situação é fornecido o valor da área e pede-se para optimizar o perímetro. Assim sendo, é fácil para o aluno verificar que a função auxiliar será determinada a partir do valor da área. Em contrapartida, na segunda situação, para determinar o volume o aluno terá de determinar o comprimento, a largura e a altura da caixa, uma vez que apenas é fornecida a medida dos lados da folha e o facto de serem retirados quatro quadrados dos cantos, o aluno terá de utilizar a noção de distância para verificar que o comprimento/largura da caixa será a diferença entre o comprimento/largura da folha e o comprimento/largura dos dois cantos, e a altura da caixa será a medida do lado do quadrado a retirar dos cantos.

As noções aplicadas na resolução dos problemas são, para os problemas geométricos, a noção de distância, o Teorema de Pitágoras e as fórmulas de cálculo do perímetro, da área e do volume. A noção de distância é utilizada no problema SP8 em que é fornecida a medida dos lados de uma folha rectangular e a partir daí tem de se determinar a medida do comprimento, da largura e da altura da caixa formada depois de cortar quatro quadrados dos cantos com a mesma medida. O Teorema de Pitágoras aplica-se na resolução dos problemas SP1, PF5, SP6 e PF8: Nos dois primeiros é dada a hipotenusa de um triângulo rectângulo e pretendemos escrever a medida de um dos catetos em função do outro cateto, no terceiro problema temos de determinar a base e a altura de um rectângulo inscrito num semicírculo a partir do raio e no último pretendemos determinar o raio da base e a altura de um cilindro inscrito numa esfera, dado o raio desta. Relativamente aos quatro problemas em que se utiliza a fórmula de cálculo do perímetro (SP3, PF1, PF6 e PF9), nos dois primeiros é dado o perímetro do rectângulo, no terceiro o perímetro de um sector circular e no último a soma do perímetro de uma circunferência e um quadrado. Quanto ao problema em que se utiliza a fórmula de cálculo da área (PF4) aplica-se a fórmula de cálculo da área de um rectângulo para determinar a medida do comprimento em função da medida da largura. Quanto aos quatro problemas em que utilizamos a fórmula de cálculo do volume (PF7, SP2, SP7 e SP9), no primeiro é dado o volume de um prisma quadrangular regular que se utilizará para determinar a medida da altura em função do medida do lado da base, no segundo e no último o volume de um cilindro para determinar a medida da altura em função da medida do raio da base, no terceiro é dado o volume de uma caixa rectangular de base quadrada que tem de ser utilizada para determinar a medida da altura da caixa em função do lado da base. Para os problemas aritméticos usou-se a soma e o produto. No problema SP5 é dado o produto de dois números que será utilizado para determinar um dos números em função do outro e nos restantes três problemas (SP4, PF2 e PF3) é dada a soma de dois números que será utilizada para determinar um dos valores em função do outro.

Consideremos o exemplo de um problema em que utilizamos o Teorema de Pitágoras e um problema aritmético em que se utiliza o produto:

> " ***(SP1)*** *Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 cm, determinar os que tenham área máxima."*

> ***" (SP5)*** *O produto de dois números positivos, x e y, é uma constante k. Quando mínima a sua soma (S = x + y)?"*

Para delinear a estratégia de resolução dos problemas, verificamos que onze problemas surgem pela primeira vez neste período, quatro já tinham surgido nas obras históricas (PF1, PF7, SP3, SP4) e três foram retirados do enunciado de exames (SP1, PF5, SP2).

Passemos agora às características que se prendem com a execução do plano. Começando pelo tipo de funções utilizadas para optimizar, vimos que apenas surgem três tipos de funções. Na maioria dos problemas surge para optimizar uma função polinomial, em cinco problemas aparece uma função racional (PF4, PF7, SP2, SP7 e SP9) e apenas em três problemas uma função irracional (SP1, PF5 e SP6). Nos problemas em que surge uma função racional, esta surge porque se utilizou a fórmula de cálculo da área ou do volume para determinar o valor de uma variável em função da outra variável, Quanto aos três problemas em que se chega a uma função irracional, esta surge uma vez que se aplicou o Teorema de Pitágoras para determinar o valor de uma das variáveis em função da outra variável.

Quanto ao esquema utilizado para o cálculo de máximos e mínimos, nos problemas que apresentam resolução, notamos que os autores começam por calcular a derivada da função a optimizar, depois calculam os zeros da derivada e, por fim, estudam o sinal da derivada, concluindo a seguir se o ponto é um máximo ou um mínimo. Vejamos o exemplo de resolução de um dos problemas:

> " ***(SP1)*** *Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 cm, determinar os que tenham área máxima."*

Resolução:

1. Equacionar os dados do problema e determinar a equação que se pretende optimizar em função de uma só variável

Representamos por x e y as medidas dos catetos de um tal triângulo, a sua área, S, será: S = xy/2. Mas tem-se $x^2 + y^2 = 36$, donde y = $\sqrt{36-x^2}$. Podemos pois exprimir S como função só de x:

$$S = \frac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}$$

2. Derivar a equação

Ora a derivada de S em relação a x é:

$$S' = \frac{1}{2}\sqrt{36-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{36-x^2}} = \frac{18-x^2}{\sqrt{36-x^2}}$$

3. Estudar o sinal da derivada e relacionar o sinal da derivada com a monotonia da função

Como o denominador da última fracção é sempre positivo, o sinal de S' será o de $18 - x^2$. Tem-se pois S' > 0, S' < 0 ou S' = 0, conforme for

$$18 - x^2 > 0,\ 18 - x^2 < 0 \text{ ou } 18 - x^2 = 0,$$

Isto é, conforme $x < \sqrt{18}$, $x > \sqrt{18}$ ou $x = \sqrt{18}$. Logo, a função S de x (com x > 0) será crescente para $x \leq \sqrt{18}$ e decrescente para $x \geq \sqrt{18}$;

4. Conclusão e resposta ao problema

É portanto máxima para

$$x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{, sendo então } y = \sqrt{36-x^2} = 3\sqrt{2}$$

-em conclusão: os triângulos de área máxima, entre aqueles considerados, são isósceles.

Para terminar, em relação à reflexão, observamos que o valor pedido é explícito em onze problemas, ou seja, o autor indica claramente o valor que pretende. O valor pedido é implícito nos restantes sete problemas, ou seja, nestes o autor não indica explicitamente o valor que pretende. Consideremos um exemplo de cada uma das situações:

*“ **(PF6)** Dentre os sectores circulares de perímetro igual a 8 metros, qual é o raio daquele que tem área máxima? (Fernandes, 1961, p. 63)”*

*“ **(PF7)** Dentre os prismas quadrangulares regulares que têm de volume 8 m^3, qual é aquele que tem área total mínima. (Fernandes, 1961, p. 63)”*

No primeiro problema é pedido explicitamente o valor do raio enquanto que no segundo problema é pedido o prisma quadrangular regular com área total mínima, não se especificando qual a medida que se pretende, subentende-se que se pretende a medida do lado da base e a medida da altura.

Assim sendo, verificamos que este período é caracterizado por problemas em que não surge qualquer esquema, figura ou gráfico como auxiliar da interpretação do problema ou para ajudar na resolução. Não aparecem problemas de Geometria Analítica, de Física ou Economia e também não surgem problemas para apresentar um relatório.

Os dados obtidos na análise dos problemas de optimização deste período estão sintetizados na tabela a seguir.

3.3. INTRODUÇÃO DAS MATEMÁTICAS MODERNAS

A introdução das Matemáticas Modernas em Portugal, nos anos sessenta, foi vista como uma "Revolução no ensino". Era desta forma que era referida pelos meios de comunicação.

Esta revolução surge na sequência do que se vinha fazendo nos outros países, em muitas situações, por indicação de organismos internacionais. Em 1959 a Organização Europeia de Cooperação Económica (OECE) promoveu uma reunião de duas semanas em Royamont, França, com o tema "As novas matemáticas". Foi discutida então a necessidade de uma apresentação moderna da Matemática no Ensino Secundário.

Uma das conclusões mais importantes desta reunião foi a necessidade de modernizar o ensino da matemática. Para essa modernização era indispensável que cada país redigisse novos compêndios e os submetesse a ensaios sistemáticos.

José Sebastião e Silva (1914-1972) ocupou uma posição de destaque na introdução das Matemáticas Modernas em Portugal. Era licenciado em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Ciências de Lisboa na qual continuou depois como assistente, e, mais tarde, em 1960, foi nomeado professor catedrático, leccionando as disciplinas de Análise Superior e de História do Pensamento Matemático.

Foi também professor catedrático do Instituto Superior de Agronomia, e atendendo aos seus méritos, fora convidado por inúmeras e conceituadas universidades para realizar cursos e conferências acerca dos seus trabalhos de investigação.

Integrou o Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, onde publicou um vasto número de artigos de grande valor científico, reconhecidos a nível internacional. Assumiu posteriormente a sua direcção dando-lhe uma nova dinâmica.

Para além da rica carreira científica, assumiu também um papel fundamental na introdução das Matemáticas Modernas em Portugal. Presidiu à Comissão de estudos para a modernização do Ensino Liceal, nomeada pelo então ministro Galvão Teles. Publicou manuais e guias de utilização dos compêndios para alunos e professores e ministrou igualmente cursos de preparação ou de actualização para os professores dos liceus.

3.3.1. A REFORMA DE SEBASTIÃO E SILVA (1963)

Desde 4 de Dezembro de 1962, a pasta da educação é ocupada por Inocêncio Galvão Teles. A ele se deve o primeiro passo institucional para a introdução das Matemáticas Modernas em Portugal.

A. Análise do programa oficial

Dado o estado de degradação em que o ensino da Matemática se encontrava nesse momento, imperando um método de ensino desactualizado e incorrecto, foi nomeada uma comissão[19], em Julho de 1963, com o objectivo de realizar estudos e experiências sobre a actualização dos programas da disciplina de Matemática do 3º ciclo de Ciências do Ensino Liceal, tendo em conta as alterações que os programas de Matemática vinham a sofrer a nível internacional. Essa comissão era formada por quatro membros: José Sebastião e Silva (Presidente), Jaime Furtado Leote, Manuel Augusto da Silva e António Augusto Lopes.

Foram então criadas turmas piloto de Matemática Moderna, para o 6º e 7º ano do Liceu. Foi também nomeada uma comissão de eminentes professores de Matemática das universidades, das escolas secundárias e das instituições encarregadas de formar professores do Ensino Secundário. Esta comissão apresentou depois um relatório dos seus trabalhos contendo sugestões importantes.

Assim, o Ensino Secundário (com 6 anos) foi dividido em dois ciclos de três anos cada um. Os programas foram adaptados aos métodos tradicionais dos países que empreenderam a modernização dos seus programas. Considerou-se ainda que o ensino elementar das matemáticas não se devia procurar a abstracção, mas sim partir de bases concretas (Diário Popular, 06/03/1963).

Para além dos compêndios e guias para professores e alunos, era também necessário realizar cursos de preparação ou de actualização. Por isso, no ano lectivo de 58/59 Sebastião e Silva realizou no liceu Pedro Nunes uma série de palestras intituladas "Introdução à Lógica Simbólica e os Fundamentos de Matemática". Posteriormente, no ano lectivo 62/63, também a pedido dos professores, orientou um curso de "Introdução à

[19] Comissão de estudos para a modernização do Ensino Liceal

Matemática Moderna", na Faculdade de Ciências de Lisboa. Estes cursos tiveram uma forte adesão por parte dos professores. No ano seguinte foi ministrado novamente o mesmo curso, promovido pelo Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, que igualmente teve uma forte adesão dos professores.

Entre 1963 e 1966, Sebastião e Silva dedicou-se à escrita dos manuais (texto - piloto) e guias. Estes eram uma preciosa ajuda para a preparação das aulas dos professores. Os textos foram divididos em 3 volumes. Um para o 6º ano, e dois para o 7º ano. Cada um destes vinha acompanhado de um guia com algumas recomendações e orientações metodológicas.

Os programas sofreram uma alteração significativa. Foram introduzidos novos temas: Lógica, Teoria de Conjuntos, Álgebra, Cálculo Integral, Probabilidades, Estatística e Cálculo Numérico Aproximado. A Aritmética Racional foi suprimida do programa e todos os outros temas se mantiveram inalterados.

Assim, após realizadas as experiências nas turmas – piloto, procedeu-se, em 1967, à introdução em todos os liceus dos programas das Matemáticas Modernas. Em 1968 foram publicados os do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário (Portaria nº23:601 do Diário de Governo nº 213, Iª série, 2º suplemento de 9 de Setembro de 1968).

Nesses novos programas volta a ser criado um capítulo dedicado ao Cálculo Diferencial e o estudo da Derivada volta novamente para o 7º ano. Veja-se como ficou estruturado este capítulo.

Índice dos compêndios de Matemática do Ensino Complementar de Sebastião e Silva 1963/64

Volume II (7º Ano)

Capítulo I. Introdução ao cálculo diferencial

1. Cálculo numérico aproximado

2. Teoria dos limites de sucessões

3. Limites de funções de variável real

4. Derivadas

- *Conceitos fundamentais e regras de derivação*
- *Conceito de diferencial*
- *Regras de diferenciação*
- *O conceito de diferencial nas ciências da natureza*
- *Derivadas das funções exponencial e logarítmica*
- *Derivada da função logarítmica*
- *Derivadas das funções circulares*
- ***Máximos e mínimos: concavidade e inflexões***

- *Teorema de Cauchy*
- *Método da tangente (ou de Newton)*
- *Método da corda (ou regra da falsa posição)*
- *Interpolação por diferenças finitas*

Verificamos que o estudo da derivada é agora mais aprofundado do que anteriormente, referindo-se, pela primeira vez, o estudo dos máximos e mínimos.

Posteriormente a Galvão Teles, entre 19 de Agosto de 1968 e 15 de Janeiro de 1970, a pasta da Educação foi ocupada por José Hermano Saraiva. Este não fez nenhuma alteração a nível dos programas oficiais, concretamente no programa da disciplina de Matemática.

B. Análise dos Manuais Escolares

Uma vez que Sebastião e Silva dirigia a experiência de modernização do ensino da Matemática em Portugal, foi ele o autor dos textos-piloto, bem como dos guias de utilização dos mesmos textos utilizados pelos professores e pelos alunos nas turmas envolvidas nesta experiência. Sendo assim, iremos apenas analisar, nesta parte, este texto piloto.

Autor: J. Sebastião e Silva
Título: *Compêndio de Matemática*, 7º Ano
Ano, editora e lugar de edição: 1965, Lisboa: G.E.P.A.E.
Localização da obra consultada: Biblioteca Pessoal

O referido texto foi dactilografado pelo autor e foi editado pelo Ministério da Educação Nacional com a cooperação da O.C.D.E., de acordo com o 2º Projecto Especial STP-4/SP/Portugal.

Posteriormente, em 1976, após o falecimento do autor, estes textos-piloto foram publicados pelo Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica.

Na obra, Sebastião e Silva não apresenta nenhum problema de optimização, mas no ponto denominado "Máximos e mínimos: concavidade e inflexões" refere o seguinte:

Sobre estes assuntos seguir o Compêndio de Álgebra. Como já foi observado atrás, convirá até começar a tratá-los imediatamente após terem sido dadas as primeiras regras da derivação (antes do conceito de diferencial), para que o aluno tome contacto, o mais cedo possível, com as aplicações concretas do estudo das derivadas.

Concluímos então, que apesar de este compêndio não apresentar nenhum problema de optimização, o autor refere que se faça o estudo dos problemas apresentados no Compêndio de Álgebra. As várias edições desta obra foram analisadas no sub-capítulo3.2.

Observamos ainda, neste parágrafo, a preocupação do autor em apresentar para o tema das Derivadas, o mais cedo possível, as aplicações concretas para que os alunos tenham noção da aplicabilidade do tema em estudo.

3.3.2. A REFORMA DE VEIGA SIMÃO (1973)

A partir de 15 de Janeiro de 1970, a pasta da Educação foi ocupada por José Veiga Simão. Cerca de um ano depois de ter tomado posse apresenta dois documentos com vista a reformar o ensino. O Projecto do Sistema Escolar e as Linhas Gerais da Reforma do Ensino Superior. Promulgou ainda a Lei Orgânica do Ministério da Educação onde foi criada, entre outras, a Direcção do Ensino Secundário.

A. Análise do programa oficial

Após muita discussão e debate na Assembleia Nacional, A *Lei de Bases do Sistema Educativo*, foi publicada a 25 de Julho de 1973. No entanto, esta não chegou a ser implementada, uma vez que a 25 de Abril, de 1974, se deu a Revolução de Abril, que derrubou a ditadura.

Em Outubro de 1973 a escolaridade obrigatória é alargada para oito anos.

Os programas da disciplina de Matemática sofrem uma alteração em Junho de 1973. Nesta data a Direcção do Ensino Secundário publica o novo programa para o Curso Complementar dos liceus. Neste, é clara a influência do já falecido Sebastião e Silva uma vez que diz ainda respeito às Matemáticas Modernas.

Deste modo, o tema em estudo continua a fazer parte do 5º ano (antigo 7º ano), inserido no capítulo dedicado à Análise Infinitesimal. Observe-se como se encontra estruturado o programa de Matemática do 5º ano:

Programas de Matemática do Curso Complementar para o ano lectivo de 1974/75

5º Ano

2. Introdução à análise infinitesimal

2.1. Limites de sucessões

2.2. Limites de funções reais de variável real

2.3. Funções continuas

2.4. Derivadas e primitivas.

Derivada de uma função num ponto; significado geométrico. Derivabilidade e continuidade. Função derivada. Interpretação cinemática do conceito de derivada. Regras de derivação. Derivada da função inversa e da função composta. ***Aplicações das derivadas:*** *sentido da variação de uma função, concavidades, gráficos e*

***problemas concretos**. O problema da primitivação. Primitivação imediata e primitivação por decomposição. Aplicações simples do cálculo de primitivas.*

(DGES, Diário de Governo nº 149,I Iª série de 27 de Junho de 1973)

Como facilmente se infere, é possível verificar que o programa não refere explicitamente o estudo de problemas de optimização, mas refere o estudo das aplicações das derivadas a problemas concretos.

Foram também publicados os programas da Matemática Clássica para o 1º ano do Curso Complementar – antigo 6º ano, uma vez que, apesar de o ensino das Matemáticas Modernas já estar generalizado, ainda havia turmas onde se leccionavam estas matemáticas. Este programa é uma redução do programa anterior.

Curso Complementar – Matemática Clássica

Esquema Programático – 1º ano

2.7. As funções de variável natural. Limites de Sucessões

Limites de funções de variável real: continuidade

Derivadas: definição de derivada de uma função num ponto e sua interpretação geométrica.

Derivabilidade e continuidade (Com demonstração).

A função derivada. Regras de derivação, incluindo a derivada da raiz. Dedução nos casos da soma, produto, potência e derivada da função inversa.

***Aplicação a problemas de máximos e mínimos** e representação gráfica de funções.*

(DGES, Diário de Governo nº 149,I Iª série de 27 de Junho de 1973)

Pelo que se conclui, então, que a derivada é abordada no final do primeiro ano. O programa considera que se faça o estudo da aplicação da derivada a problemas de máximos e mínimos. Não se refere ainda a abordagem dos problemas de optimização.

B. Análise dos Manuais Escolares

Apesar de, em 1973, já estar em vigor, em todos os liceus, o programa da Matemática Moderna, existiam ainda turmas onde se leccionava a Matemática Clássica. Por isso, ainda encontramos uma edição de um manual de 1973, da autoria de Ondina

Vasconcelos, com o programa da Matemática Clássica, manual que iremos analisar nesta secção.

Em relação às Matemáticas Modernas, seleccionámos um manual da autoria de Madalena Garcia, Alfredo Osório e António Ruivo e dois livros de exercícios: um da autoria de Fernando Borja Santos e o outro da autoria de Loureiro de Amorim.

Seguem-se as fichas de cada uma das quatro obras:

Autor: Ondina Vasconcelos

Título: Compêndio de Matemática, 1º CC (Antigo 6º) Matemática Clássica

Ano, editora e lugar de edição: 1973, Porto Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca da Universidade de Trás-os-Montes

Caracterização e estrutura da obra: Esta obra é constituída por dezassete capítulos, sendo o último dedicado às derivadas. O Capítulo que se refere às derivadas está estruturado da seguinte forma:

1. *Derivada de uma curva num ponto. Conceito de tangente*
2. *Conceito de derivada*
3. *Regras de derivação*
4. ***Aplicações das derivadas***

Encontramos os problemas de optimização no quarto ponto, dedicado às aplicações das derivadas. Este ponto começa por abordar o sentido da variação de uma função, apresentando depos a aplicação dos teoremas relativos ao sentido da variação de uma função, a seguir as concavidades e inflexões, e, por fim, as aplicações concretas, onde se encontram os problemas de optimização.

Autor: Fernando Borja Santos

Título: Sebenta de Matemáticas Modernas – 5º Ano C.C. – Vol. I

Ano, editora e lugar de edição: 1974

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Secundária José Falcão.

Caracterização e estrutura da obra: Fernando Borja Santos era Licenciado em Ciências Matemáticas. A obra tem 398 páginas e está escrita à máquina.

Esta obra era essencialmente um livro de exercícios já que contém 500 exercícios resolvidos e explicados. Para cada um dos temas o autor começa por apresentar uma explicação teórica e posteriormente apresenta os exercícios respectivos.

A parte dedicada ao crescimento e concavidades está estruturada da seguinte forma:

- *Variação duma função; Máximo relativo; Mínimo relativo; Determinação dos pontos de máximo e mínimo; Exercícios*
- ***Problemas de máximos e mínimos;*** *Exercícios*
- *Derivadas de ordem superior; Concavidade e inflexão; Exercícios*
- *Tangentes nos pontos de inflexão; Exercícios*
- *Assintotas; Exercícios*

Autor: Madalena Garcia; Alfredo Osório; António Ruivo

Título: *Compêndio de Matemática* – 2º Ano C. C. V1

Ano, editora e lugar de edição: 1975, Empresa Literária Fluminense

Localização da obra consultada: Biblioteca Pessoal

Observações: D.L. nº 47 587 de 10/3/1967 (Experiências Pedagógicas)

Caracterização e estrutura da obra: Este manual tem 174 páginas, tem capa rija com a imagem de um referencial e algumas definições em linguagem matemática.

Os autores referem no prefácio o seguinte:

> *"Este compêndio de Matemática para o segundo ano do Curso Complementar dos Liceus foi elaborado, na linha de rumo do Compêndio do primeiro ano, tomando como base os textos para os programas experimentais da autoria do Professor Doutor Sebastião e Silva."*

Observamos então que a influência dos textos do Professor Sebastião e Silva é marcante na elaboração destes manuais.

O capítulo dedicado às derivadas está estruturado da seguinte forma

- Derivada de uma função num ponto: significado geométrico
- Derivabilidade e continuidade
- Função derivada
- Regras de derivação
- Derivada de uma função inversa
- Derivada de uma função composta
- **Aplicações das derivadas**

Os problemas de optimização encontram-se na parte dedicada às aplicações da derivada.

Nesta parte, os autores começam por explicar o estudo da variação de uma função. A seguir explicam o estudo das concavidades de uma função e por fim mostram problemas concretos, entre os quais estão alguns problemas de optimização.

Os mesmos autores também publicaram um manual na reforma que se segue mas, em relação aos problemas de optimização, não é feita nenhuma alteração.

Autor: J. A. Loureiro de Amorim

Título: *Exercícios de Matemática* – 2º Ano CC.

Ano, editora e lugar de edição: 1977

Localização da obra consultada: Didáctica Editora

Caracterização e estrutura da obra: Uma vez que esta obra é um livro de exercícios, começa por apresentar uma síntese da parte teórica seguida de exercícios resolvidos e depois exercícios para resolver.

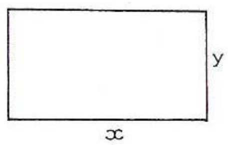
O capítulo dedicado às derivadas está estruturado da seguinte forma:

- Definição
- Regras de derivação
- Aplicações das derivadas
- Crescimento de uma função
- Máximos e mínimos
- Concavidades
- **Aplicações concretas**

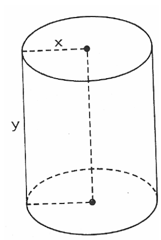
Os problemas de optimização encontram-se no ponto dedicado às aplicações concretas.

Passemos agora à análise dos problemas de optimização encontrados nestas obras.

Problemas de Geometria Métrica

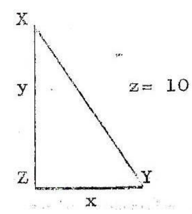


OV1. *A medida da área de um rectângulo é A e o perímetro é 18. Determinar a medida de cada uma das dimensões do rectângulo de área máxima. (Vasconcelos, 1973, p. 404)*



OV4. *O perímetro de um rectângulo é 2p. Determine as medidas das suas dimensões, de modo que seja, máximo o volume do cilindro por ele gerado, ao efectuar uma rotação completa em torno de um dos lados. (Vasconcelos, 1973, p. 408)*

BS1. *Determinar o triângulo rectângulo de área máxima e cuja hipotenusa seja igual a 10 metros. (Santos, 1974, p. 368)*

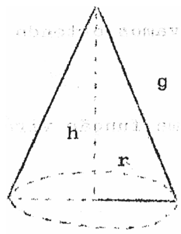


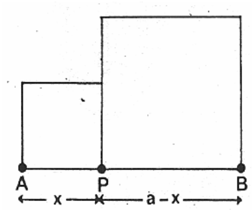
BS2. *Dentre os cilindros de volume igual a 16π, determine os que têm área total mínima. (Santos, 1974, p. 370)*

BS4. *Dentre os rectângulos de perímetro igual a 16, qual o que tem área máxima? (Santos, 1974, p. 371)*

BS5. *Dentre os rectângulos de área igual a S, qual o que tem perímetro mínimo? (Santos, 1974, p. 372)*

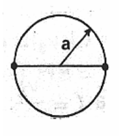
BS6. *Determine a altura que deve ter um cone de revolução cuja geratriz mede 9 cm, para que o seu volume seja máximo? (Santos, 1974, p. 373)*



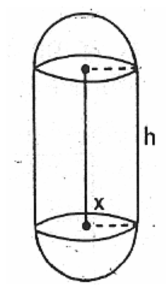


GOR2. *Determinar num segmento [AB] de comprimento a (fixo), um ponto P de modo que seja mínima a soma das áreas dos quadrados de lados* $\overline{AP}$ *e* $\overline{PB}$*. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 153)*

GOR3. *Um sólido é constituído por um cilindro de raio da base x e de altura h e por duas semiesferas assentes sobre as bases do cilindro e de raio igual ao raio da base deste.*



Supondo a superfície total do sólido igual a 4πa^2 e variáveis x e h, averiguar qual é o sólido de volume máximo. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 154)

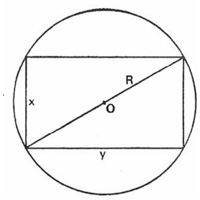


GOR4. *Averigúe de entre os rectângulos de área igual a 64 dm^2, qual é aquele que tem o perímetro mínimo. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 157)*

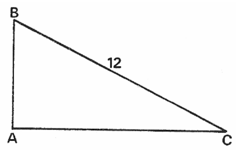
GOR5. *Considere os paralelepípedos rectângulos de base quadrada em que a soma das medidas das suas dimensões é 3.*

Determine a altura daquele que apresenta máximo volume. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 157)

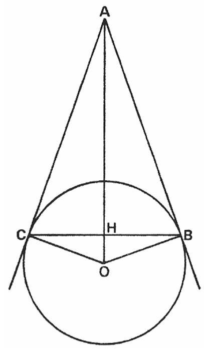
GOR6. *Exprima a área A de um rectângulo como função de um dos lados x, supondo que o perímetro é 20. Desenhe o gráfico da função no intervalo [0, 10]. Determine graficamente e analiticamente o valor de x que torna a área máxima. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 157)*



LA5. *Entre todos os rectângulos inscritos num círculo de raio R, qual será o que tem área máxima? (Amorim, 1977, p. 145)*



LA10. *Qual é a maior área que pode ter um triângulo rectângulo de hipotenusa 12 m? (Amorim, 1977, p. 150)*



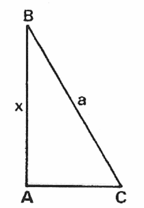
LA11. *Dois pontos A e O distam de a. Com centro no ponto O descreve-se uma circunferência de raio variável R e do ponto A tiram-se duas tangentes a essa circunferência.*

a) Qual é o triângulo isósceles, formado pelas duas tangentes e a corda que une os pontos de contacto, que tem superfície máxima?

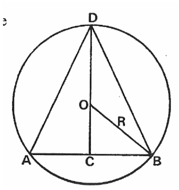
b) Qual é o quadrilátero formado pelas duas tangentes e pelos raios que passam pelos pontos de contacto, que tem superfície máxima? (Amorim, 1977, p. 152)

LA17. *Que relação há entre o raio e a altura de um cilindro de revolução (aberto na parte superior) que, entre todos os que tem o mesmo volume V, tem a menor superfície? (Amorim, 1977, p. 157)*

LA18. *Quais são as dimensões de um rectângulo que tem 196 m² de superfície, sabendo que o seu perímetro é mínimo? (Amorim, 1977, p. 157)*



LA13. *Um triângulo rectângulo de hipotenusa a dada, roda em torno do cateto maior. Qual é o máximo volume gerado que se pode obter? (Amorim, 1977, p. 155)*



LA14. *Inscrever numa esfera de raio R um cone cuja superfície lateral seja o maior possível. (Amorim, 1977, p. 155)*

LA15. *Dividir um comprimento de lado l, em dois segmentos tais que o produto dos seus comprimentos seja máximo. (Amorim, 1977, p. 157)*

LA16. *De todos os cilindros de revolução que tem a mesma superfície total de 1 dm².quais são as dimensões daquele que tem o maior volume? (Amorim, 1977, p. 157)*

LA21. *Num triângulo equilátero cujo lado a é dado, inscrever outro triângulo equilátero com a menor superfície possível.*

Concretizar para a = 12 m. (Amorim, 1977, p. 159)

LA22. *Num círculo de raio R traça-se uma corda perpendicular a um diâmetro e unem-se as extremidades da corda às extremidades do diâmetro. Calcular o máximo da diferença das duas superfícies dos dois triângulos que tem a corda comum como base. (Amorim, 1977, p. 159)*

LA23. *Num círculo de raio R traçar uma corda de maneira que fazendo-a girar em torno do diâmetro que lhe é paralelo, a superfície engendrada seja máxima. (Amorim, 1977, p. 159)*

LA24. *De todos os cilindros que tem a mesma superfície total $2\pi a^2$ qual é o que tem volume mínimo? (Amorim, 1977, p. 160)*

Problemas de Geometria Analítica

LA20. *Encontrar o caminho mínimo para ir de um ponto A a outro B, tocando uma dada recta r (os pontos A e B ficam do mesmo lado da recta). (Amorim, 1977, p. 159)*

Problemas de Aritmética

OV2. *A soma de dois números x e y, é uma constante a. Quando é máximo o seu produto? (Vasconcelos, 1973, p. 405)*

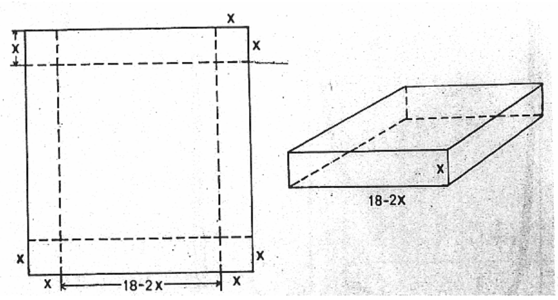
OV3. *O produto de dois números x e y é um constante a. Quando é mínima a sua soma? (Vasconcelos, 1973, p. 407)*

BS3. *Dividiu-se 32 em duas partes. Determinar esses números de forma que o seu produto seja máximo. (Santos, 1974, p. 370)*

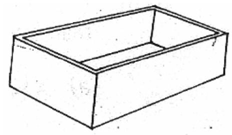
LA3. *Quais serão os dois menores números que, diferindo de 4, dão um produto mínimo? (Amorim, 1977, p. 144)*

LA8. *Decompor o número 20 em duas partes de modo que a soma dos seus quadrados seja mínima. (Amorim, 1977, p. 149)*

Problemas de Medida em Contexto Real



GOR1. *Numa folha de cartolina quadrada de 18 dm de lado pretendem-se cortar, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, construindo-se seguidamente, por dobragem conveniente, uma caixa aberta na parte superior. Determinar a medida do lado do quadrado a cortar em cada canto para que a caixa tenha volume máximo. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 152)*



GOR7. *Na figura está representada uma caixa aberta em que a base é um rectângulo cujo comprimento é o dobro da largura.*

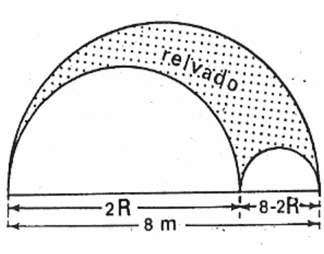
a. Prove que, se a área total da caixa é 54 dm², o volume da caixa é dado em dm³ pela expressão

$$18x - \frac{2x^3}{3}$$

Em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.

b. Determine o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo e indique o valor do volume nesse caso. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 157)

(Exame de 1971 – 1ª chamada)



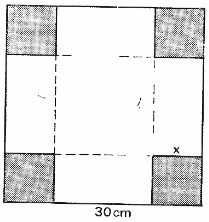
GOR8. *Num canteiro semicircular, cujo raio tem 4 m de comprimento, são reservados, de acordo com a figura, dois canteiros, igualmente semicirculares, destinados ao cultivo de flores, sendo para relvado a parte restante.*

a. Mostre que a área do relvado é

$\pi(4R - R^2)$ metros quadrados

b. Investigue quais as medidas que deverão ter os raios dos canteiros das flores para que seja máxima a área do relvado. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 158)

(Exame de 1970 – 2ª época)

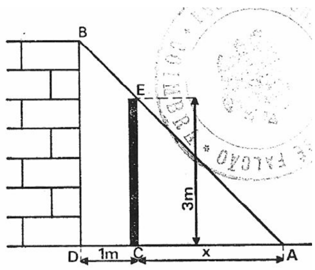


LA1. *Dispõe-se de uma folha de cartão de forma quadrada com 30 cm de lado. Com ela pretende-se fabricar uma caixa, cortando em cada canto um quadrado de lado x. Para que valor de x será mínimo o volume da caixa? (Amorim, 1977, p. 142)*

LA2. *Paralelamente ao muro de uma casa, ergue-se outro muro de 3 m de altura.*

A distância da casa à face do muro que está mais afastada é de 1 m.

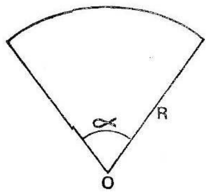
Qual será o comprimento mínimo das travessas que tocam o solo e a casa, apoiando-se sobre o muro? (Amorim, 1977, p. 143)



LA4. *Pretende-se fazer uma caçarola de alumínio utilizando uma folha de superfície dada S.*

Que relação deve existir entre a altura h e o raio R para que o volume seja máximo? (Supõe-se ausência de tampa e de desperdícios). (Amorim, 1977, p. 144)

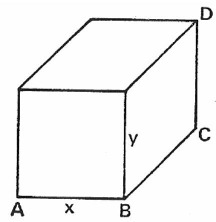
LA7. *Temos um círculo metálico de raio R e queremos cortar nele um triângulo isósceles com a maior superfície possível. (Amorim, 1977, p. 148)*



LA9. *Um jardineiro quer construir um canteiro com a forma de sector circular para o que dispões de 100 m de fio de ferro.*

Como deve ele proceder para obter um canteiro com a maior superfície possível? (Amorim, 1977, p. 149)

LA12. *Construir uma caixa prismática, de base quadrada, sem tampa, de forma que, $S = a^2$ tenha o máximo volume. (Amorim, 1977, p. 154)*



Problemas de Física

GOR9. *Ás oito horas um navio B encontrava-se a 65 km a oeste de outro navio A. B navega rumo a leste, à velocidade de 10 km/h enquanto A navega rumo a norte, com velocidade de 15 km/h.*

a. Mostre que, em cada instante, a distância em km que separa os dois navios é dada pela expressão

$$\sqrt{(65-10t)^2+225t^2}\ ,$$

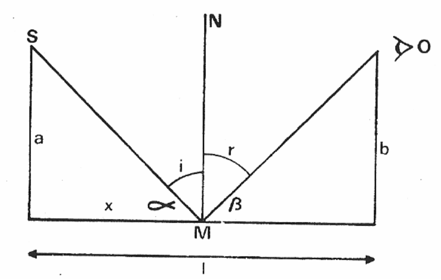
representando t o número de horas decorridas a partir das oito horas até esse instante.

b. Calcule a hora a que os dois navios se encontrarão à distância mínima. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 158

(Exame de 1970 – 1ª chamada)

***LA6.** Problema da reflexão da luz.*

Dado um espelho plano e uma fonte luminosa S, procurar a posição do ponto M onde um raio partindo de S incidirá sobre o espelho e se reflectirá na vista do observador sabendo que a luz se propaga em linha recta seguindo o caminho mais curto. Supõe-se, figura junta, conhecidos a, b, e l e determina-se a posição do ponto M por meio de x. (Amorim, 1977, p. 146)



Problemas de Economia

***LA19.** 400 pessoas assistem a um espectáculo cujos lugares custam 30\$00. Se o número de assistentes diminuir de 40 pessoas quando o aumento de preço dos lugares for de 10\$00, pretende-se saber qual será o aumento de preço que permitirá uma receita mais elevada. (Amorim, 1977, p. 157)*

C. Análise do período

Comecemos por fazer uma análise do programa relativo a esta reforma. Nesta, a derivada é abordada no 5º ano do Curso Complementar (actual 11º ano), inserida no capítulo destinado ao Cálculo Infinitesimal. O estudo da derivada é precedido do tratamento dos limites e continuidade. Existe um ponto específico que contempla o estudo das aplicações da derivada. Neste programa ainda não são utilizadas as calculadoras e não é feita qualquer sugestão ao manual a utilizar.

Assim sendo, uma vez que já não está em vigor o regime do Livro Único, detectámos um grande número de manuais escolares e de livros de exercícios para esta reforma. Como consequência também o número de problemas identificados, nos manuais seleccionados para analisar, é bastante superior ao número de problemas observados no período anterior, passamos de 18 problemas no período anterior para 43 nos manuais analisados neste período.

Relativamente aos problemas de optimização encontrados nos quatro manuais analisados neste período verificamos que, o manual da autoria de Ondina Vasconcelos **(OV)** apresenta apenas quatro problemas de optimização; a sebenta da autoria de Borja Santos **(BS)** seis; o livro de exercícios de Loureiro Amorim **(LA)** vinte e quatro e o manual de Madalena Garcia, Alfredo Osório e António Ruivo **(GOR)** apresenta nove problemas de optimização.

Analisemos agora as características dos problemas deste período. O primeiro aspecto a salientar é o facto de os manuais deste período vêm acompanhados figuras alusivas ao problema, por vezes mais do que uma figura quando o problema vem acompanhado da respectiva resolução.

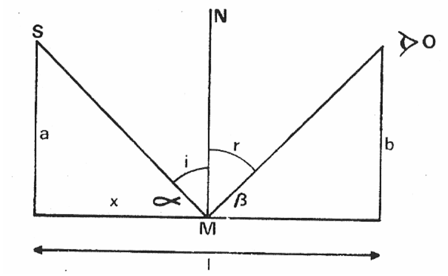
Por outro lado vemos, que relativamente ao tipo de problema, estes surgem sob a forma de exemplo, exercício resolvido e exercício; portanto, identificámos menos um tipo que no período anterior, uma vez que não existe neste período nenhum exercício em que se pretende realizar uma demonstração. No manual de Ondina Vasconcelos, os quatro problemas surgem sob a forma de exemplo; os seis problemas da sebenta de Borja Santos são apresentados sob a forma de exercício resolvido; no manual de Madalena Garcia, Alfredo Osório e António Ruivo encontramos três problemas enunciados sob a forma de exemplo, dois como exercício resolvido e quatro surgem sob a forma de exercício; por fim, na obra de Loureiro Amorim observamos que nove problemas eram enunciados como exemplo, cinco como exercício resolvido e dez como exercício.

Quanto ao contexto dos problemas, achámos, neste período, problemas de todos os contextos, sendo a maioria de Geometria Métrica. Encontrámos então nove problemas em contexto real de medida (GOR1, GOR7, GOR8, LA1, LA2, LA4, LA7, LA9, LA12), cinco de Aritmética (OV2, OV3, BS3, LA3, LA8), dois de Física (GOR9, LA9), um de Geometria Analítica (LA20), um de Economia (LA19) e os restantes vinte e cinco de Geometria Métrica. Deste modo, notámos neste período problemas de todos os contextos identificados, surgindo pela primeira vez os de Geometria Analítica, de Física e de Economia. Observemos a seguir um exemplo de cada um destes contextos:

" (***LA20)*** *Encontrar o caminho mínimo para ir de um ponto A a outro B, tocando uma dada recta r (os pontos A e B ficam do mesmo lado da recta)."*

" (LA6) *Problema da reflexão da luz.*

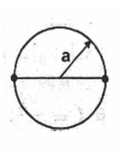
Dado um espelho plano e uma fonte luminosa S, procurar a posição do ponto M onde um raio partindo de S incidirá sobre o espelho e se reflectirá na vista do observador sabendo que a luz se propaga em linha recta seguindo o caminho mais curto. Supõe-se, figura junta, conhecidos a, b, e l e determina-se a posição do ponto M por meio de x."

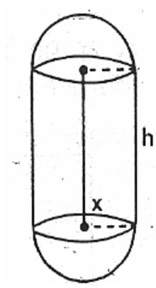


" (LA19) *400 pessoas assistem a um espectáculo cujos lugares custam 30$00. Se o número de assistentes diminuir de 40 pessoas quando o aumento de preço dos lugares for de 10$00, pretende-se saber qual será o aumento de preço que permitirá uma receita mais elevada."*

Relativamente à função a optimizar, apenas não surge optimização de tempo, detectando-se essencialmente, problemas em que se pretende optimizar uma área (dezassete problemas): de um rectângulo dado o perímetro (OV1, BS4, GOR6) ou o raio de uma circunferência circunscrita (LA5); de um triângulo rectângulo dada a hipotenusa (BS1, LA10); de um triângulo equilátero dada a medida do lado (LA21); de um triângulo isósceles dado o raio do círculo circunscrito (LA7); de dois triângulos inscritos num círculo dado o raio (LA22); de um sector circular dado o perímetro (LA9), ou área lateral de um cone ou cilindro dado o raio ou a geratriz (BS6, LA14). Pretende-se optimizar um perímetro de um rectângulo dada a área em três problemas (BS5, GOR4, LA18). Procura-se optimizar o volume (doze problemas): de um cilindro dado o perímetro do rectângulo que o gera (OV4); de um cone dada a geratriz (BS6, LA13); de um sólido constituído por um cilindro e duas semiesferas (GOR3); de um paralelepípedo dadas algumas dimensões (GOR5, PA1); de um prisma dada a superfície (LA12) e de um cilindro dada a sua superfície total (LA16, LA4). Optimizar uma distância dados dois pontos (LA20). Nos problemas de Aritmética pretende optimizar-se um produto dada a soma ou a diferença de dois números (OV2, BS3, PA3); optimizar-se uma soma dado o produto (OV3) ou optimizar a soma dos quadrados de dois números dada a sua soma (LA8). Nos problemas físicos pretende optimizar-se a distância entre dois pontos, sabendo a velocidade a que cada um se desloca e a distância entre eles (GOR9) ou o caminho mais curto seguido pela reflexão da luz (LA6). Finalmente, no problema de Economia pretende optimizar-se um custo, dada a variação no número de pessoas e de preços (PA19).

Apenas dois dos problemas apresentam uma figura simples (GOR7, LA11). Sete problemas apresentam uma figura com dados (GOR1, GOR8, LA1, LA2, LA9, LA12, LA6) e os restantes não apresentam qualquer esquema ou figura auxiliar. É ainda de salientar que o livro de Borja Santos e o de Ondina Vasconcelos não apresentam qualquer figura. Vejamos o exemplo de um problema que apresenta uma figura com dados:





*"**(GOR3)** Um sólido é constituído por um cilindro de raio da base x e de altura h e por duas semiesferas assentes sobre as bases do cilindro e de raio igual ao raio da base deste.*

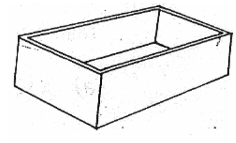
Supondo a superfície total do sólido igual a $4\pi a^2$ e variáveis x e h, averiguar qual é o sólido de volume máximo."

Em relação aos dados indicados no enunciado dos problemas, observámos que metade apresenta dados genéricos e a outra metade dados numéricos. Sendo que o livro de Loureiro de Amorim tem cerca de dois terços de exercícios com dados genéricos e apenas um terço com dados numéricos e o livro de Ondina Vasconcelos apenas tem um exercício com dados numéricos sendo os restantes exercícios com dados genéricos. É ainda de referir que num dos problemas é pedido para resolver o problema com dados genéricos e depois é pedido para concretizar com um valor específico (LA21).

Os enunciados dos problemas são maioritariamente simples, apresentando apenas quatro a resolução encaminhada (GOR6, GOR7, GOR8, GOR9). Vejamos os problemas com resolução encaminhada:

*" **(GOR6)** Exprima a área A de um rectângulo como função de um dos lados x, supondo que o perímetro é 20. Desenhe o gráfico da função no intervalo [0, 10]. Determine graficamente e analiticamente o valor de x que torna a área máxima."*

*" **(GOR7)** Na figura está representada uma caixa aberta em que a base é um rectângulo cujo comprimento é o dobro da largura.*



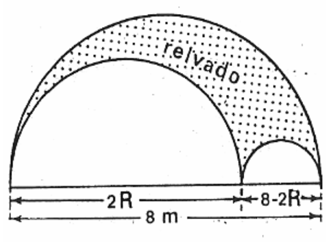
a. Prove que, se a área total da caixa é 54 dm², o volume da caixa é dado em dm³ pela expressão

$$18x - \frac{2x^3}{3}$$

Em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.

b. Determine o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo e indique o valor do volume nesse caso."

*“ **(GOR8)** Num canteiro semicircular, cujo raio tem 4 m de comprimento, são reservados, de acordo com a figura, dois canteiros, igualmente semicirculares, destinados ao cultivo de flores, sendo para relvado a parte restante.*



a. Mostre que a área do relvado é $\pi(4R - R^2)$ metros quadrados

b. Investigue quais as medidas que deverão ter os raios dos canteiros das flores para que seja máxima a área do relvado.”

*“ **(GOR9)** Ás oito horas um navio B encontrava-se a 65 km a oeste de outro navio A. B navega rumo a leste, à velocidade de 10 km/h enquanto A navega rumo a norte, com velocidade de 15 km/h.*

a. Mostre que, em cada instante, a distância em km que separa os dois navios é dada pela expressão

$$\sqrt{(65-10t)^2+225t^2}\ ,$$

representando t o número de horas decorridas a partir das oito horas até esse instante.

b. Calcule a hora a que os dois navios se encontrarão à distância mínima.”

Observamos, então, que o primeiro problema é semelhante ao do período anterior (SP3). Os três problemas seguintes têm uma estrutura idêntica uma vez que apresentam duas alíneas: na primeira pede-se para mostrar que a expressão que permite optimizar o problema é a expressão apresentada e na segunda é pedido para optimizar a situação. Sendo assim estes problemas são de mais fácil compreensão relativamente aos que não apresentam qualquer passo anterior que auxilie a determinar a expressão a optimizar. Para além disso, o facto de o aluno não conseguir determinar a expressão não o impede de achar a solução óptima uma vez que na alínea anterior a expressão já é dada.

A função auxiliar surge na maioria dos problemas de forma implícita (vinte e sete vezes) e explicitamente apenas em 16 problemas (OV1, OV4, BS2, BS4, GOR4, GOR6, LA17, LA18, LA16, LA24, OV2, OV3, LA3, GOR7, LA4, LA12). É ainda de referir que no manual de Ondina Vasconcelos a função auxiliar figura sempre explicitamente. Apontamos um exemplo de cada uma das situações:

*“ **(BS2)** Dentre os cilindros de volume igual a 16π, determine os que têm área total mínima.”*

*“ **(LA19)** 400 pessoas assistem a um espectáculo cujos lugares custam 30$00. Se o número de assistentes diminuir de 40 pessoas quando o aumento de preço dos lugares for de 10$00, pretende-se saber qual será o aumento de preço que permitirá uma receita mais elevada.”*

No primeiro problema é dado o valor do volume. Deste modo, o aluno sabe que terá de utilizar a fórmula do volume na resolução do problema, mas no segundo apenas é dado o número de pessoas e o preço inicial e é dada a diminuição do número de pessoas quando o preço aumenta um determinado valor. Então concluímos que este problema terá uma dificuldade acrescida para determinar a função a optimizar.

Passando agora para as noções aplicadas, vemos que das noções listadas, apenas a noção de função e as funções trigonométricas não são utilizadas neste período. As noções que predominam são o Teorema de Pitágoras e a noção de área. O Teorema de Pitágoras aparece associado aos problemas geométricos com triângulos rectângulos ou com figuras inscritas em circunferências ou esferas e a noção de área surge associada a problemas geométricos em que se pretende determinar lados, perímetros ou volumes sabendo o valor da área de uma figura plana ou área lateral ou total de um sólido. Apreciemos:

> *“ **(LA4)** Pretende-se fazer uma caçarola de alumínio utilizando uma folha de superfície dada S.*
>
> *Que relação deve existir entre a altura h e o raio R para que o volume seja máximo? (Supõe-se ausência de tampa e de desperdícios).”*

Neste problema notamos que aplicando a noção de área de um rectângulo e de um círculo, chegamos a uma relação entre a altura e o raio da caçarola que de seguida, se utiliza para determinar o volume.

Relativamente à estratégia a utilizar concluímos que vinte e dois problemas surgem pela primeira vez nesta reforma, doze em manuais anteriores (BS1, BS3, BS5, GOR1, GOR4, GOR6, LA1, LA8, LA9, LA12, LA18, OV3), cinco nas obras históricas (BS4, LA14, LA15, OV1, OB2) e apenas quatro em exames (GOR7, GOR8, GOR9, LA10). Assim sendo, a obra de Borja Santos apenas têm dois problemas originais e a obra de Ondina Vasconcelos apenas tem um problema original. A obra de Loureiro Amorim é a que apresenta maior quantidade de problemas novos.

As funções utilizadas são tão só as funções polinomiais, funções racionais e funções irracionais, surgindo as funções polinomiais na maioria das situações (vinte e quatro problemas). As funções racionais aparecem em apenas oito problemas (BS2, BS5, GOR4, LA17, LA18, LA21, OV3 e LA2) e as funções irracionais em onze (BS1, LA5, LA10, LA11, LA14, LA22, LA23, LA20, LA7, GOR9 e LA6). As funções irracionais surgem, normalmente, em problemas em que se utiliza o Teorema de Pitágoras ou a distância entre dois pontos.

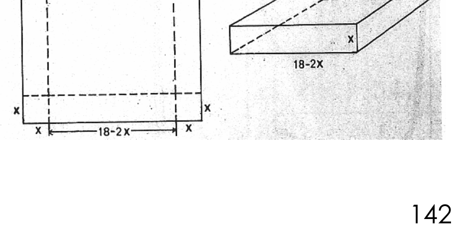
Nos que apresentam resolução vemos que na maioria dos casos o autor começa por calcular os zeros da função a optimizar e depois estuda o sinal da função. Em oito situações o autor apenas calcula os zeros da função deduzindo logo qual o valor do extremo e numa situação estuda o sinal da segunda derivada para concluir que o ponto é um extremo.

Fazendo agora a análise por cada autor, notamos que todos os problemas da obra de Borja Santos têm resolução, surgindo apenas o cálculo dos zeros da derivada. Na obra de Garcia, Osório e Ruivo, apuramos que dos três problemas que apresentam resolução, apenas em dois se calculam os zeros da derivada (GOR2, GOR3) e no outro são calculados os zeros e o sinal da derivada (GOR1). Passando para o livro de Loureiro de Amorim, vê-se que, dos vinte e quatro problemas da obra, cerca de metade apresenta resolução. Destes, num problema é feito o estudo do sinal da segunda derivada (LA4) e os restantes apresentam os zeros e o sinal da derivada (LA1, LA10, LA11, LA12, LA13, LA14, LA2, LA3, LA5, LA6, LA7, LA8, LA9). Por fim, na obra de Ondina Vasconcelos, concluímos que os quatro problemas contêm resolução, calculando-se os zeros e o sinal da derivada. Vejamos alguns exemplos:

> " ***(BS3)*** *Dividiu-se 32 em duas partes. Determinar esses números de forma que o seu produto seja máximo.*
>
> *Como se pretende que o produto de dois números seja máximo temos de determinar a derivada da função, $P = xy$, como P está em função de 2 variáveis, vamos eliminar uma delas, razão porque nos é dito que, $x + y = 32$.*
>
> *Logo, $y = 32 – x$, e desta forma vem:*
>
> $P = x.y = x(32\text{-}x)$
>
> $P' = 32 – x + x.(-1) = 32 – 2x$
>
> $32 – 2x = 0 \Rightarrow x = 16$
>
> *Para $x = 16$ a função tem um máximo e vem $y = 16$, e assim $P = 256$"*

Neste problema, o autor mostra a função a optimizar. Depois indica que como está em função de duas variáveis há necessidade de eliminar uma delas e utiliza então o valor da soma para determinar o valor de uma variável em função da outra. Seguidamente substitui na função a optimizar, obtendo uma função polinomial, deriva e determina os zeros da derivada, concluindo, de imediato, que esse é o valor para o qual a função tem um máximo.

> " ***(GOR1)*** *Numa folha de cartolina quadrada de 18 dm de lado pretendem-se cortar, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, construindo-se seguidamente, por*



dobragem conveniente, uma caixa aberta na parte superior. Determinar a medida do lado do quadrado a cortar em cada canto para que a caixa tenha volume máximo.

Representando por x a medida (em dm) do lado do quadrado a cortar, a medida do volume da caixa (em dm²) será dada por

$V = (18 - 2x)^2 x$ *(Deverá ser 0 > x > 8. Porquê?)*

Calculando a derivada, tem-se

$$V' = -4(18 - 2x)x + (18 - 2x)^2$$
$$= (18 - 2x)(-4x + 18 - 2x)$$
$$= (18 - 2x)(18 - 6x)$$

A derivada V' anula-se para x = 9 e para x = 3

Ora, dado que é V' < 0 para 3 < x < 9 e V' > 0 para x < 3, a função admite um máximo relativo para x = 3.

Tem-se, pois:

a caixa de volume máximo é obtida, cortando em cada um dos cantos da folha um quadrado de 3 dm de lado."

Na resolução deste problema vê-se que em relação ao anterior, para além de calcular os zeros da derivada o autor faz ainda o estudo do sinal da derivada antes e depois dos zeros, para posteriormente concluir qual o valor da variável em que a função atinge o máximo.

" ***(LA4)*** *Pretende-se fazer uma caçarola de alumínio utilizando uma folha de superfície dada S.*

Que relação deve existir entre a altura h e o raio R para que o volume seja máximo? (Supõe-se ausência de tampa e de desperdícios).

A caçarola tem a forma de cilindro, cujo volume será:

$$V = \pi R^2 h$$

Procuremos exprimir h em função de R.

Como a superfície total do cilindro (repare-se que só tem uma base) é:

$$S = \pi R^2 + 2\pi R h$$

donde

$$h = \frac{S - \pi R^2}{2\pi R}$$

substituindo em V

$$V = \pi R^2 \left[\frac{S - \pi R^2}{2\pi R} \right] = \frac{R}{2}(S - \pi R^2)$$

$$V = f(R) = \frac{RS}{2} - \frac{\pi R^3}{2}$$

$$V' = \frac{S}{2} - \frac{3\pi R^2}{2} = \frac{S - 3\pi R^2}{2}$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} \Leftrightarrow S = 3\pi R^2$$

Mas como $S = \pi R^2 + 2\pi Rh$

teremos $3\pi R^2 = \pi R^2 + 2\pi Rh$

$2\pi R^2 = 2\pi Rh$

donde $R = h$

Mas será um máximo para V?

Como $V'' = -\frac{6\pi R}{2} = -3\pi R < 0$

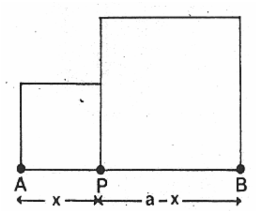
$V'' < 0$

Trata-se efectivamente de um máximo."

Neste problema verifica-se que após o cálculo dos zeros da derivada, o autor estudou o sinal da segunda derivada nesse ponto, concluindo, depois, que se trata de um máximo.

Quanto a gráficos, figuras ou esquemas auxiliares, treze problemas não apresentam nenhum destes auxiliares, onze apresentam uma figura alusiva ao problema (BS1, BS6, GOR1, GOR2, GOR3, LA5, LA10, LA13, LA14, OV1, OV4) e três o quadro de monotonia para identificar o extremo (LA1, LA2, LA3).

" ***(GOR2)*** *Determinar num segmento [AB] de comprimento a (fixo), um ponto P de modo que seja mínima a soma das áreas dos quadrados de lados* $\overline{AP}$ *e* $\overline{PB}$.



A soma S das áreas dos quadrados de lados $\overline{AP}$ *e* $\overline{PB}$ *é dada por*

$S = x^2 + (a - x)^2$

representando por x o comprimento do lado de um dos quadrados.

(Terá de ser $0 \leq x \leq a$. Porquê?)

Derivando S, tem-se

$S' = 2x + 2(a - x)$

$S' = 4x + 2a$

A derivada anula-se para $x = a/2$

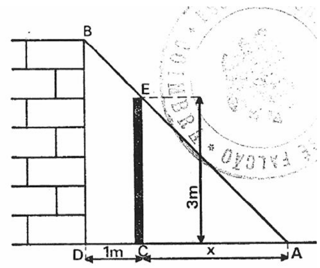
Estude o sinal da derivada e conclua que S é mínimo para $x = a/2$."

Donde se infere que, neste problema, o facto de a resolução vir acompanhada de uma figura com dados, é um factor importante para a resolução do problema, uma vez que, desta forma, o aluno já tem os dados em função apenas de uma variável para determinar a função a optimizar.

(LA2) *Paralelamente ao muro de uma casa, ergue-se outro muro de 3 m de altura.*

A distância da casa à face do muro que está mais afastada é de 1 m.

Qual será o comprimento mínimo das travessas que tocam o solo e a casa, apoiando-se sobre o muro?



Seja l o comprimento da travessa $\overline{AB}$. *Este comprimento dependerá da distância* $\overline{AC}$ *=x.*

Pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$$

$$l^2 = (x-1)^2 + \overline{BD}^2$$

Mas a semelhança dos triângulos [Δ ABD] e [Δ AEC], tira-se:

$$\frac{\overline{BD}}{3} = \frac{x+1}{x} \therefore \overline{BD} = \frac{3x+3}{x} = 3 + \frac{3}{x}$$

Então: $l^2 = (x+1)^2 + \left(3 + \frac{3}{x}\right)^2 = x^2 + 2x + 10 + \frac{18}{x} + \frac{9}{x^2}$

Consideremos então a função y(x) = l^2

$$y' = 2x + 2 - \frac{18}{x^2} - \frac{18}{x^3} = x + 1 - \frac{9}{x^2} - \frac{9}{x^3}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x + 1 - \frac{9}{x^2} - \frac{9}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 9x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(x+1) - 9(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^3 - 9) = 0$$

Como x > 0, a derivada só se anulará para $x = \sqrt[3]{9}$.

x	*0*		$\sqrt[3]{9}$ *≈2,08*		*+∞*
y'		*–*	*0*	*+*	*0*
y = l^2	*+∞*	↘	*≈29,20*	↗	*+∞*
			Min.		

O menor comprimento que pode ter a travessa será aproximadamente $l = \sqrt{29,20} \approx 5,40\,m$ *"*

Deduz-se, que no livro de Loureiro Amorim identificamos, pela primeira vez, o quadro de monotonia para identificar o extremo da função. Este problema também tem particular interesse na determinação da função a optimizar, uma vez que é necessário utilizar dois conceitos: Teorema de Pitágoras e semelhança de figuras, para determinar a função com uma só variável.

Finalmente, quanto ao valor pedido, na maioria dos casos o valor a calcular surge de forma implícita, sendo de forma explícita em apenas dezoito situações. Olhando agora para cada um dos autores, dos seis problemas da obra de Borja Santos, apenas dois referem explicitamente o valor pedido (BS3, BS6); nos problemas da obra de Garcia, Osório e Ruivo apenas um problema tem o valor pedido implícito (GOR3); nos da obra de Loureiro de Amorim vemos, maioritariamente, problemas cujo valor pedido surge implicitamente; e, por fim, na obra de Ondina Vasconcelos todos os problemas referem implicitamente qual o valor a calcular.

Deste modo, a primeira característica deste período é o facto de alguns dos problemas apresentarem uma figura/esquema, o que não acontecia no período anterior. Neste período não se encontram problemas em que se pretenda fazer uma demonstração ou um relatório. Os outros tipos surgem de forma semelhante. A maioria dos problemas são de Geometria Métrica em que se pretende optimizar uma área ou um volume. Os enunciados quase não têm esquemas auxiliares e sem a resolução encaminhada na maioria dos casos. As noções mais aplicadas são o Teorema de Pitágoras e a fórmula da área. Grande parte dos problemas surge nesta reforma pela primeira vez. As funções utilizadas são essencialmente polinomiais e o esquema de cálculo dos extremos mais utilizado è através dos zeros da derivada.

Os dados obtidos na análise dos problemas de optimização deste período estão sintetizados na tabela a seguir.

3.3.3. O PERÍODO PÓS REVOLUÇÃO

Após 5 décadas de ditadura, dá-se, a 25 de Abril de 1974, um movimento revolucionário organizado pelos militares portugueses. Até então o país vivia num profundo isolamento em relação ao resto do mundo, a inflação aumentava de forma descontrolada, não havia liberdade de expressão e as colónias portuguesas viviam em guerra. Todos estes factores faziam com que muitos portugueses encontrassem na imigração a forma de fugir aos problemas do país e à guerra colonial.

Assim, logo a seguir à revolução, o MFA[20] apresentou um conjunto de medidas com o objectivo de extinguir todas as instituições ligadas ao Estado Novo que estrangulavam a liberdade nacional. Estas foram aceites pelos portugueses sem contestação.

Nos meses pós 25 de Abril, o país viveu momentos de grande agitação e instabilidade. Foram nomeados sucessivos governos provisórios que governavam por períodos muito curtos. Consequentemente também os ministros que tutelavam a pasta da Educação se iam sucedendo. As primeiras eleições, com uma elevada taxa de participação, foram realizadas um ano após a revolução.

O ministério que tutelava a educação passou a ter o nome de Ministério da Educação e Cultura, sendo o ministro indigitado Eduardo Henrique da Silva Correia. Este ocupou a pasta apenas durante dois meses sendo depois sucedido por Vitorino Magalhães Godinho, que dirigiu o referido Ministério até Novembro desse ano.

A. Análise do programa oficial

O ensino sofreu a partir de então fortes alterações dado que foi considerado entre as grandes prioridades.

Por esta razão se procedeu, entre 1975 e 1980, à unificação do curso geral, terminando, por isso a separação entre os Liceus e as Escolas Industriais visto que se considerava que estas faziam a separação entre os alunos provenientes dos vários estratos sociais. Foram também implementados os cursos complementares de via única nos dois ramos de ensino.

[20] Movimento das Forças Armadas

De tal modo que ainda em 1974 foi publicado o programa do Curso Complementar para o ano lectivo 1974/75 que não sofreu alterações, em relação ao programa anterior.

Para o ano lectivo 1976/77 também foi publicado o novo programa de Matemática para o Curso Complementar, mas, tal como no caso anterior, também neste a Matemática, sobretudo o capítulo dedicado à Análise Infinitesimal, não sofreu nenhuma alteração.

A partir do ano lectivo 1978/79 termina a separação, após o 9º ano, entre o Curso Complementar dos Liceus e o Curso Complementar Técnico. Surge assim o Curso Complementar do Ensino Secundário com as seguintes cinco áreas de estudo: A) Científico – natural, B) Científico-tecnológica, C) Económico-social, D) Humanísticos e E) Artes Visuais. Cada uma das áreas tinha três componentes: Formação geral, formação específica e formação vocacional. A disciplina de Matemática fazia parte da formação específica de todas as áreas, com excepção da área D) Humanísticos e tinha uma carga horária de quatro horas semanais para o 10º e para o 11º ano. Começando o programa a funcionar no ano lectivo de 1978/79 para o 10º ano, no ano lectivo 1979/1980 para o 11º ano e no seguinte para o 12º ano.

A derivada é então abordada no 11º ano, ou seja, no 2º ano do Curso Complementar. Vejamos então como ficou estruturado este programa:

Índice do livro único de acordo com o programa de Matemática do 2º ano do Ensino Complementar para o ano lectivo de 1979-1980

Compêndio de Matemática

11º ano (1º Volume)

- *Limites de Sucessões*
- *Função exponencial e função logarítmica*
- *Limites de funções reais de variável real. Continuidade*
- *Funções continuas*
- *Derivadas de funções reais de variável real*
    1. *Derivada de uma função num ponto: significado geométrico*
    2. *Derivadas laterais: interpretação geométrica*
    3. *Derivabilidade e continuidade*
    4. *Função derivada*
    5. *Regras de derivação*
    6. *Derivada de uma função inversa*

7. *Derivada de uma função composta*
8. ***Aplicações das derivadas***

(Despacho Normativo nº 135-A/79 do Diário da República nº 140/79 de 20 de Junho de 1979)

Do exposto, vê-se que foi dedicado um capítulo ao estudo da derivada. Este capítulo contempla no último ponto o estudo de aplicações das derivadas.

No ano lectivo de 1980/81 começa a funcionar o 12º ano, com uma carga horária de 4 horas semanais. Este vinha a substituir o ano propedêutico que pretendia preparar os alunos para a entrada no Ensino Superior e dar inicio também a uma profissionalização orientada para a inserção na vida activa. Estava dividido em duas vias: a de ensino e a profissionalizante.

O programa estava organizado do seguinte modo:

Programa do 12º ano para o ano lectivo de 1980-81

Parte I – Álgebra

Parte II – Análise Real

1. *Principio da indução matemática*
2. *Complementos sobre sucessões numéricas*
3. *Séries numéricas*
4. *Complementos sobre funções reais de uma variável real*
5. *Complementos sobre derivação de funções reais de uma variável real*
   5.1. *Derivação de funções circulares e das "funções" circulares inversas*
   5.2. *Derivação da função exponencial e logarítmica.*
   5.3. *A noção de diferencial de uma função num ponto; interpretação geométrica; regras de diferenciação.*
6. *Teoremas de Rolle, de Lagrange, de Cauchy e de Taylor*
7. *Complementos sobre representação gráfica de funções*
8. *Generalidades sobre linhas em IR^2. AS cónicas*
9. *Primitivação de funções reais de variável real*
10. *Integração de funções reais de uma variável real*

(Decreto nº 240/80 do Diário da República nº 165 de 19 de Julho de 1980)

Vemos que também no 12º ano se contempla o estudo da derivada. Esta surge no quinto ponto, mas pretende-se agora introduzir o estudo de novas regras de derivação. Não se contempla a abordagem dos problemas de optimização.

No entanto, o programa pecava pela extensão e os professores não conseguiam leccionar todos os temas que se pretendiam abordar. Pelo que, para o ano lectivo de

1983/84, foi publicado um novo programa, muito semelhante ao anterior, mas menos extenso. Apesar de ter sido encurtado, o estudo das derivadas não sofreu nenhuma alteração em relação ao programa anterior. Este continuou em vigor até 1986.

Por despacho de 28 de Julho de 1988, o mesmo ainda veio a sofrer mais algumas alterações. Foi, então, suprimido, o capítulo quarto dedicado ao *Espaço linear (espaço vectorial) sobre um corpo*.

Também o capítulo destinado aos *Complementos sobre derivação de funções reais de uma variável real* sofreu alterações. Foi suprimido o ponto 8.3. "*A noção de diferencial de uma função num ponto; interpretação geométrica; regra de diferenciação*", onde se pretendia que o aluno determinasse diferenciais de funções, passando a referir que o aluno resolvesse questões aplicando o conceito de derivada.

B. Análise dos Manuais Escolares

Analisemos agora os problemas de optimização encontrados nos manuais relativos às reformas referidas.

Para estas reformas seleccionámos cinco livros, dos quais três são manuais escolares e os outros dois são livros de exercícios.

Autor: A. César Freitas; Francelino Gomes

Título: *Matemática*

Ano lectivo: 11º Ano (2º CC) V2

Reforma curricular: 1979

Ano, editora e lugar de edição: 1979, Livraria Popular de Francisco Franco

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal de Ana Paula Aires;

Caracterização e estrutura da obra: Neste manual, o capítulo dedicado às derivadas de funções reais de variável real apresenta a seguinte estrutura:

- *Derivada de uma função num ponto. Interpretação geométrica;*
- *Função derivada. Regras de derivação. Derivadas de ordem superior;*
- *Aplicações das derivadas;*
    - *Sentido de variação de uma função;*
    - *Extremos relativos de uma função;*
    - ***Alguns problemas elementares de máximos e mínimos.***
- *Assímptotas paralelas aos eixos (assímptotas horizontais e verticais);*

- *Representação gráfica de uma função. Contradomínio e extremos absolutos;*
- *Exercícios.*

Na parte dedicada aos problemas elementares de máximos e mínimos encontramos quatro problemas de optimização com ilustração e seguidos da respectiva resolução. Posteriormente, no final do capítulo é apresentado um conjunto de exercícios, sendo sete problemas de optimização.

Autor: Henrique Verol Marques

Título: *Exercícios de Matemática 1*

Ano lectivo: 11° Ano

Reforma curricular: 1979

Ano, editora e lugar de edição: 1979, Editorial Presença

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: O autor, Henrique Verol Marques era Licenciado em Ciências Matemáticas e professor do Ensino Secundário. Publicou livros de exercícios para as Matemáticas Modernas e posteriormente para a reforma de 1979.

Trata-se de um livro apenas com exercícios e a respectiva resolução, sem qualquer explicação teórica.

O autor refere no início da obra que:

> *"A nova estrutura do Ensino Secundário implicou a reorganização de programas de Matemática com características inéditas.*
>
> *A exemplo do que aconteceu com o programa do 10° ano, parece extremamente ambicioso o programa agora adoptado para o 11° ano, quer na sua dimensão – certamente excessiva – quer no coeficiente de dificuldade que contém.*
>
> *O presente livro, como o volume que se lhe seguirá, procura respeitar as normas estabelecidas e contribuir para uma preparação prática conveniente dos alunos a que se destina."*

A obra contém 196 páginas, distribuídas por seis capítulos. Em cada um dos capítulos há exercícios, dando-nos no final do último a respectiva resolução.

No capítulo 5 são abordadas as derivadas de funções reais de variável real e no capítulo 6 o estudo de uma função. É neste 6° capítulo que encontramos alguns problemas de optimização no qual são apresentados 32 exercícios, dos quais nove são problemas de optimização.

Autor: António do Nascimento Palma Fernandes

Título: *Matemática 7 – Exemplos e exercícios*

Ano lectivo: 11º Ano

Reforma curricular: 1979

Ano, editora e lugar de edição: 1980, Plátano Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca do DMUC

Caracterização e estrutura da obra: Apesar de Palma Fernandes ter falecido em 1968, em 1980 foi publicada uma actualização do seu livro de exercícios levada a efeito por António de Oliveira Pegado, Maria do Rosário Ribeiro e Mavília Lobo Palmeira. A obra apresenta uma estrutura gráfica ligeiramente diferente do que a analisada anteriormente. Tem 255 páginas e está dividida em duas partes. A primeira abrange as funções e a segunda os elementos de análise. O quarto ponto da segunda parte trata das derivadas de funções reais de variável real e contempla, no final, alguns problemas concretos. Este ponto, relativo às derivadas, tem trinta e seis exercícios resolvidos dos quais apenas dois são problemas de optimização, mas ambos estão presentes na obra analisada anteriormente. Seguidamente são expostos 90 exercícios que contêm no final apenas a solução, sendo dez problemas de optimização, mas só três não estão na obra já analisada.

Autor: Paulo Abrantes; Raul Fernando Carvalho

Título: *M11 – Matemática 11º ano*

Ano lectivo: 11º Ano

Reforma curricular: 1979

Ano, editora e lugar de edição: 1984, Texto Editora

Localização da obra consultada: DMUC

Caracterização e estrutura da obra: Paulo Abrantes e Raul Fernando Carvalho, para além deste manual, produziram um vasto número de manuais escolares nesta época para os vários níveis de escolaridade.

A obra acima referida tem cerca de 400 páginas repartidas em três partes: Funções, Elementos de Análise e Combinatória, Probabilidades e Estatística. A parte dos Elementos de Análise está dividida em três sub-capítulos contemplando o terceiro a Derivação.

Este sub-capítulo tem a seguinte estrutura:

- *Situações*

- *Razão incremental*
- *Derivada da função num ponto*
- *Derivadas laterais*
- *Derivabilidade e continuidade*
- *Função derivada*
- *Regras de derivação*
- *Variação e extremos de uma função*
- *Problemas práticos*
- *Estudo de funções*
- *Exercícios e problemas*
- *Prolongamentos: Assímptotas obliquas e método de Newton.*

Observa-se pela referida estrutura que os seus autores revelam uma grande preocupação em apontar para cada tema a sua aplicabilidade em situações ligadas à vida corrente. Expõem ainda, para cada um, os prolongamentos, ou seja, desenvolvimentos dos assuntos tratados, mas que não fazem parte do programa oficial.

Encontramos os problemas de optimização na parte referente aos problemas práticos. Nesta os autores mostram três problemas de optimização seguidos da respectiva resolução. Tanto o enunciado como a resolução vêm acompanhados de gráficos, esquemas, figuras e tabelas que ajudam à compreensão do problema. Ao longo da apresentação dos problemas surgem ainda outras actividades, ou seja, novas questões/exercícios pertinentes, que o aluno pode resolver, a partir do que lhe é apresentado.

No final dos problemas de optimização os autores indicam a definição de problema de optimização bem como os passos que deve seguir a sua resolução:

> *"Tratamos aqui um tipo de problemas em que se pretende obter a maior área, a receita máxima, o custo mínimo, …*
>
> *Dá-se-lhes por vezes o nome de problemas de optimização. Em geral, a sua resolução passa pelas seguintes etapas:*
>
> 1) *Definir uma função – se possível, com apenas uma variável – que constitua um modelo matemático do problema a estudar.*
> 2) *Estudar a variação desta função, em especial procurando os seus máximos e mínimos.*
> 3) *Verificar a adequação dos resultados teóricos obtidos À situação concreta a que o problema se refere."*

Também na parte relativa aos exercícios e problemas se detectam mais alguns problemas de optimização. Nesta é apresentado um conjunto de 29 exercícios dos quais 6 são problemas de optimização.

Autor: M. A. F. Neves; M. Teresa C. Vieira; Alfredo G. Alves

Título: *Matemática*

Ano lectivo: 11° Ano

Reforma curricular: 1979

Ano, editora e lugar de edição: 1988, Porto Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Estes autores, e em particular Maria Neves, produziram uma grande quantidade de manuais escolares e de livros de exercícios para os diversos níveis de escolaridade. O presente tem 375 páginas, repartidas por dez capítulos, sendo o sétimo dedicado às derivadas de funções reais de variável real.

O capítulo está estruturado da seguinte forma:

- *Da tangente a uma curva à noção de derivada*
- *Derivada de uma função num ponto*
- *Interpretação geométrica de derivada de uma função num ponto*
- *Derivadas laterais*
- *Derivabilidade e continuidade*
- *Função derivada*
- *Derivada de uma função constante, derivada da função identidade, derivada de uma soma de funções, derivada do produto de funções, derivada de um quociente de funções, derivada da função inversa, derivada da função composta, derivadas de ordem superior à primeira*
- ***Aplicações das derivadas***
- *Assímptotas verticais e assímptotas horizontais*
- *Esboço do gráfico de uma função: contradomínio e extremos absolutos*
- *Exercícios*

Para além do conjunto de exercícios que surgem no final do capítulo, são expostos também alguns nas margens do manual, relativos ao tema em estudo. Os autores recomendam o seu livro Exercícios de Matemática, 11° ano, dos mesmos autores e da referida editora, de harmonia com este manual escolar.

Os problemas de optimização aparecem nas aplicações das derivadas, no ponto que diz respeito aos problemas concretos. Os autores começam por explicar os passos a seguir na resolução dos mesmos, a seguir mostram cinco problemas resolvidos com base nos passos referidos no início. Estes são acompanhados de imagens, gráficos e tabelas que ajudam à compreensão do enunciado, bem como da resolução. Nas margens são registados mais doze exercícios sobre problemas de optimização. Nos exercícios do final do capítulo não existe nenhum problema de optimização.

Examinemos agora os problemas de optimização destas obras.

Problemas de Geometria Métrica

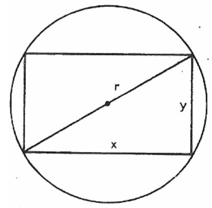


Fig. 43

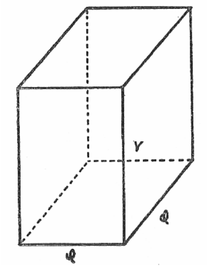
FG1. *Determinar o rectângulo de maior área que se pode inscrever numa dada circunferência. (Freitas e Gomes, 1979, p. 138)*

FG5. *Determine o rectângulo de maior área que se pode inscrever num triângulo isósceles de base 20 cm e altura 40 cm, por forma que dois vértices do rectângulo pertençam à base do triângulo. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)*

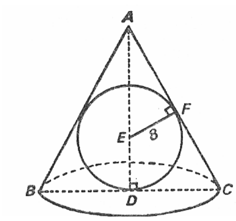
FG6. *Determine, de entre os rectângulos de área 81 cm² aquele que tem menor perímetro. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)*

FG9. *De entre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede a, determine a que tem maior área. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)*

FG11. *Determine a altura do cone de revolução de volume mínimo que pode ser circunscrito a uma esfera de raio r. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)*

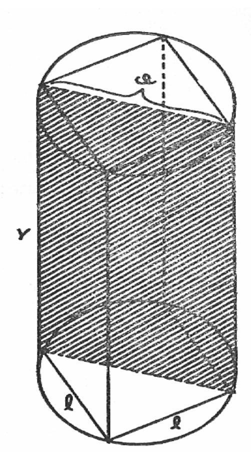


VM1.*Considere os paralelepípedos rectângulos de base quadrada em que a soma das suas dimensões é igual a uma constante a. Determine, em função de a, a altura daquele que apresenta o máximo volume. (Marques 1979, p.43) (Exames oficiais)*



VM2. *Determine a altura do cone circular recto de volume mínimo circunscrito a uma esfera de raio 8 unidades. (Marques 1979, p.43)*

VM3. *Num cilindro de revolução está inscrito um prisma quadrangular regular. A secção feita no cilindro por um plano que contem o eixo, tem 30 cm de perímetro.*



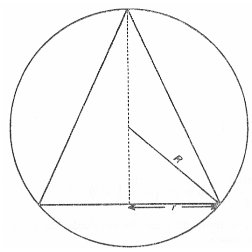
a. *Mostre que sendo x a medida, expressa em centímetros, do diâmetro de uma base do cilindro, o volume do prisma, em cm³, é dada pela expressão*

$$\frac{15x^2 - x^3}{2}$$

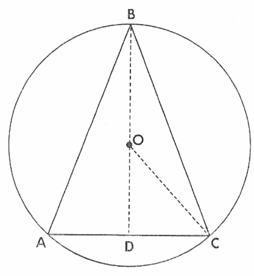
b. *Atendendo à natureza do problema, determine o domínio da função assim definida.*

c. *Determine o valor de x para o qual é máximo o volume do prisma.*

d. *Esboce o gráfico da função em referencial cartesiano e indique as coordenadas do ponto de inflexão desse gráfico. (Marques 1979, p.43) (Exames oficiais)*



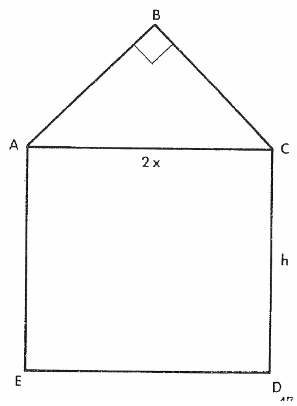
VM7. *Entre todos os triângulos isósceles inscritos numa circunferência de raio constante R, determine, em função de R, a altura x daquele que, rodando em torno dessa altura, gera o cone de revolução de volume máximo. (Marques 1979, p.47) (Exames oficiais)*



VM8. *Considere o triângulo estritamente isósceles inscrito numa circunferência de raio 5 cm.*

a. *Designando por x a medida da altura relativa ao lado desigual mostre que a área do triângulo pode ser dada em cm² pela expressão* $A = x\sqrt{10x - x^2}$.

b. *Verifique que a área é máxima quando x = 7,5 cm. (Marques 1979, p.47)*



VM9. *Um pentágono [ABCDE] está decomposto num triângulo rectângulo e isósceles [ABC] e um rectângulo [ACDE].*

A área do pentágono é 12 cm².

a. *Mostre que o perímetro y do rectângulo [ACDE] pode obter-se pela fórmula*

$$y = \frac{3x^2 + 12}{x}$$

b. *Recorrendo ao significado geométrico da derivada, determine uma equação da tangente ao gráfico da função definida por* $y = \frac{3x^2 + 12}{x}$ *no ponto (1, 15).*

c. *Determine x, de modo que seja mínimo o perímetro do rectângulo. (Marques 1979, p.47)*

PF1. *Dentre os rectângulos de perímetro igual a 20 cm determinar o que tem área máxima.* (Fernandes, 1980, p. 240))

PF2. *Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 m, qual é aquele que tem área máxima.* (Fernandes, 1980, p. 240)

PF5. Dentre os rectângulos de área igual a 64 dm^2 qual é aquele que tem o perímetro mínimo? (Fernandes, 1980, p. 250)

PF6. *De entre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 8 m, qual é aquele que tem área máxima.* (Fernandes, 1980, p. 250)

PF7. *Os catetos de um triângulo rectângulo somam 40 metros. Determinar a hipotenusa do que tem maior área. (Fernandes, 1980, p. 250)*

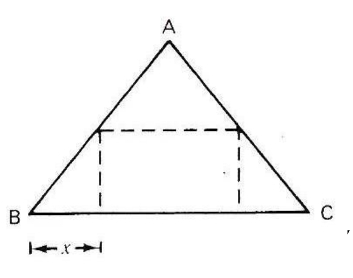
PF9. *De entre os sectores circulares de perímetro igual a 8 metros, qual é o raio daquele que tem área máxima? (Perímetro do arco = Rn e área do sector = $\frac{R^2}{4}n$, n em radianos)(Fernandes, 1980, p. 250)*

PF10. *De entre os prismas quadrangulares regulares que têm de volume 8 m^3, qual é aquele que tem área total mínima. (Fernandes, 1980, p. 250)*

PF11. *Dada uma esfera de raio igual a 1 metro determinar a medida do raio do cilindro de revolução inscrito de volume máximo. (Fernandes, 1980, p. 250)*

PF12. *A soma dos perímetros de uma circunferência e de um quadrado é constante. Demonstrar que a soma das áreas do círculo e do quadrado é mínima quando o diâmetro do círculo for igual ao lado do quadrado. (Fernandes, 1980, p. 250)*

AC9. *O triângulo [ABC] é isósceles, sendo* $\overline{AB} = \overline{AC} = 10\,m$; $\overline{BC} = 12\,m$.



Pretendemos inscrever nele um rectângulo, da forma que a figura indica. Para que valor de x se obterá um rectângulo de área máxima e qual é o valor dessa área? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 313)

NVA6. *Entre os rectângulos de perímetro 40 dm, calcule as dimensões do que tem maior área. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 243)*

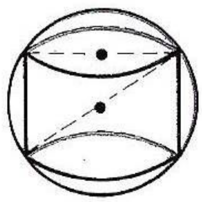
NVA8. *A soma de todas as arestas de um prisma recto de base quadrada é 72 cm.*

a. *Se x é a medida da aresta da base, mostre que o volume do prisma é dado pela fórmula*

$$V = 18x^2 - 2x^3$$

b. *Calcule as dimensões do prisma de volume máximo. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 244)*

NVA12. *Entre os cilindros de revolução inscritos numa superfície esférica de raio 2 dm, calcule as dimensões do que tem maior volume. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 247)*



Problemas de Geometria Analítica

FG10. *Considere um referencial o.n. no plano e os pontos A = (0, a) e B = (b, 0). Determine um ponto P do eixo Ox tal que* $\overline{AP} + \overline{PB}$ *seja mínimo. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)*

NVA4. *Num mesmo referencial ortonormado consideraram-se o ponto P (2, 3) e o gráfico da função*

$$x \mapsto y = x^2 + \frac{5}{2}$$

Definir, pelas suas coordenadas, o ponto do gráfico da função mais próximo do ponto P. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 248)

NVA13. *Quais as coordenadas do ponto da recta de equação*

2y + 3x = 4

mais próximo do ponto (3,4)? (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 248)

NVA14. *Entre as rectas que passam pelo ponto P (2, 1) escreva a equação axial da que forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 248)*

NVA15. *Defina sobre a recta y = x um ponto tal que a soma dos quadrados das distâncias aos pontos*

A (1, 0), B (-1, 0), C (0, 6)

seja mínima. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 249)

Problemas de Aritmética

PF3. *Dois números têm por soma 12; determinar esses números de forma que a soma dos seus quadrados seja mínima. (Fernandes, 1980, p. 250)*

PF4. *Dois números têm por soma 20; determinar esses números de forma que o seu produto tenha valor máximo. (Fernandes, 1980, p. 250)*

AC4. *De entre os pares de números reais positivos cujo produto é 64 qual é aquele em que a soma é mínima? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 312)*

NVA7. *Decomponha 20 num produto de dois factores cuja soma seja mínima. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 243)*

Problemas de Medida em Contexto Real

FG3. *Pretende-se imprimir um livro por forma que, em cada página, a mancha impressa seja um rectângulo de 216 cm² e com margens superior e inferior de 2 cm e margens laterais de 3 cm – Fig. 46.*

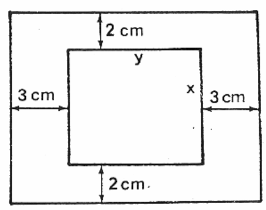


Fig. 46

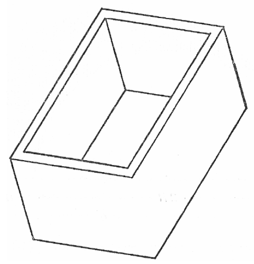
Quais devem ser as dimensões mais económicas para o livro (admitindo que o custo do livro é tanto menor quanto menor for a área de cada página)? (Freitas e Gomes, 1979, p. 140)

FG7. *Um lavrador pretende cercar com 1200 m de rede uma zona rectangular com a maior área possível, dividindo-a, ainda, em duas partes, paralelamente a um dos lados.*

Qual a maior área que o lavrador pode cercar? (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)

FG8. *Pretende-se construir com chapa metálica um reservatório cilíndrico de base circular e capacidade 64 litros. Determine as dimensões do reservatório de forma que a quantidade de chapa a utilizar seja mínima. Considere os casos de o reservatório ter ou não ter tampa. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)*

VM5. *Na figura está representada uma caixa aberta em que a base é um rectângulo cujo comprimento é o dobro da largura.*



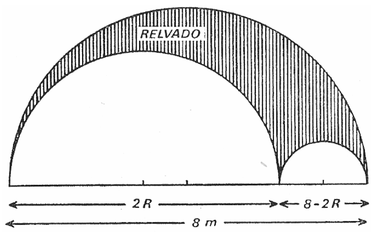
a. Prove que, se a área total da caixa é 54 dm², o volume da caixa é dado, em dm³, pela expressão $18x - \frac{2x^3}{3}$ *em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.*

b. Determine o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo e indique o valor do volume nesse caso.

c. Considere a função real de variável real definida pela expressão obtida em a) e determine os pontos de inflexão do seu gráfico.

d. Esboce esse gráfico. (Pode utilizar um referencial não monométrico). (Marques 1979, p.45) *(Exames oficiais)*

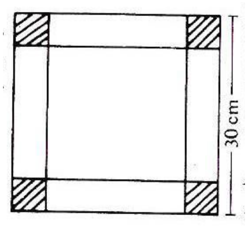
VM6. *Num canteiro semi-circular cujo raio tem 4 metros de comprimento, são reservados, de acordo com a figura junta, dois canteiros, igualmente semi-circulares, destinados ao cultivo de flores, sendo para relvado a parte restante.*



a. Mostre que a área do relvado mede $\pi(4R - R^2)$ *metros quadrados.*

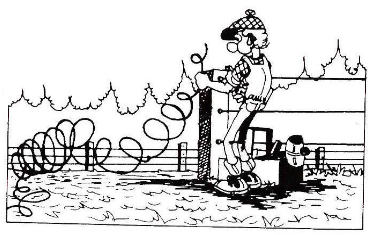
b. Investigue quais as medidas que deverão ter os raios dos dois canteiros das flores, para que seja máxima a área do relvado. (Marques 1979, p.46)

(Exames oficiais)

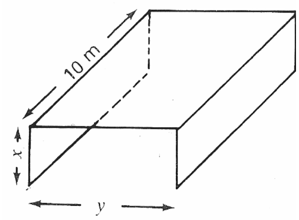


PF8. *Com uma placa de latão de 30 cm de lado pretende-se fazer uma caixa sem tampa. Que dimensões devem ter os quadrados a cortar dos 4 cantos, para que esta tenha o máximo volume? (Fernandes, 1980, p. 250)*

AC1. *A maior área possível: Um indivíduo dispõe de 20 metros de arame com os quais quer vedar um pequeno parque de forma rectangular num terreno que*

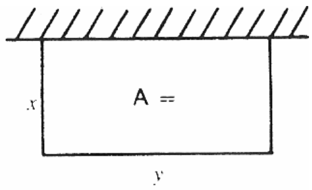


tem à sua disposição. Pretendendo obter a área máxima, que dimensões deve escolher para o parque? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 296)



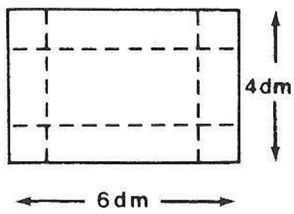
AC3. *A construção mais barata: Pretende-se construir um túnel com a forma que a figura sugere, usando-se três placas rectangulares do mesmo material e espessura uniforme (duas laterais e uma em cima).*

O túnel tem uma extensão de 10 m e a sua boca deve ter 72 m^2 *de área. Que valores devem ter a largura e a altura do túnel para que a construção seja a menos cara possível? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 298)*



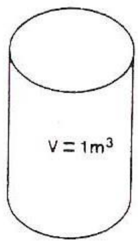
AC5. *Pretendemos que um terreno de forma rectangular (em que um dos lados está encostado a um muro) tenha uma área de 50 m*^{2}.

Que dimensões deve ter o terreno para que o comprimento da vedação a utilizar ao longo dos outros três lados seja o menor possível? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 312)

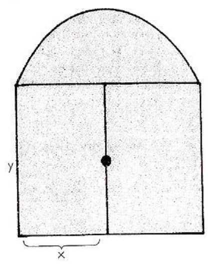


AC7. *Se cortarmos quatro quadrados iguais nos cantos de uma folha rectangular de 6 dm x 4 dm, poderemos dobrá-la e construir uma caixa aberta.*

Qual deve ser a medida do lado do quadrado a cortar para que a caixa tenha volume máximo (indica um valor aproximado com erro inferior a 1 cm) (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 313)

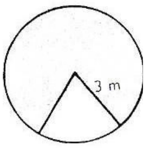


AC8. *Quais devem ser as medidas do raio da base e da altura de um reservatório cilíndrico fechado com um volume de 1 m*^{3}*, de modo que a sua área total seja mínima? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 313)*

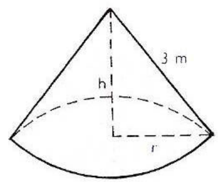


NVA1. *Uma janela tem a forma que a gravura ao lado reproduz: um rectângulo coroado com um semicírculo. O perímetro da janela deve ser 714 cm.*

Calcule as dimensões que permitem uma maior entrada de luz. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 243)



NVA2. *Dispõe-se de um círculo de lona de 3m de raio. Cortando um sector circular pode construir-se uma tenda de campismo com a forma cónica. Para que a capacidade seja máxima, quais devem ser as dimensões da tenda (raio da base e altura)? (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 244)*



NVA5. *Pretende-se construir um cercado com a forma rectangular e com a área de 1200 m*^{2}.

a. *Mostre que o perímetro do cercado é dado pela fórmula*

$$P = 2x + \frac{2400}{x}$$

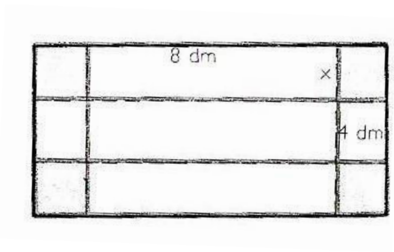
em que x representa o comprimento, em metros, do cercado.

b. *Calcule as dimensões do cercado de modo que o perímetro seja mínimo. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 243)*

NVA9. *Pretende-se construir um reservatório cilíndrico com a capacidade de 6280 m*^{3}*. Quais devem ser as suas dimensões de forma que a sua área total seja mínima (menor custo)? (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 245)*

NVA10. *Com chapas de latão de 8 dm/4 dm, cortando em cada canto um quadrado e fazendo dobragens convenientes, obtém-se caixas sem tampa.*

Quanto deve medir o lado do quadrado, x, para que a capacidade seja máxima? (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 246)



NVA11. *Pretende-se construir uma caixa, sem tampa, em que a base seja um rectângulo de comprimento duplo da largura.*

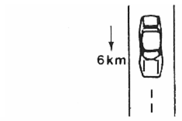
a. *Prove que, se o volume é 36 dm*^{3} *a área total em dm*^{2} *é dada pela fórmula*

$$A = \frac{108 + 2x^3}{x}$$

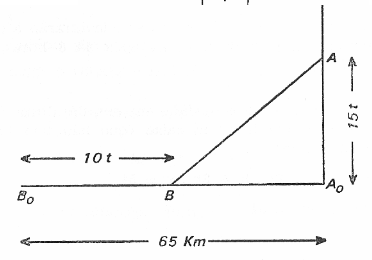
Em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.

b. *Calcule x de modo que a área seja mínima. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 247)*

Problemas de Física



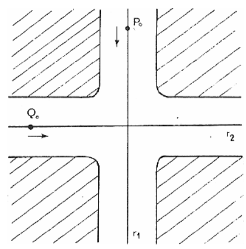
VM4. *Às oito horas um navio B encontra-se a 65 km a Oeste de outro navio A. O navio B ruma a Leste, à velocidade de 10 km/h, enquanto A navega rumo ao Norte, com a velocidade de 15 km/h.*

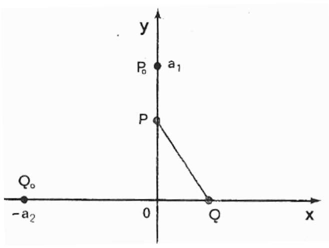


a. *Mostre que, em cada instante, em quilómetros, que separa os dois navios é dada pela expressão* $\sqrt{(65-10t)^2+225t^2}$.

b. *Calcule a hora a que os dois navios se encontram à distância mínima. (Marques 1979, p.44) (Exames oficiais)*

FG2. *Dois pontos materiais P e Q movem-se sobre duas rectas perpendiculares r_1 e r_2 com movimentos uniformes de velocidades (algébricas) respectivamente v_1 e v_2.*

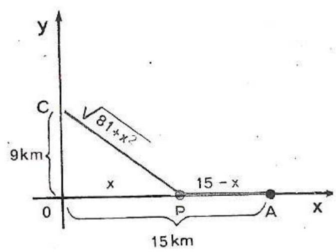




No instante inicial, isto é, no instante em que se começa a contar o tempo, P encontrava-se na posição P_0 à distância a_1 de r_2 e Q encontrava-se na posição Q_0 à distância a_2 de r_1, como se esquematiza na Fig. 44.

Determinar o instante em que a distância dos pontos é mínima e calcular essa distância. (Freitas e Gomes, 1979, p.139)

FG4. *Um ciclista vive num local isolado C, que dista 9 km do ponto O mais próximo de uma estrada rectilínea e alcatroada e pretende ir a uma aldeia A que dista 15 km de O, sobre essa estrada.*



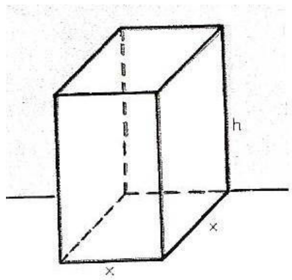
Supondo que o ciclista se desloca a 5 km/h na estrada alcatroada e a 4 km/h no acesso à estrada, determine em que ponto deve atingir a estrada alcatroada para fazer o percurso total no menor tempo possível. (Freitas e Gomes, 1979, p. 141)

AC6. *Dois automóveis deslocam-se, à mesma velocidade, em estradas perpendiculares e no sentido indicado pelas setas.*

Um deles está a 6 km do cruzamento e o outro a 8 km do cruzamento. Quando é que a distância entre eles é mínima? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 312)

Problemas de Economia

NVA3. *Pretende-se construir, encostado a uma parede, um reservatório de base quadrada e com a capacidade de 294 m*^{3}*. Cada m*^{2} *de face encostada à parede e da base fica por 1000$00 e cada m*^{2} *das restantes faces fica por 2000$00.*



a. Representando por x a medida, em metros, da aresta da base, mostrar que o custo é dado pela fórmula

$$C = 1000\left(3x^2 + \frac{2058}{x}\right).$$

b. Calcular as dimensões do reservatório de modo que o custo seja mínimo e esse custo mínimo. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 246)

AC2. *O preço mais conveniente: A comissão de finalistas de uma escola secundária está a organizar um festival desportivo para angariar fundos. Tendo alugado o pavilhão de um clube da zona, calcularam que, vendendo por 150$00 cada bilhete, conseguiriam uma lotação de 500 pessoas. Porém, um estudo mais atento (baseado em sondagens) levou-os a concluir que, por cada 10$00 que baixassem àquele preço, teriam mais 50 pessoas a comprar o ingresso.*

Supondo válidas estas previsões, qual é o preço de cada bilhete que assegura uma maior receita global? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 297)

C. Análise do período

Comecemos por fazer uma análise do programa oficial. Como vimos, a derivada é abordada no 11° ano, num capítulo respeitante à derivada, sendo precedido pelo estudo dos limites e continuidade. A parte referente ao estudo da derivada contém um ponto relativo às suas aplicações. Nesta altura começam a utilizar-se as calculadoras científicas, mas estas não são de grande auxílio para a resolução de problemas de optimização.

Relativamente aos cinco manuais analisados, averiguámos que, comparativamente ao período anterior, o número de problemas de optimização é ligeiramente superior, cinquenta e seis, uma vez que também estudámos mais uma obra do que no período anterior. Na obra de Freitas e Gomes (FG) encontramos onze problemas de optimização; na de Verol Marques (VM) nove; na de Palma Fernandes (PF) doze; na de Abrantes e Carvalho (AC) nove e na de Neves, Vieira e Alves (NVA) encontramos dezasseis problemas de optimização.

Notámos também, através de um primeiro olhar pelos problemas de optimização deste período, que muitos já surgiram nas obras analisadas anteriormente, em particular os problemas que surgiram em exames oficiais.

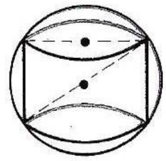
Debrucemo-nos agora sobre as características dos problemas de optimização encontrados.

Começando pelo tipo de problema, observamos que a maioria dos problemas surgem como exercícios (trinta e quatro), sendo doze problemas apresentados como exemplos e apenas nove como exercícios resolvidos. Surge ainda uma demonstração e não detectámos nestes manuais nenhum relatório ou actividade de grupo. Na obra de Freitas e Gomes encontramos os quatro primeiros problemas sob a forma de exemplo (FG1, FG2, FG3, FG4) e os restantes sete sob a forma de exercícios. Na obra de Verol Marques todos os problemas se surgem sob a forma de exercício resolvido enquanto que na de Palma Fernandes encontramos um exemplo (PF1), uma demonstração (PF12) e os restantes são exercícios. Na de Abrantes e Carvalho, os três primeiros problemas surgem sob a forma de exemplo (AC1, AC2, AC3) e os restantes seis sob a forma de exercício. Por fim, na obra de Neves, Vieira e Alves os cinco primeiros problemas surgem também sob a forma de exemplo (NVA1, NVA2, NVA3, NVA4, NVA5) e os restantes sob a forma de exercício. Nota-se então que, a maioria dos manuais desta reforma, apresenta primeiro os problemas de optimização sob a forma de exemplo (com resolução) e posteriormente os exercícios de aplicação. Examinemos agora o problema que surge sob a forma de demonstração:

> " ***(PF12)*** *A soma dos perímetros de uma circunferência e de um quadrado é constante. Demonstrar que a soma das áreas do círculo e do quadrado é mínima quando o diâmetro do círculo for igual ao lado do quadrado.*"

Apesar deste surgir na parte destinada aos exercícios, o que se pretende fazer é uma demonstração, de tal modo que o aluno sabe, à partida, qual o resultado a que terá de chegar.

Quanto ao contexto em que o problema se enquadra, identificámos neste período problemas de todos os contextos, sendo grande parte de Geometria Métrica (vinte e quatro) ou em contexto real de medida (dezassete), ocorrendo os outros contextos em número mais reduzido: cinco problemas de Geometria Analítica (FG10, NVA4, NVA13, NVA14, NVA15) quatro de Aritmética (AC4, PF3, PF4, NVA7), quatro de Física (AC6, VM4, FG2, FG4) e dois de Economia (NVA3, AC2). Vejamos alguns dos problemas:



*" **(NVA12)** Entre os cilindros de revolução inscritos numa superfície esférica de raio 2 dm, calcule as dimensões do que tem maior volume."*

Este é um problema de Geometria Métrica em que temos um cilindro inscrito numa esfera. O enunciando vem acompanhado de uma figura simples, ou seja, sem qualquer dado, mas alguns traços na figura ajudam a visualizar a forma de determinar a função a optimizar, em ordem a apenas uma variável.

*" **(NVA13)** Quais as coordenadas do ponto da recta de equação*

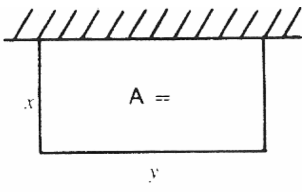
$$2y + 3x = 4$$

mais próximo do ponto (3,4)?"

Este é um problema de Geometria Analítica, sem qualquer tipo de ajuda para a resolução, em que se pretende achar a distância mínima de um ponto a uma recta.

*" **(AC5)** Pretendemos que um terreno de forma rectangular (em que um dos lados está encostado a um muro) tenha uma área de 50 m^2.*

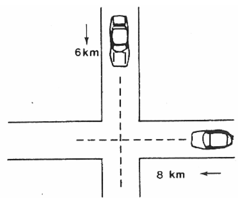
Que dimensões deve ter o terreno para que o comprimento da vedação a utilizar ao longo dos outros três lados seja o menor possível?"



Este é um problema de medida em contexto real em que se procura determinar o menor perímetro de um rectângulo sabendo a sua área.

*" **(AC6)** Dois automóveis deslocam-se, à mesma velocidade, em estradas perpendiculares e no sentido indicado pelas setas.*

Um deles está a 6 km do cruzamento e o outro a 8 km do cruzamento. Quando é que a distância entre eles é mínima?"

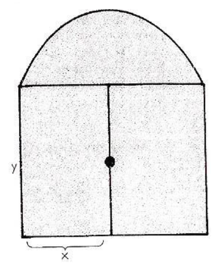


Este último é um problema da área da Física em que se intenta determinar a distância mínima entre dois objectos (automóveis), sabendo que se deslocam à mesma velocidade e a distância a que se encontravam inicialmente.

Relativamente à função a optimizar, vêem-se, neste período, todos os tipos. Destacam-se os problemas em que se procura optimizar uma área (vinte e cinco) ou um volume (treze) que surgem em elevado número.

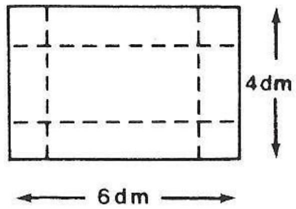
Nos problemas em que se optimiza uma área surgem as situações seguintes: optimizar a área de figuras planas ou de sólidos geométricos. Relativamente às figuras planas, surgem situações em que se pretende optimizar a área de um rectângulo dado o valor do perímetro (PF1, NVA6, AC1, FG7), o raio da circunferência circunscrita ao rectângulo (FG1) ou as dimensões de um triângulo isósceles circunscrito ao rectângulo (FG5, AC9); optimizar a área de um triângulo rectângulo dada a medida da hipotenusa (FG9, PF2, PF6), de um triângulo rectângulo dada a soma das medidas dos catetos (PF7), de um triângulo isósceles dado o raio da circunferência circunscrita (VM8) ou de um triângulo formado pelas rectas que passam num determinado ponto e os eixos (NVA14). No problema PF9 determina-se a área máxima de um sector circular dado o seu perímetro; no problema FG3 pretende-se determinar a menor área da página de um livro dada a área de impressão e a medida das margens. Aparecem também situações em que se pretende optimizar a área de figuras planas compostas: No problema VM6 determina-se a área máxima de um canteiro delimitado por tês semicircunferências, estando duas inscritas na terceira; dado o raio da terceira, no problema NVA1 pretende-se determinar a área máxima de uma figura composta por um rectângulo coroado com um semicírculo, dado o perímetro dessa figura; no problema PF12 pretende determinar-se a soma das áreas mínimas de círculo e de um quadrado dada a soma dos perímetros. Passando agora para os problemas em que se pretende determinar a área de um sólido geométrico, encontramos situações em que se pretende determinar: a área total mínima de um cilindro, prisma ou paralelepípedo dado o seu volume (AC8, NVA9, FG8, PF10, AC3, NVA11). Veja-se um exemplo em que se acha a área máxima de uma figura composta por um rectângulo e um semicírculo:

> *“* ***(NVA1)*** *Uma janela tem a forma que a gravura ao lado reproduz: um rectângulo coroado com um semicírculo. O perímetro da janela deve ser 714 cm.*
>
> *Calcule as dimensões que permitem uma maior entrada de luz.”*



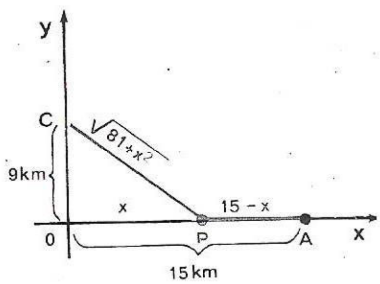
Nos problemas em que se optimiza um volume dão-se as situações: optimizar o volume de um cone circunscrito a uma esfera, dado o raio da esfera (VM2, FG11); o volume de um paralelepípedo ou prisma, dada a soma das suas dimensões (VM1, NVA8); o volume de um prisma dado o perímetro de uma secção feita (VM3); o volume de um cilindro, dado o raio de uma esfera que o circunscreve (OF11, NVA12); o volume de uma caixa de base rectangular, dada a sua área (VM5); o volume de uma caixa, dadas as dimensões da folha utilizada para a construir (PF8, AC7, NVA10); o volume de um cone dado o raio do sector circular utilizado para o construir (NVA2) ou optimizar o volume de um cone de revolução, dado o raio da circunferência que contem o triângulo que o gera (VM8). Vejamos um exemplo da situação que surge em maior número:

> “ ***(AC7)*** *Se cortarmos quatro quadrados iguais nos cantos de uma folha rectangular de 6 dm x 4 dm, poderemos dobrá-la e construir uma caixa aberta.*
>
> *Qual deve ser a medida do lado do quadrado a cortar para que a caixa tenha volume máximo (indica um valor aproximado com erro inferior a 1 cm)”*



Relativamente aos problemas restantes, em seis optimiza-se uma distância; em cinco o perímetro; em três a soma; num problema pretende-se optimizar um produto; num pretende-se optimizar o tempo e em dois pretende-se optimizar o custo. Quanto aos problemas em que se pretende optimizar a distância, no problema FG10 determina-se quando é mínima a soma da distância entre três pontos, nos problemas VM4, AC6 e FG2 pretende-se determinar a distância mínima entre dois objectos, sabendo a velocidade a que cada um se desloca e a distância a um determinado ponto; no problema NVA13 pretende-se determinar o ponto de uma recta cuja distância a um determinado ponto é mínima, e, por fim, no problema NVA15 pretende-se determinar quando é mínima a soma dos quadrados das distâncias entre uma recta e três pontos. Relativamente aos problemas em que se pretende optimizar um perímetro, em todos eles se pretende determinar o perímetro de um rectângulo dada a sua área (FG6, VM9, PF5, AC5, NVA5). Nos problemas aritméticos AC4, PF3, NVA7 pretende-se optimizar uma soma de dois números ou dos seus quadrados, dado o seu produto e no PF4 optimiza-se o produto de dois números sabendo a sua soma. No problema FG4 vai-se optimizar o tempo que um ciclista demora a percorrer um percurso repartido em duas partes em que se desloca a velocidades diferentes. Por fim, no problema AC2, pretende-se determinar o preço de um bilhete para tornar máximo o lucro, tendo em conta o número de pessoas que diminui se o preço aumentar um determinado valor e no problema NVA3 determinam-se as dimensões do reservatório de modo que o custo seja mínimo. Vejamos um exemplo de optimização de tempo que surge neste período:

> “ ***(FG4)*** *Um ciclista vive num local isolado C, que dista 9 km do ponto O mais próximo de uma estrada rectilínea e alcatroada e pretende ir a uma aldeia A que dista 15 km de O, sobre essa estrada.*
>
> *Supondo que o ciclista se desloca a 5 km/h na estrada alcatroada e a 4 km/h no acesso à estrada, determine em que ponto deve atingir a estrada*

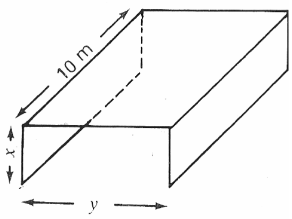


alcatroada para fazer o percurso total no menor tempo possível."

Passando agora para as figuras ou esquemas auxiliares do enunciado, concluímos que trinta e oito dos problemas não apresentam qualquer esquema, onze destes são os problemas de Geometria Analítica, Aritmética e Economia que não vêm acompanhados de qualquer tipo de figura ou esquema auxiliar no enunciado; quinze apresentam figuras com dados e apenas três apresentam figuras simples (VM5, AC1, NVA12). É ainda de referir que, por exemplo, no problema (FG4) se verifica que os dados estão representados num sistema de eixos coordenados, facilitando a compreensão do problema. Reparemos no exemplo seguinte em que temos uma figura com dados, de extrema importância, para a resolução do problema:

*" **(AC3)** A construção mais barata: Pretende-se construir um túnel com a forma que a figura sugere, usando-se três placas rectangulares do mesmo material e espessura uniforme (duas laterais e uma em cima).*

O túnel tem uma extensão de 10 m e a sua boca deve ter 72 m² de área. Que valores devem ter a largura e a altura do túnel para que a construção seja a menos cara possível? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 298)



Os dados são numéricos em quarenta e oito dos problemas surgindo de forma genérica em apenas oito (FG1, FG2, FG9, FG10, FG11, VM1, VM7, PF12). É ainda de referir que o livro de Freitas e Gomes apresenta o primeiro e o último problema com dados genéricos; o livro de Verol Marques apresenta o primeiro problema com dados genéricos e o livro de Palma Fernandes apresenta o último problema com dados genéricos. O livro de Abrantes e Carvalho e o livro de Neves Vieira e Alves apenas apresentam problemas com dados numéricos.

A maioria dos problemas apresenta um enunciado simples (quarenta e seis) e apenas dez dos problemas contêm uma resolução encaminhada. O livro de Freitas e Gomes, o de Palma Fernandes e o de Abrantes e Carvalho apenas mostram problemas com enunciado simples. No livro de Neves Vieira e Alves apenas quatro dos quinze problemas são de resolução encaminhada (NVA3, NVA5, NVA8 e NVA11) e no de Verol Marques seis dos nove problemas são de resolução encaminhada (VM3, VM4, VM5, VM6, VM8, VM9). Observemos alguns dos problemas com resolução encaminhada:

*" **(NVA11)** Pretende-se construir uma caixa, sem tampa, em que a base seja um rectângulo de comprimento duplo da largura.*

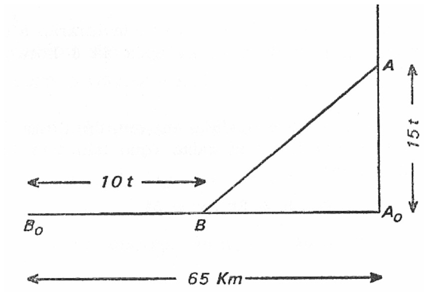
a. Prove que, se o volume é 36 dm³ a área total em dm² é dada pela fórmula

$$A = \frac{108 + 2x^3}{x}$$

Em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.

b. *Calcule x de modo que a área seja mínima."*

*" **(VM4)** Às oito horas um navio B encontra-se a 65 km a Oeste de outro navio A. O navio B ruma a Leste, à velocidade de 10 km/h, enquanto A navega rumo ao Norte, com a velocidade de 15 km/h.*



a. *Mostre que, em cada instante, em quilómetros, que separa os dois navios é dada pela expressão* $\sqrt{(65-10t)^2+225t^2}$.

b. *Calcule a hora a que os dois navios se encontram à distância mínima."*

Concluímos então que, em ambas as situações identificamos uma primeira alínea em que se procura que o aluno demonstre que a função a optimizar é a função dada e na segunda alínea que o aluno determine a solução óptima. Deste modo, mesmo que o aluno não consiga resolver a primeira alínea, consegue fazer a segunda, uma vez que já tem a expressão a optimizar.

A função auxiliar surge implicitamente na maioria dos problemas (trinta e dois) e surge explicitamente em vinte e quatro. No manual de Freitas e Gomes apenas dois problemas têm a função auxiliar de forma explícita (FG3, FG6). Os problemas em que a função auxiliar surge de forma explícita são aqueles em que é dado, por exemplo, o valor da área, do perímetro, do volume, da soma ou do produto. Nestas situações o aluno sabe à partida que terá de utilizar essas fórmulas para determinar o valor de uma variável em função da outra. Os problemas em que a função auxiliar surge de forma implícita são aqueles em que, por exemplo, é dada a medida da hipotenusa, do raio ou dos lados de uma figura e a partir daí o aluno tem de relacionar os dados para determinar o valor de uma variável em função da outra. Nos problemas de Física ou Economia a função auxiliar surge sempre implicitamente. Examinemos o exemplo de um problema de economia:

*" **(AC2)** O preço mais conveniente: A comissão de finalistas de uma escola secundária está a organizar um festival desportivo para angariar fundos. Tendo alugado o pavilhão de um clube da zona, calcularam que, vendendo por 150$00 cada bilhete, conseguiriam uma lotação de 500 pessoas. Porém, um estudo mais atento (baseado em sondagens) levou-os a concluir que, por cada 10$00 que baixassem àquele preço, teriam mais 50 pessoas a comprar o ingresso.*

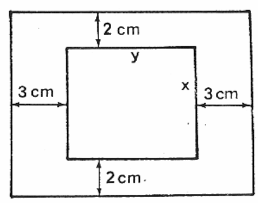
Supondo válidas estas previsões, qual é o preço de cada bilhete que assegura uma maior receita global?"

Num primeiro olhar sobre este problema, não é imediata a forma de calcular a função a optimizar apenas em função de uma só variável. Em primeiro ligar o aluno terá de apurar que a receita resulta do produto entre o número de bilhetes vendidos e o preço e logo a seguir terá de ver qual o aumento no número de pessoas correspondente a cada diminuição de 10$00 no preço do bilhete. Só depois consegue chegar à função a optimizar em ordem apenas a uma variável.

Apreciemos agora quais as noções aplicadas para a resolução dos problemas. Vemos então que, não existe uma noção que se destaque em relação às outras. A noção mais aplicada é o Teorema de Pitágoras que aparece em doze problemas, esta noção surge associada a problemas com triângulos em que necessitamos das medidas dos lados, ou em figuras inscritas, como, por exemplo triângulos em circunferências ou pirâmides/cones em esferas em que temos a medida do raio da circunferência ou da esfera e é necessário determinar a medida dos lados da figura inscrita. A fórmula de cálculo da área surge em dez problemas e a noção de perímetro também noutros dez e em cinco é aplicada a fórmula do volume. Estas surgem, normalmente, em problemas em que a função auxiliar aparece explicitamente, ou seja, no enunciado é dado o valor do perímetro, área ou volume da figura e a partir daí consegue-se determinar uma das variáveis em função da outra. A noção de distância surge em nove problemas, normalmente associada a problemas de Geometria Analítica ou de Física em que se pretende determinar a distância entre objectos ou em problemas de Geometria Métrica ou de Contexto Real de Medida em que é preciso de determinar a medida do lado ou parte do lado de uma figura em função de outros dados. Observemos dois exemplos:

*“ **(FG10)** Considere um referencial o.n. no plano e os pontos A = (0, a) e B = (b, 0). Determine um ponto P do eixo Ox tal que $\overline{AP}+\overline{PB}$ seja mínimo.”*

*“ **(FG3)** Pretende-se imprimir um livro por forma que, em cada página, a mancha impressa seja um rectângulo de 216 cm^2 e com margens superior e inferior de 2 cm e margens laterais de 3 cm.*



Quais devem ser as dimensões mais económicas para o livro (admitindo que o custo do livro é tanto menor quanto menor for a área de cada página)?”

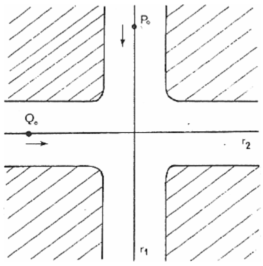
No primeiro caso temos um problema de Geometria Analítica em que se utiliza a noção de distância entre dois pontos. No segundo surge um problema em contexto real de medida em que se utiliza a noção de distância para chegar à medida de cada um dos lados do rectângulo com base na medida das partes do lado que nos são dadas.

A noção de semelhança de figuras detecta-se em cinco problemas, normalmente associada a problemas com figuras inscritas. Em quatro aplica-se a noção de velocidade, problemas da área da Física. Nos de Aritmética aplica-se a noção de soma (três problemas) ou de produto (dois problemas). A noção de função (equação da recta) aplica-se uma vez, num problema de Geometria Analítica e em nenhum problema se utilizam as funções trigonométricas. É ainda de referir que existem problemas em que é necessário aplicar mais do que uma noção, por exemplo, no problema AC9 aplica-se o Teorema de Pitágoras e a semelhança de figuras; nos problemas físicos é necessário, por vezes, usar a noção de velocidade e o Teorema de Pitágoras.

Relativamente à estratégia utilizada, apurámos que apenas vinte e três problemas aparecem, pela primeira vez; dos restantes, vinte e quatro já surgiram em manuais anteriores (FG1, FG6, FG7, FG8, FG9, PF2, PF3, PF4, PF5, PF6, PF8, PF9, PF11, PF12, AC2, AC4, AC7, AC8, NVA7, NVA8, NVA9, NVA10, NVA11, NVA12). Seis são retirados de enunciados de exames (VM1, VM3, VM4, VM5, VM6, VM7) e três pertenceram já a uma das obras históricas analisadas (PF1, PF10, NVA6).

Tal como no período anterior, a função que identificámos mais vezes é a função polinomial (vinte e cinco), seguida da função racional (dezoito) e as funções irracionais surgem em treze problemas. Os restantes tipos de funções não aparecem em nenhum problema. Note-se que todos os manuais analisados contêm os três tipos de funções. As funções irracionais vêm associadas a problemas em que se aplica o Teorema de Pitágoras ou a noção de distância, enquanto que as funções racionais surgem associadas a problemas em que se aplica a noção de área, volume, produto ou semelhança de figuras.

Apenas vinte e dois problemas mostram resolução. O esquema utilizado para cálculo dos extremos em catorze dos problemas é o cálculo dos zeros seguido do estudo do sinal. Apenas cinco problemas fazem o estudo do sinal da segunda derivada e os restantes dois problemas só calculam os zeros. No livro de Freitas e Gomes encontramos um problema em que apenas se calculam os zeros da derivada e os restantes que apresentam o cálculo dos zeros da derivada e o estudo do sinal. No livro de Verol Marques encontramos as três situações distintas. No livro de Palma Fernandes, no livro de Abrantes e Carvalho e ainda no livro de Neves Vieira e Alves todos os exercícios que apresentam solução são resolvidos da mesma forma: Cálculo dos zeros da derivada e estudo do seu sinal. Vejamos algumas situações:



*“ **(FG2)** Dois pontos materiais P e Q movem-se sobre duas rectas perpendiculares r_1 e r_2 com movimentos uniformes de velocidades (algébricas) respectivamente v_1 e v_2.*

No instante inicial, isto é, no instante em que se começa a contar o tempo, P encontrava-se na posição P_0 à distância a_1 de r_2 e Q encontrava-se na posição Q_0 à distância a_2 de r_1, como se esquematiza na Fig. 44.

Determinar o instante em que a distância dos pontos é mínima e calcular essa distância.

Considerando um sistema de eixos com origem no ponto de encontro das rectas, Fig. 45, a ordenada do ponto P no instante t será

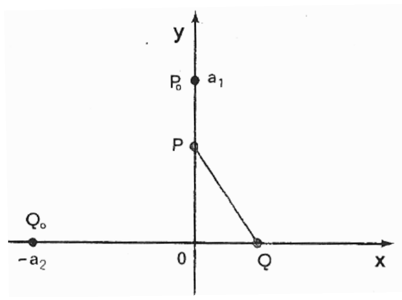
$$y = a_1 - v_1 t$$

e a abcissa do ponto Q será

$$x = - a_2 - v_2 t$$

A distância dos dois pontos será nesse instante

$$\rho = \sqrt{(a_1 - v_1 t)^2 + (-a_2 - v_2 t)^2}$$



ou seja

$$\rho = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2) - 2(a_1 v_1 + a_2 v_2)t + (v_1^2 + v_2^2)t^2}$$

Trata-se, então, de averiguar da existência de um mínimo para a função $\rho(t)$.

Se este mínimo existe, ele corresponderá ao mínimo da função $\rho^2(t)$ e reciprocamente. Por isso e por simplicidade, vamos trabalhar com esta função que designaremos por f(t). Tem-se

$$\frac{df}{dt} = -2(a_1 v_1 + a_2 v_2) + 2(v_1^2 + v_2^2)t$$

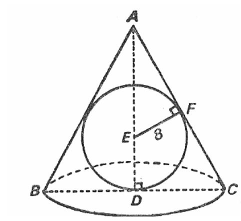
derivada esta que se anula para $t = \dfrac{a_1 v_1 + a_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$

Nesse caso a própria natureza do problema indica que se trata de um mínimo cujo valor é, como facilmente se pode calcular,

$$\frac{(a_1 v_2 - a_2 v_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}$$

Então, $\rho = \dfrac{|a_1 v_2 + a_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$ *é a distância mínima procurada.”*

Confirmamos que neste problema, o autor faz o cálculo dos zeros da derivada, como só obteve um valor, conclui de imediato que esse é o ponto em que se atinge o valor mínimo.



*“ **(VM2)** Determine a altura do cone circular recto de volume mínimo circunscrito a uma esfera de raio 8 unidades.*

Sendo x a altura do cone e y o raio da base.

Da semelhança de triângulos [AEF] e [ADC] resulta:

$$\frac{8}{y} = \frac{x-8}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{64}{y^2} = \frac{(x-8)^2}{x^2+y^2}$$

$$64x^2 + 64y^2 = y^2(x-8)^2$$
$$64x^2 = y^2\left(x^2 - 16x + 64 - 64\right)$$
$$y^2 = \frac{64x^2}{x^2-16x}$$

Volume do cone:

$$V = \frac{\pi y^2 x}{3}$$

$$\therefore V = \frac{\pi}{3} . \frac{64x^3}{x^2-16x}$$

$$V = \frac{64\pi}{3} . \frac{x^2}{x-16}$$

$$V' = \frac{64\pi}{3} . \frac{2x^2-32x-x^2}{(x-16)^2}$$

$$V' = \frac{64\pi}{3} . \frac{x^2-32x}{(x-16)^2}$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 32x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 32$$

Como x $\neq$0 é x = 32

$$V'' = \frac{64\pi}{3} . \frac{(2x-32)(x-16)^2 - 2(x-16)(x^2-32x)}{(x-16)^4}$$

$$V'' = \frac{64\pi}{3} . \frac{2(x-16)^3 - 2(x-16)x(x-32)}{(x-16)^4}$$

$$V''(32) = \frac{64\pi}{3} . \frac{2.16^3}{16^4} > 0$$

Como V'(32) = 0 $\wedge$ V''(32) > 0, o volume do cone é mínimo quando a altura do cone for 32 unidades.”

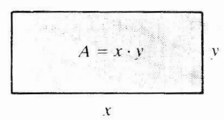
Neste problema, após o cálculo dos zeros da derivada, confirma-se através da segunda derivada que num dos valores obtidos a função tem um mínimo. Apesar de se ter obtido dois zeros da derivada apenas o valor diferente de zero é considerado.

Quanto aos gráficos, figuras ou esquemas auxiliares na resolução dos problemas verificamos que, em onze problemas é utilizado o quadro de monotonia; em nove surge uma figura na resolução; em dois surge o gráfico da função a optimizar e em quatro não é utilizado qualquer auxiliar. Os problemas com resolução da obra de Abrantes e Carvalho e da obra de Neves, Vieira e Alves incluem sempre o quadro de monotonia. Dos quatro problemas com resolução da obra de Freitas e Gomes, dois trazem uma figura e os outros dois não apresentam nada. Na obra de Verol Marques apenas um exercício não apresenta nada; seis apresentam uma figura e três incluem quadro de monotonia. Nos dois exercícios resolvidos da obra de Palma Fernandes, um apresenta quadro de monotonia e o outro não apresenta nada. É ainda de referir que existe um problema que apresenta figura e quadro de monotonia (VM4) e existe também um problema que apresenta figura, quadro de monotonia e gráfico (AC1). Consideremos este último exemplo:

Problema 1: A maior área possível.

Um indivíduo dispõe de 20 metros de arame com os quais quer vedar um pequeno parque de forma rectangular num terreno que tem à sua disposição. Pretendendo obter a *área máxima*, que dimensões deve escolher para o parque?

■ Esquema:



Simplificando (e *matematizando*) o enunciado, o problema consiste em determinar, de entre todos os rectângulos de perímetro 20, qual é aquele que tem maior área.

Designando por x e y as dimensões do rectângulo será

$$2x + 2y = 20 \iff x + y = 10 \iff y = 10 - x$$

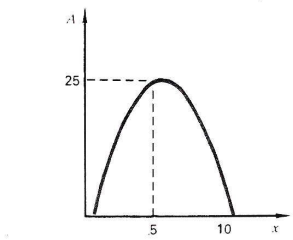
$P = 2x + 2y = 20$

e, como a área do rectângulo é dada por $A = x \cdot y$, ter-se-á

$$A = x \cdot (10 - x) \quad \text{ou seja} \quad A = 10x - x^2$$

expressão da área (A) em função de uma das dimensões (x).

■ Gráfico de $x \longmapsto A = 10x - x^2$ no intervalo $]0, 10[$:



Para que valor de x obtemos o valor máximo de A ?

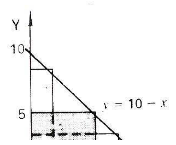
Derivando: $A' = D(10x - x^2)$, logo $A' = 10 - 2x$.

Facilmente se vê que A' se anula para $x = 5$, sendo positiva à esquerda de 5 e negativa à direita de 5.

Então A tem um máximo para $x = 5$, sendo 25 o valor da função nesse ponto. A área máxima é portanto de 25 m^2 .

x		5	
$A' = 10 - 2x$	+	0	−
$A = 10x - x^2$	↗	25	↘
		máx.	

Devendo ser $x = 5$, então também $y = 5$ (recorda que $y = 10 - x$) pelo que se conclui que o quadrado de lado 5 é, de entre todos os rectângulos de perímetro 20, aquele que tem **maior área**.



Observamos que este problema apresenta uma resolução extremamente completa. Está dividida em duas partes, um corpo principal onde surge toda a resolução do problema e uma coluna na margem do manual onde aparecem esquemas e gráficos.

Finalmente, em relação ao valor pedido, este aparece de forma explícita, em vinte e nove dos problemas e implicitamente nos restantes dezassete. Na obra de Verol Marques surge sempre explicitamente.

Assim sendo, este período é caracterizado por problemas que surgem sob a forma de exercício. Encontram-se mais problemas em contexto real de medida que nos períodos anteriores e, tal como no período anterior, o que mais se optimiza é a área ou o volume. Existe também um aumento no número de problemas que contêm figuras com dados. O enunciado é simples na maioria dos problemas. As noções mais utilizadas são: o Teorema de Pitágoras, noção de perímetro e de área e a noção de distância.

Quanto à estratégia, notámos que existem mais problemas que já apareceram anteriormente, essencialmente noutros manuais, do que problemas que surgem pela primeira vez, estando a função a optimizar, neste período, mais repartida entre polinomial, racional e irracional. Por fim, em relação ao esquema de cálculo, nota-se que na maioria dos problemas que vêm acompanhados da resolução esta é feita pelo cálculo dos zeros da derivada e do estudo do seu sinal, apresentando grande parte destes problemas o quadro de monotonia.

Os dados obtidos na análise dos problemas de optimização deste período estão sintetizados na tabela a seguir.

3.4. A LEI DE BASES DO SISTEMA EDUCATIVO DE 1986

3.4.1. A REFORMA DE ROBERTO CARNEIRO E A LEI DE BASES DO SISTEMA EDUCATIVO (1986)

A. Análise do programa oficial

A 14 de Outubro de 1986 foi publicada a Lei de Bases do Sistema Educativo. Esta obrigava a uma reforma do sistema de ensino e definia princípios e orientações básicas para uma reorganização dos planos curriculares dos ensinos básico e secundário. A Comissão de Reforma do Sistema Educativo (CRSE) encarregou-se de interpretar as orientações curriculares da Lei de Bases, tomando as opções curriculares fundamentais, no que respeita aos critérios de selecção das matérias curriculares e aos princípios orientadores da estrutura curricular. Ficou definida então a configuração da educação secundária, nos seus objectivos, organização estrutural e plano de estudos.

O Ensino Secundário, composto por 3 anos, distribui-se por quatro agrupamentos distintos: 1) Científico-Natural, 2) Artes, 3) Económico-Social e 4) Humanidades. Cada um deles está subdividido em dois cursos: Curso Geral e Curso Tecnológico. Estando o primeiro vocacionado para os alunos que pretendiam prosseguir os seus estudos e o segundo vocacionado para a vida activa.

Neste quadro geral, a Matemática aparece como disciplina da Formação Específica, de vários agrupamentos, e a que é atribuída uma carga horária semanal de 4 horas em cada um dos anos do Ensino Secundário. Em 1987 é divulgado o documento Proposta de Reorganização dos Planos Curriculares dos Ensinos Básico e Secundário.

É neste quadro que é elaborado o programa do Ensino Secundário de Matemática, publicado em 1989, com uma primeira aplicação experimental, em algumas escolas no ano lectivo de 1991/92 e depois, desde 1993, com a aplicação generalizada em todas as escolas do país.

Com esta reforma foram criadas duas disciplinas distintas na área da Matemática: Matemática e Métodos Quantitativos. A primeira encorpava o agrupamento Científico-Natural, Artes e Económico-Social e a segunda o agrupamento Humanidades.

Analisaremos apenas o programa da primeira, uma vez que a segunda não contempla, no seu estudo, a Análise Infinitesimal.

Esta reforma marca a diferença em relação a todas as outras vistas até agora, já que é a primeira que se refere explicitamente aos problemas de optimização. É também inovadora em relação às ferramentas a utilizar, em particular para o estudo de funções, uma vez que contempla a utilização da calculadora gráfica e do computador no estudo das funções. Nessa altura não é ainda obrigatório o uso da calculadora gráfica na sala de aula pelo que as ferramentas auxiliares acabam por praticamente não ser utilizadas. Um outro aspecto a salientar é o facto de a derivada fazer parte do programa do 11º e do 12º ano e não apenas de um ano.

Uma vez que no 10º ano também se efectua o estudo de funções, iremos também analisar esse programa.

Examinemos então como ficou estruturado o programa experimental da disciplina de Matemática para o 10º ano.

Programas do Ensino Secundário de 1991

(Para aplicação em regime de experiência pedagógica)

10º Ano

Funções I – Generalidades. Função quadrática

- *Funções definidas por tabelas e por fórmulas; interpretação e elaboração de gráficos por pontos. Características gerais de uma função.*
- *Função quadrática*
- *Lógica. Primeiras leis de De Morgan. Quantificadores.*

(Programa de Matemática, 10º-12º anos, 1991)

Nesta parte do programa surgem como objectivos:

- *Analisar fórmulas da Geometria e de outras disciplinas para identificar funções de uma variável.*
- *Identificar em gráficos dados ou construídos (calculadora) domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonia,* ***extremos,*** *taxa de variação média num dado intervalo, injectividade de uma função e interpretar o fenómeno por ela descrito.*
- *Determinar, com o auxílio do gráfico e da calculadora, o comportamento da função numa vizinhança de pontos especiais do domínio.*
- ***Resolver problemas envolvendo a expressão de uma variável em função de outra, ou recorrendo a um gráfico.***

Pelo que se observa que, apesar de não surgir de forma explícita o estudo dos problemas de optimização, mas como se calculam extremos a partir da calculadora e se pretende fomentar a resolução de problemas, podemos encontrar nos manuais escolares alguns problemas de optimização.

Repare-se agora como ficou estruturado o programa experimental da disciplina de Matemática para o 11º ano.

11º Ano

Funções III – Limites. Derivadas

- *Limites e continuidade de funções*
- *Derivação de funções racionais. Segunda derivada. Aplicações*
  - *Derivada de uma função num ponto como limite da taxa de variação; interpretação geométrica*
  - *Teorema relativo à derivabilidade e continuidade (com demonstração)*
  - *Derivada da soma e do produto (com demonstração)*
    - *Derivada da potência e do quociente (informação)*
    - *Segunda derivada*
    - ***Aplicação da 1ª e da 2ª derivada ao estudo de gráficos, de máximos e mínimos relativos, de concavidades.***
    - *Assímptotas verticais e não verticais.*

(Programa de Matemática, 10º-12º anos, 1991)

Nesta parte do programa surgem como objectivos:

- *Calcular derivadas usando a definição (em casos simples), ou as regras de derivação.*
- *Determinar a tangente ao gráfico de uma função dada num ponto dado.*
- *Fazer o estudo analítico duma função racional e aplicá-lo num traçado de gráficos.*
- *Identificar, em situações problemáticas concretas, funções que permitam resolvê-las.*
- ***Resolver problemas de "máximos e mínimos"***

Este programa vem acompanhado de algumas indicações metodológicas. Em relação ao nosso tema há a seguinte indicação:

*Os **problemas de optimização** devem ser acessíveis e ter algum interesse prático. Exemplo:*

"De uma folha de cartão rectangular de 1m x 0,8m retira-se um quadrado em cada canto, para construir uma caixa sem tampa". Quando é que a capacidade da caixa é máxima?

Observámos que neste programa se refere, pela primeira vez, o estudo dos problemas de optimização. Assim, após aprender a calcular derivadas, os alunos devem resolver os respectivos problemas de aplicação, em particular problemas de optimização. Nas indicações metodológicas apresentam o exemplo de um problema de optimização de um volume.

Também o programa para o 12º ano contempla o estudo da derivada. Vejamos como ficou estruturado este programa, no capítulo dedicado às derivadas.

12º Ano

Funções IV – Complementos sobre Derivadas

- *Derivada da função inversa e da função composta; aplicações. Derivadas sucessivas. Derivadas de funções implícitas.*
  - *Derivada da função inversa e derivada da função composta; aplicação à derivada de* $\sqrt[n]{f(x)}$
  - *Derivada de* x^{α}*, com* $\alpha \in IR$ *e* $x \in IR^{+}$ *(informação)*
  - *Derivada da função implícita.*
- *Estudo de funções irracionais.*
  - *Funções irracionais: domínio, continuidade*

(Programa de Matemática, 10º-12º anos, 1991)

Nesta parte do programa surgem como objectivos:

- *Derivar funções compostas*
- *Fazer o estudo e gráfico de funções irracionais simples envolvendo apenas um radical quadrático ou cúbico.*

Surgem também algumas indicações metodológicas. Em relação ao nosso tema surge a seguinte indicação:

Fazer o estudo de algumas funções irracionais dos tipos $\sqrt{x-3}$ *,* $\sqrt[3]{x^2 - x}$ *, as quais podem surgir ligadas a um* ***problema de optimização*** *como:*

"Determinar o rectângulo de área máxima que se pode inscrever num semicírculo de raio 10m."

Apurámos então que, apesar de os conteúdos programáticos não fazerem referência às aplicações das derivadas, estes constam nas indicações metodológicas. Adverte-se então que se faça o estudo de algumas funções irracionais, podendo estas estar ligadas a um problema de optimização. O exemplo apresentado é de um problema em que se pretende fazer a optimização de uma área.

Este programa não faz nenhuma referência a manuais para o ensino.

Relativamente às calculadoras, apenas eram utilizadas, pelos alunos, as calculadoras científicas, muito utilizadas para os cálculos estatísticos. De qualquer forma os professores podiam já utilizar as calculadoras gráficas como material de apoio às aulas.

B. Análise dos Manuais Escolares

Para esta reforma seleccionámos três manuais que iremos analisar para os três anos lectivos. Estes manuais foram seleccionados dado que foram os manuais mais utilizados pelos professores nesta época.

Vejamos agora as características de cada um dos manuais.

Manuais do 10º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: *Xeqmat, 10º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1992, Editorial O Livro: Lisboa

Localização da obra consultada: Biblioteca Pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual é composto por 327 páginas repartidas por cinco unidades. Apesar de não analisármos o programa para o 10º ano, uma vez que este não refere os problemas de optimização nem as derivadas, impõe-se neste momento examinar este tipo de manuais uma vez que apresentam problemas de optimização na unidade quatro, dedicada às funções, mas especificamente no estudo das funções quadráticas e funções polinomiais.

Como o programa não contempla especificamente os problemas de optimização nem a derivada, encontramos um número reduzido de problemas de optimização neste manual.

Este apenas apresenta um problema de optimização, que vem no final do capítulo dedicado às funções, como uma actividade para trabalho de grupo com relatório.

Autor: M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito

Título: *Matemática 10, 10º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1994, Porto Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Superior de Educação de Coimbra

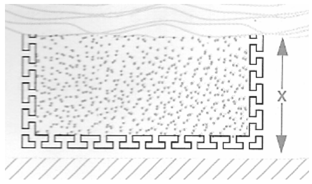
Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em dois volumes, contendo cada um dos volumes três capítulos. O segundo volume, onde encontramos os problemas de optimização, é composto por 272 páginas repartidas pelos seguintes capítulos: Geometria analítica I (Introdução ao método cartesiano), Funções I (Generalidades, função quadrática e função módulo) e Geometria analítica II (Vectores, rectas e paralelismo).

Os problemas de optimização constam no segundo capítulo deste volume, dedicado às funções. Cada capítulo está dividido em vários sub-capítulos, contendo no final, um conjunto de problemas resolvidos e um conjunto de problemas propostos. No final do capítulo é listado mais um conjunto de exercícios de revisão e actividades e no fim de cada volume as autoras apontam as soluções e um formulário. Cada tema vem acompanhado por um conjunto de exercícios resolvidos tendo nas margens exercícios de aplicação relacionados com o tema que se está a abordar.

Como no 10º ano ainda fora abordado o cálculo de máximos e mínimos, utilizando as derivadas, o manual expõe apenas dois problemas de optimização nos exercícios finais do capítulo das funções.

Observemos agora os problemas de optimização que encontramos nos manuais do 10º ano, desta reforma:

Problemas de Medida em Contexto Real



LG10.1. *Com 100 m de rede temos de vedar 3 lados de um terreno rectangular à beira de um rio.*

Exprime a área do terreno em função do lado x.

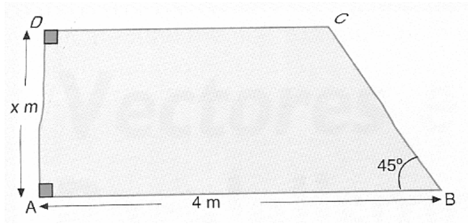
Estuda o domínio da função; esboça o gráfico.

Faz um estudo da função relativamente a zeros, monotonia, extremos, injectividade.

Conclui qual a área máxima que se pode vedar com os 100 m de rede.

Ilustra o relatório desenhos à escala de vários rectângulos possíveis. (Lima e Gomes 10º, 1994, p. 259)

***NB10.1** A figura representa um jardim com a forma de um trapézio rectângulo.*



a. Escreva $\overline{DC}$ em função de x.

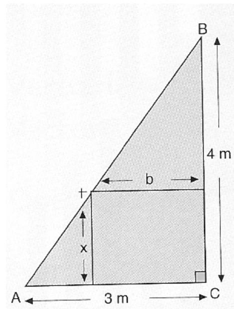
b. Mostre que a área do trapézio em função de x é dada pela fórmula:

$$A = 4x - \frac{x^2}{2}$$

c. Calcule a altura x do trapézio de modo que a área seja inferior a 6 m².

d. Determine a área máxima do trapézio. (Neves e Brito 10º, Vol. 2, 1994, p. 167)

***NB10.2.** Pretende-se construir uma estante para colocar numa parede triangular de umas águas-furtadas, como se indica na figura.*



a. Escreve b em função de x.

b. Mostre que a área da estante pode ser dada pela fórmula:

$$A = 3x - \frac{3}{4}x^2$$

c. Para que valores de x é máxima a área? (Neves e Brito 10º, 1994, p. 167)

Manuais do 11º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: *Xeqmat, 11º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1994, Editorial O Livro: Lisboa

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Superior de Educação de Coimbra

Caracterização e estrutura da obra: Este manual é constituído por um só volume composto por 368 páginas, repartidas por seis unidades, sendo a última dedicada aos limites e derivadas. É nesta unidade que identificámos os problemas de optimização. Veja-se como está constituída esta unidade:

- *Limite de uma função real de variável real*
- *Continuidade num ponto e num intervalo*
- *Derivada de uma função num ponto como limite da taxa de variação média: Interpretação geométrica, derivadas laterais, função derivada, teorema relativo à derivabilidade e continuidade (com demonstração), derivada da soma e do*

produto (com demonstração), do quociente e da potência de expoente racional (sem demonstração), segunda derivada, aplicação da 1ª e da 2ª derivadas ao estudo de gráficos, de máximos e mínimos relativos, de concavidades.

- *Assimptotas verticais e não verticais*

Na parte desta unidade dedicada à derivada de uma função são expostos os objectivos seguintes:

- *Encontrar, em situações problemáticas concretas, funções que permitam resolvê-las.*
- *Resolver problemas de "máximos e mínimos".*

Confirmámos então, que apesar de no desenvolvimento do tema não serem referidos os problemas de optimização, estes vêem-se, implicitamente, nos objectivos.

Achámos nesta parte quatro exemplos de problemas de optimização com a respectiva resolução. Nas margens do manual, ao longo da apresentação destes problemas, estão nove exercícios que são também problemas de optimização e, no final da unidade, os autores apresentam um conjunto de quarenta e quatro exercícios e actividades dos quais oito são problemas de optimização.

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo

Título: *Infinito 11, 11º Ano Volume 2*

Ano, editora e lugar de edição: 1994, Areal Editores: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Esta obra está dividida em dois volumes. O primeiro, com 170 páginas, é contempla o estudo das probabilidades I, funções II e trigonometria e o segundo, com 200 páginas, é dedicado à geometria analítica III, sucessões V e Funções III: Limites e derivadas.

É no sexto capítulo, que trata dos limites e derivadas das funções, que encontrámos os problemas de optimização.

Apreciemos qual a estrutura deste capítulo:

VI. Funções III: Limites e derivadas

1. *Limite de uma função real de variável real*
2. *Continuidade*
3. *Derivadas: Derivada de uma função num ponto, interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto, interpretação cinemática da derivada de uma função num ponto: velocidade, derivadas infinitas, derivabilidade e continuidade*

   3.1. *Função derivada: Função derivada de algumas funções*

3.2. Regras de derivação: Derivada da soma, derivada do produto, derivada de um quociente, derivada da potência de expoente natural, derivada de ordem superior

3.3. Aplicações da derivada

- *Sinal da derivada e sentido de variação*
- *Extremos relativos de uma função*
- ***Problemas de máximos e mínimos***

  Problemas de optimização
- *Estudo analítico de funções*

Aplicando

Soluções

Neste manual, vemos os problemas de optimização na parte "*Aplicações da derivada: problemas de máximos e mínimos. Problemas de optimização*". Encontramos também alguns problemas de optimização na parte "Aplicando" dedicada apenas aos exercícios.

Na parte destinada aos problemas de máximos e mínimos as autoras referem as etapas a seguir na resolução dos problemas:

- *Definir uma função que sirva de modelo matemático À situação a estudar (se possível com uma só variável)*
- *Estudar a variação dessa função determinando, em particular, os seus extremos*
- *Confrontar os resultados teóricos com o fenómeno real e com a situação concreta do problema.*

Logo a seguir são expõem cinco problemas resolvidos, dos quais quatro são problemas de optimização.

No final deste capítulo as autoras apresentam 67 exercícios seguidos da respectiva solução. Nestes exercícios há seis problemas de optimização enunciados como tal.

Autor: M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito

Título: *Matemática 11, º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1994, Porto Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Superior de Educação de Coimbra.

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em dois volumes, contendo cada um dos manuais três capítulos. O segundo manual contém 271 páginas e aborda os seguintes temas:

4. Geometria analítica III: Produto escalar. Perpendicularidade no plano

5. Sucessões

6. Funções III: Limites. Derivadas.

É no sexto ponto, consagrado aos limites, continuidade e derivadas que encontramos os problemas de optimização. Reparemos como está estruturado este capítulo:

1. Limites de funções

2. Limites e infinitos

3. Continuidade de uma função

4. Derivada de uma função

5. Função derivada. Regras de derivação

6. Aplicações das derivadas

6.1. Sentido de variação de uma função

6.2. Extremos relativos de uma função

6.3. Sentido da concavidade do gráfico de uma função

6.4. Representação gráfica de funções

6.5. Problemas de optimização.

Revisões e actividades

Soluções

Funções – Um pouco de história

Do exposto, deduz-se que os problemas de optimização surgem no último ponto a abordar dentro das aplicações das derivadas. As autoras começam por explicar que o estudo das derivadas permite determinar com rigor os máximos e mínimos de funções e que na vida real é importante determinar o custo mínimo, volume máximo, área máxima, etc. Posteriormente são indicados três exemplos de problemas de optimização, acompanhados nas margens de dois exercícios de aplicação. No final do ponto relativo às aplicações das derivadas existem doze problemas propostos, dos quais três são problemas de optimização. No final do capítulo as autoras mostram oito exercícios de cálculo e doze problemas e aplicações, sendo três desses problemas e aplicações problemas de optimização.

Examinemos agora quais os problemas de optimização encontrados nos manuais do 11º ano, desta reforma.

Problemas de Geometria Métrica

LG11.5. *De todos os triângulos rectângulos cujos catetos somam 50 cm, determina o que tem área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 317)*

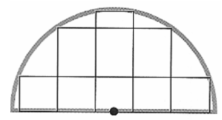
LG11.6. *De entre os rectângulos com 60 dm² de área, descobre as dimensões do que tem perímetro mínimo. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 317)*

LG11.7 *De entre os rectângulos com 80 m de perímetro, determina as dimensões do que têm área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 317)*

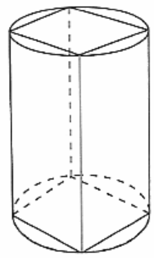
LG11.10. *Considera os vários paralelepípedos de base quadrada cujas dimensões somam 1 metro.*

Calcula a altura do que em maior volume. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 320)

LG11.11. *Dos rectângulos inscritos num semicírculo de raio 10 cm, determina a base do que tem maior área. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 320)*



LG11.13. *Um prisma quadrangular regular está inscrito num cilindro. A secção desse cilindro por um plano contendo o eixo tem 30 cm de perímetro.*



a. Exprime o volume do prisma em função do diâmetro x do cilindro.

b. Determina o domínio da função e o valor de x que torna o volume máximo. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 321)

LG11.14. *Determina as dimensões do rectângulo.*

a. *Com 100 cm² de área e cujo perímetro é o menor possível.*

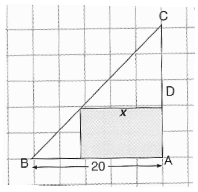
b. *De maior área que se pode contornar com 1200 m de rede. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)*

LG11.16. *Um trapézio tem três lados com 8 cm cada um.*

Determina o comprimento do 4º lado de forma que a área seja máxima.

Sugestão: Exprima a área em função de metade da diferença das bases. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)

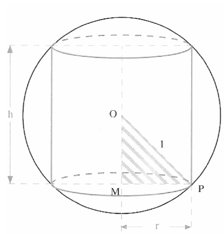
LG11.18. *Na figura o rectângulo em cor está inscrito no triângulo rectângulo isósceles cujos catetos medem 20 cm.*
Determina as dimensões do rectângulo de área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)



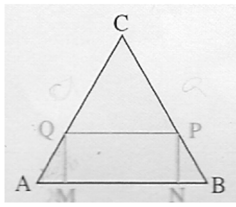
JAFB11.4. O maior cilindro inscrito numa esfera

Consideremos uma esfera de raio 1 dm e um cilindro de altura h e raio da base r inscrito na esfera (as suas duas bases são círculos da esfera).

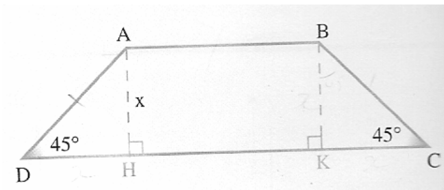
Qual o valor de h para o qual o volume do cilindro é máximo? E qual é o valor desse volume? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p.343)



JAFB11.8. *Considere o triângulo equilátero [ABC] de lado a.*
Inscreve-se neste triângulo um rectângulo [MNPQ].
Faça-se $\overline{AM} = x$
Para que valor de x a área do rectângulo é máxima? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 367)



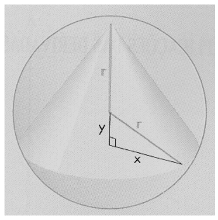
JAFB11.10. *[ABCD] é um trapézio isósceles de área* $5\sqrt{2}$ *cm²*
Os ângulos agudos medem 45º.
Seja x (em cm) a altura do trapézio e P(x) o seu perímetro (em cm).

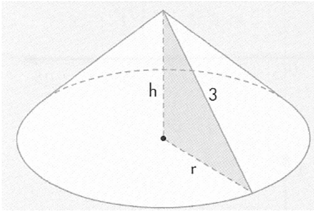


a. *Exprima* $\overline{DH}$ *e* $\overline{CK}$ *em função de x.*
b. *Exprima* $\overline{AD}$ *e* $\overline{BC}$ *em função de x.*
c. *Utilize a área do trapézio para exprimir* $\overline{AB}$ *em função de x.*
d. *Mostre que* $P(x) = 2\sqrt{2}x + \dfrac{10\sqrt{2}}{x}$
e. *Encontre o valor de x para o qual o perímetro do trapézio é mínimo.*

Qual é então a medida dos lados do trapézio? Interprete graficamente. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p.368)

NB11.3. *Determine o volume máximo de um cone inscrito numa esfera de raio 3 cm. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 225)*





NB11.8. *Como gerar um cone*

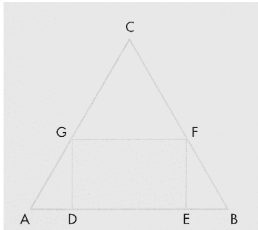
Um triângulo rectângulo de hipotenusa 3 cm é rodado em torno de h para gerar um cone de revolução de raio r.

Determine o raio, a altura e o volume do cone gerado deste modo e que tenha volume máximo. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 228)

NB11.11. *O triângulo [ABC] é equilátero de lado 10 cm.*

Construiu-se um rectângulo [DEFG] como se indica na figura.

Determine as dimensões do rectângulo de modo que este tenha área máxima. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 235)



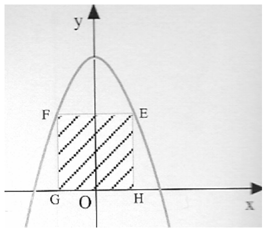
Problemas de Geometria Analítica

LG11.17. *São dados, num referencial o.n. os pontos A (0, 1), B (6, 1) e P (x, 0). Determina x de forma que* $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ *seja mínima. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)*

JAFB11.12. *Considere a parábola definida por*

$$y = -x^2 + 9$$

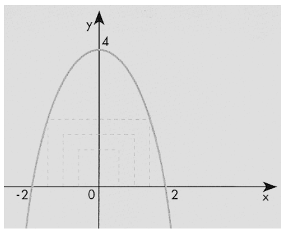
Supondo que a unidade adoptada é o cm, determine as dimensões do rectângulo [EFGH] de área máxima sabendo que E e F são pontos da parábola e G e H são pontos do eixo das abcissas. (Prova de exame E. S. Filipa de Vilhena, 1993) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 374)



NB11.9. *Um rectângulo tem base no eixo dos xx e os outros dois vértices pertencem à parábola de equação*

$$y = 4 - x^2$$

Qual a área máxima que o rectângulo pode ter? (Neves e Brito 11º, 1994, p. 235)



Problemas de Aritmética

LG11.8. *Calcula os números:*

a. *Cuja soma é 30 e cujo produto é máximo.*

b. *Cuja diferença é 20 e cujo produto é máximo. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 317)*

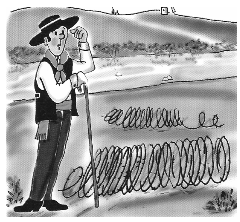
NB11.7. *A soma é 20*

A soma de dois números positivos é 20. Determine os números sabendo que:

a. *O seu produto é máximo*

b. *A soma dos seus quadrados é mínima. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 228)*

Problemas de Medida em Contexto Real

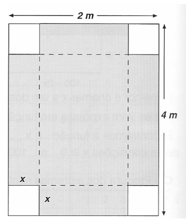


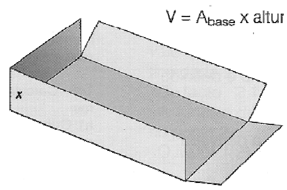
LG11.1. *A horta à beira rio*

O Sr. Joaquim pediu-nos ajuda:

"Tem 100 metros de rede para vedar um terreno rectangular à beira rio. Só quer vedar 3 lados que não dão para o rio. Mas quer que a área da horta fica a maior possível…" (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 317)

LG11.2. *Um pequeno contentor*

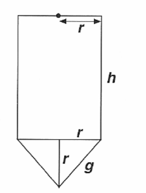




Suprimindo um quadrado em cada canto de uma chapa metálica rectangular, de 2 metros por 4 metros, vai construir-se um contentor (sem tampa).

Determinar o lado do quadrado a suprimir de modo que o volume do contentor seja o maior possível. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 318)

LG11.3. *Silos para cimento*

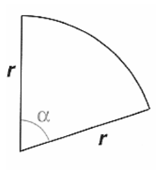


Silos para conter cimento têm a forma de um cilindro de altura h e raio r sobreposto a um cone de altura e raio iguais a r.

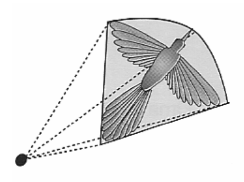
Para silos com volume total de 100 m^3 determinar r de modo que a área lateral seja o menor possível para minimizar o custo do silo. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 319)

LG11.9. *De um cartão quadrado com 1m^2 de área, tira-se um quadrado a cada canto para fazer um caixote (sem tampa).*

Determina qual deve ser o lado desses quadrados para que o volume do caixote seja o maior possível. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 318)



LG11.12. *Uma fábrica de jogos produz "papagaios" de tecido muito fino esticado numa armação de alumínio com a forma de um sector circular tendo 2 metros de perímetro total.*



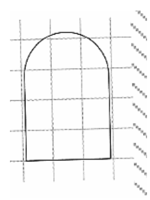
Determina, em radianos, o ângulo alfa do sector para que a resistência ao vento seja máxima (área máxima). (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 320)

LG11.15. *Um arame com 24 cm vai ser cortado em duas partes, uma para formar um quadrado e outra para definir um círculo.*

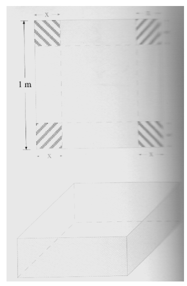
Em que ponto deve ser cortado o arame para que a soma das áreas do quadrado e do círculo seja mínima? (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)

LG11.19. *Uma janela com a forma de um rectângulo com um semicírculo em cima, tem de ter 4 metros de perímetro.*

Determina as dimensões da janela que correspondem a um vão máximo (área máxima). (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)



JAFB11.1. Economia no fabrico



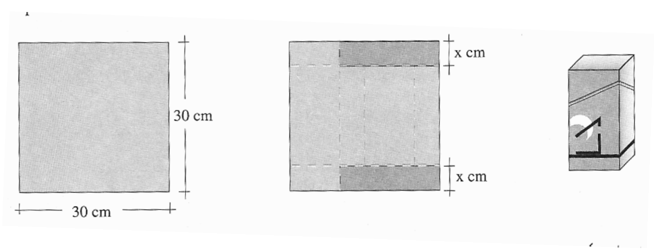
Considere-se uma placa de cartão de forma quadrada com 1m de lado.

Corta-se em cada canto um quadrado de lado x, com o fim de fazer uma caixa paralelipipédica sem tampa.

Qual o valor de x que torna o volume da caixa máximo? E qual é, então, esse volume? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p.340)

JAFB11.2. Economia no fabrico

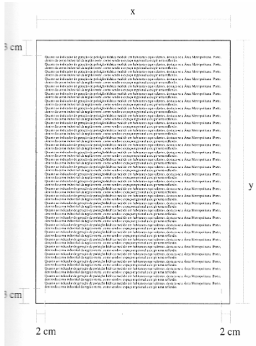
Uma empresa fabrica caixas em cartão cortando duas faixas da mesma largura numa folha quadrada.



A medida do lado da folha é 30 cm e designa-se por x a medida, em centímetros, da largura da faixa que se retira.

Determinemos o valor de x que torna o volume da caixa máximo e, seguidamente, calculemos esse volume. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 340)

JAFB11.3. Economia no fabrico



Um editor pretende conhecer as dimensões x e y (em centímetros) das folhas de um livro que pensa publicar, de modo a garantir que o consumo de papel seja mínimo e que sejam respeitadas as seguintes condições:

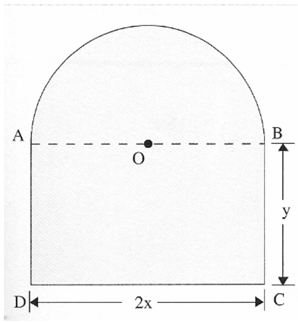
- Cada página deverá ter margens laterais de 2 cm e margens de topo e de fundo de 3 cm.

- A área disponível para impressão deve ser, em casa página, 600 cm^2. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11° V2, p. 341)

JAFB11.7. *Uma janela é formada por um rectângulo [ABCD] e por u m semicírculo de diâmetro [AB].*

Seja x o raio do semicírculo e y a distância $\overline{BC}$ expressa em metros.

O perímetro da janela é igual a 5 metros.



Pretende-se encontrar as dimensões da janela a fim de que a abertura tenha uma área máxima.

a. *Exprima o perímetro da janela em função de x e de y.*
b. *Retire da expressão o valor de y em função de x.*
c. *Para que valores de x se tem y > 0?*
d. *Exprima a área da janela em função de x e de y.*
e. *Utilizando os resultados das questões anteriores, mostre que a área se pode escrever na forma*

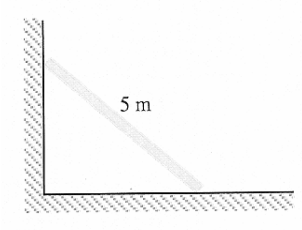
$$A(x) = 5x - \frac{4+\pi}{2}x^2$$

f. *Deduza para que valores de x e de y a área da janela é máxima.*

Encontre o valor exacto dessa área e em seguida o valor aproximado a menos de 10^{-2} (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11° V2, p. 367)

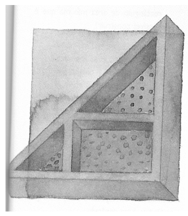
JAFB11.9. *Que dimensões, com aproximação a 0,1 mm, deve ter uma caixa de conservas cilíndrica, com a capacidade de 1l, para que no seu fabrico se gaste o mínimo de material? (A espessura do material de que é feita não é de considerar).*

Compare a altura com o diâmetro da caixa. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11° V2, p. 368)



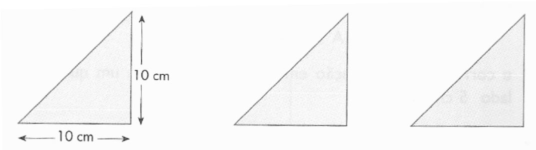
JAFB11.11. *Num canto de um terreno murado pretende-se delimitar com uma trave de madeira a maior área de terreno possível.*

Sabendo que a trave mede 5 metros, em que posição deverá ser colocada? (Prova de exame E. S. Filipa de Vilhena, 1993) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 373)



NB11.1. *O canteiro num jardim*

Num jardim com a forma de um triângulo isósceles queremos desenhar um canteiro como se indica na figura: um dos vértices do rectângulo pertence à hipotenusa e os outros aos catetos.

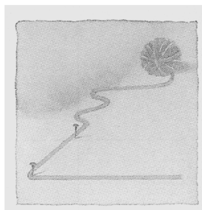


Um destes rectângulos terá área máxima. Qual deles é? (Neves e Brito 11º, 1994, p. 221)

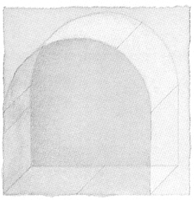
NB11.2. *O cilindro de latão*

Uma empresa fabrica cilindros em latão com 1m³ de volume.

Estudar as dimensões do cilindro de modo a gastar o mínimo latão possível na sua construção. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 222)

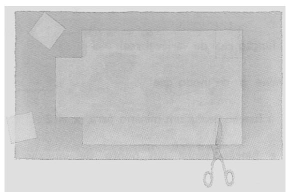


NB11.4. *Com um fio de 150 cm de comprimento, quais são as dimensões do rectângulo de área máxima que é possível construir? (Neves e Brito 11º, 1994, p. 222)*



NB11.5. *Com 714 m de rede pretende-se vedar um terreno, com a forma indicada em cima, constituído por um rectângulo [ABCD] e um semicírculo de diâmetro [DC].*

Determine as dimensões do rectângulo de modo a que a área seja máxima. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 223)



NB11.6. *A construção da caixa*

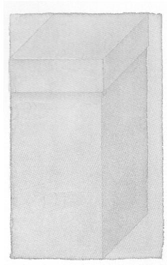
Para construir uma caixa vão ser cortados quatro cantos quadrados iguais a um quadrado de 12 cm de lado. Determine o lado de cada quadrado de modo que o volume da caixa obtida seja máxima. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 227)

__NB11.10.__ Uma caixa com a forma de um paralelepípedo de base quadrada de lado x cm, tem uma área total de 150 cm².

a. Mostre que o volume do paralelepípedo é dado pela fórmula:

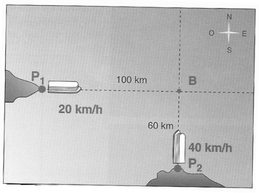
$$V = \frac{75x - x^3}{2}$$

b. Determine as dimensões da caixa de modo que ela tenha volume máximo. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 235)

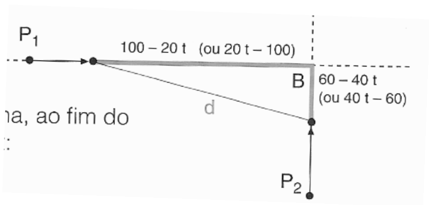


Problemas de Física

__LG11.4.__ Os "ferry-boats"



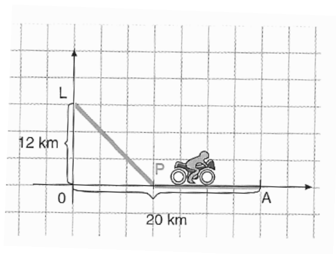
Todas as manhãs, à mesma hora, sai um barco do ponto P_1 para leste, a 20 km/h e outro do ponto P_2 para norte, a 40 km/h.



A bóia B, no cruzamento das rotas, dista 100 km de P_1 2 60 km de P_2.

Determina ao fim de quanto tempo a distância entre os barcos é mínima. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 321)

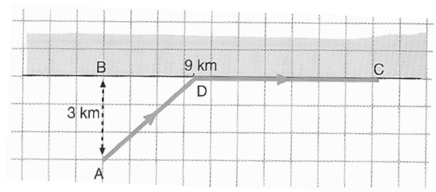
__LG11.20.__ Um ciclista está na localidade L a 12 km do ponto O mais próximo de uma estrada, rectilínea e alcatroada, e pretende ir à aldeia A que dista 20 km de O sobre essa estrada.



O ciclista desloca-se a 10 km/h na estrada alcatroada e a 8 km/h fora da estrada.

Determina o ponto P em que deve atingir a estrada alcatroada para fazer o percurso no menor tempo possível. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)

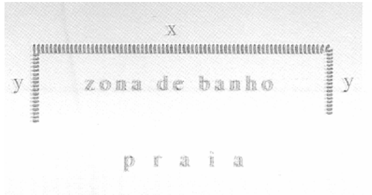
__LG11.21.__ Uma pessoa está num barco A a 3 km do ponto B da praia, mais próximo de A, e tem de ir ao outro ponto C da praia a 9 km de B.



Se o barco se desloca à velocidade de 6 km/h e o tripulante pode correr à velocidade de 10 km/h como deve este proceder para chegar a C no mais curto tempo possível? (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)

Problemas de Economia

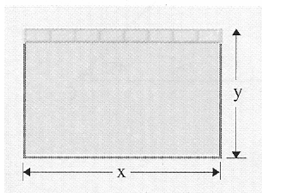
JAFB11.5. *Pretende-se vedar com uma fita de flutuadores uma zona rectangular com 200 m² de área, para o banho das crianças, como mostra a figura.*



Se cada metro de fita de flutuadores custar 2 000 $00, qual deverá ser o valor de x e de y para que o gasto na compra seja mínimo? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 367)

JAFB11.6. *Um agricultor dispõe de 20 000$00 para vedar parte de um terreno rectangular.*

A vedação deve ser feita do seguinte modo: um dos lados de tijolo e rede nos três lados restantes, conforme ilustra a figura.



Cada metro de rede custa 200$00 e cada metro de parede em tijolo fica por 600$00.

Qual é a área máxima que se consegue vedar? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 367)

Manuais do 12º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: *Xeqmat, 12º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1994, Editorial O Livro: Lisboa

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual é composto por um só volume, com 408 páginas, repartidas por seis unidades obrigatórias e pelas quatro unidades opcionais. A unidade 4 é dedicada às funções trigonométricas em IR e a 5 às funções exponencial e logarítmica. A parte relativa às funções trigonométricas inclui a derivada e também os problemas de optimização, mas a parte dedicada à função exponencial e logarítmica não inclui a derivada e, consequentemente, não inclui problemas de optimização. Observemos a estrutura que apresenta a unidade 4:

Unidade 4: Funções trigonométricas em IR

- *Seno, co-seno e tangente como funções reais de variável real*
- *Fórmulas trigonométricas. Equações*

- *Derivadas das funções trigonométricas*
  - *Limite de* $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *quando* $x \to 0$
  - *Derivada do seno*
  - *Derivada do co-seno e da tangente*
  - *Derivada de uma função composta*
- *Estudo analítico e gráficos de funções trigonométricas. Áreas sob gráficos.*
  - *Estudo analítico da função* $x \mapsto \operatorname{sen} x$
  - *Estudo analítico da função* $x \mapsto \cos x$
  - *Estudo analítico da função* $x \mapsto \operatorname{tg} x$
  - ***Estudo de outras funções trigonométricas. Problemas***
  - *Exercícios e actividades*
  - *Breve nota histórica*
  - *Soluções*

Resulta que existem alguns problemas de optimização na unidade 4, após a abordagem das derivadas das funções trigonométricas, mais especificamente, no ponto "Estudo de outras funções trigonométricas. Problemas". Nesta parte existem seis exemplos, mas nenhum destes é um problema de optimização. Nas margens desta parte, tal como ao longo do manual, são expostos alguns exercícios, sendo um deles um problema de optimização.

No final da unidade surgem mais 16 exercícios/actividades mas apenas um dos exercícios é um problema de optimização.

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo

Título: *Infinito 12, 12º Ano Volume 2*

Ano, editora e lugar de edição: 1995, Areal Editores: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em dois volumes, o primeiro tem 183 páginas repartidas por três capítulos:

- I – Análise combinatória e probabilidades
- II – Geometria analítica IV
- III – Funções IV, Áreas

O segundo volume tem 205 páginas repartidas por quatro capítulos:

- IV – Funções V: Funções trigonométricas em IR
- V – Função exponencial e logarítmica
- VI – Noções de grupo e de corpo
- VII – Corpo dos números complexos (capítulo de opção)

Encontramos os problemas de optimização no primeiro capítulo do segundo volume, dedicado às funções trigonométricas.

O capítulo dedicado às funções trigonométricas apresenta a estrutura seguinte:

IV: Funções V – Funções trigonométricas em IR

1. *Fórmulas da diferença, da soma e da duplicação*
2. *Seno, co-seno e tangente como funções reais de variável real*
   - *Estudo do* $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
   - *Derivabilidade das funções seno, co-seno e tangente*
   - *Derivada da função composta*
   - *Estudo da representação gráfica das funções seno, co-seno e tangente, recorrendo às respectivas derivadas*
   - *Estudo comparativo de funções*
   - ***Resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas***
     Um problema de optimização
3. *Primitivas do seno e do co-seno*

Aplicando

Este manual refere a abordagem dos problemas de optimização na parte em que se trata das funções trigonométricas. Há neste manual apenas três problemas de optimização. O primeiro referido como problema de optimização na parte final, dedicada à resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas. Os outros dois na parte dedicada aos exercícios. Nesta encontramos trinta e seis exercícios dos quais dois são problemas de optimização, fazendo o último, parte das questões saídas em provas de aferição.

Autor: M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito

Título: *Matemática 12, 12º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1995, Porto Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em dois volumes, sendo o segundo volume constituído por 218 páginas, repartidas por três capítulos:

- Funções V – Funções trigonométricas em IR
- Funções VI – Funções exponenciais e logarítmicas
- VI – Noções de grupo e corpo.

O capítulo quatro, dirigido às funções trigonométricas, apresenta uma parte relativa à derivada, mas não indica nenhum problema de optimização.

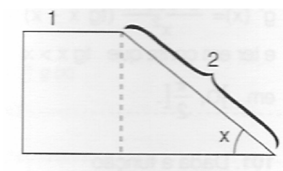
O capítulo cinco, dedicado às funções exponenciais e logarítmicas, também apresenta uma parte com a derivada mas não mostra nenhum problema de optimização.

Tal como é referido no índice do manual, no desenvolvimento do capítulo apenas aparece um problema de optimização. Na parte destinada aos exercícios de aplicação "*Aplicando*" inclui mais trinta e seis exercícios sendo apenas dois problemas de optimização.

Examinemos então os problemas de optimização que Identificámos nos manuais do 12º ano.

Problemas de Geometria Métrica

LG12.1.

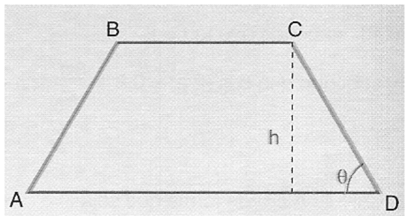


a. Exprime a área deste trapézio $\left(\frac{B+b}{2}.h\right)$ *em função de x.*

b. Determina a área máxima

c. Qual a taxa de variação instantânea da área quando x = 1 radiano? (Lima e Gomes 12º, 1994, p. 204)

LG12.2. *A pedido de um cliente, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima, com a forma de um trapézio, em que* $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2\,dm$.



Designando por θ *a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC.*

a. Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior em função de θ*.*

b. Prove que a área A(θ*) do trapézio é dada, em dm*^{2}*, por*

$$A(\theta) = 4.sen\theta + 2sen(2\theta)$$

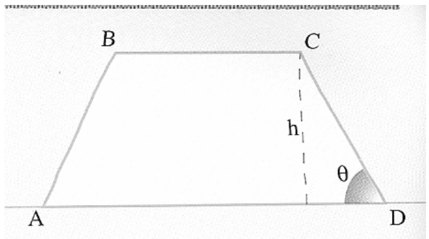
c. Determina o valor de θ *para o qual a área do trapézio é máxima e calcula essa área.*

d. Calcule $\lim_{\theta \to 0} \frac{A(\theta)}{\theta}$

Aferição 94 Ep. Normal (Lima e Gomes 12º, 1994, p. 210)

JAFB12.3. *A pedido de um dos clientes, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima, com a forma de um trapézio, em que* $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2dm$.

Designando por θ *a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC:*



a. *Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior em função de* θ

b. *Prove que a área* $A(\theta)$ *do trapézio é dada, em* dm^2*, por*

$$A(\theta) = 4sen\theta + 2sen2\theta$$

c. *Determine o valor de* θ *para o qual a área do trapézio é máxima e calcule essa área;*

d. *Calcule* $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{A(\theta)}{\theta}$.

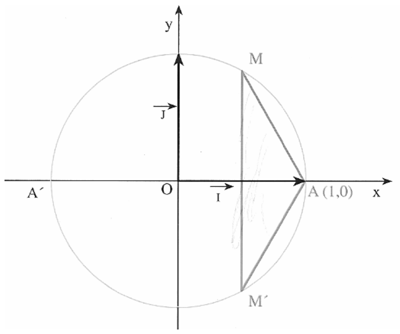
(Prova de Aferição, Época normal, 1994) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 60)

Problemas de Geometria Analítica

JAFB12.1. *Seja* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *um referencial o.n.*

Seja C o círculo de centro O e de raio 1, A, o ponto de coordenadas (1, 0) e A', o ponto de coordenadas (-1, 0). Seja M um ponto de C distinto de A e de A', de ordenada positiva e M' o seu simétrico em relação a AO.

Pretende-se determinar a posição do ponto M, de modo que a área do triângulo [AMM'] seja máxima e conhecer a natureza do triângulo. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 48)

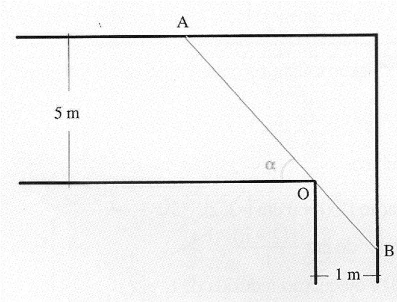


Problemas de Medida em Contexto Real

JAFB12.2. *Na figura está representado um corredor de um museu.*

Considere a recta que passa por O, sendo $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ *e que encontra as paredes em A e B.*

1. *Exprima* $\overline{OA}$ *em função de* α.
2. *Exprima* $\overline{OB}$ *em função de* α.
3. *a. Faça* $\overline{AB} = f(\alpha)$ *e mostre que* $f(\alpha) = \dfrac{5}{sen\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha}$



b. Determine a função derivada de f em $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *e deduza recorrendo à calculadora um valor aproximado* α_0 *de* α *para o qual f admite extremo.*

c. Calcule o valor de $\overline{AB}$ *para* $\alpha = \alpha_0$.

d. Pretende-se transportar naquele corredor um painel, em posição vertical. Quais as consequências práticas que se podem tirar do estudo feito nas alíneas anteriores? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 55)

C. Análise do período

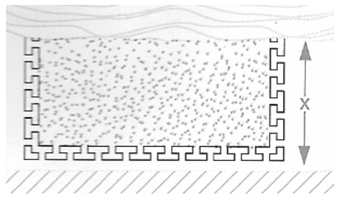
O primeiro aspecto a salientar neste período é o facto de detectarmos os problemas de optimização, não apenas num ano lectivo específico, mas sim nos três anos do Ensino Secundário.

Quando fizemos a análise dos programas concluimos que no 10º ano o programa não contempla o estudo da derivada. Então, como podemos justificar o facto de encontrar problemas de optimização neste ano?

Ora, dado que o programa contempla o estudo de funções, e em particular o estudo da função quadrática, tornou-se possível inserir os problemas de optimização como exercícios de aplicação da função quadrática, ou seja, antes do estudo da derivada.

Um outro ponto importante que surge com esta reforma é o facto de se começar a utilizar as calculadoras gráficas. Estas não são de uso obrigatório, apenas são de uso obrigatório as calculadoras científicas, no entanto, os professores, já as podem utilizar como material de apoio, na sala de aula. Alguns manuais mostram gráficos elaborados com a calculadora gráfica.

Apesar de a abordagem dos problemas de optimização ser feita nos três anos do Ensino Secundário, o número de problemas assinalados para este período não aumentou relativamente ao período anterior, pelo contrário, há menos um problema. A grande maioria dos problemas de optimização faz parte dos manuais do 11° ano (quarenta e sete). Os manuais do 10º ano apenas têm três problemas e os manuais do 12º ano apenas têm cinco. É ainda de referir que o livro de Lima e Gomes **(LG)**, do 11° ano é o que contém o maior número de problemas de optimização deste período (vinte e três problemas).



Na análise deste período iremos contemplar os três anos em conjunto referindo apenas pontualmente, quando se justificar, algumas características em separado.

Vejamos agora as características dos problemas deste período.

Confirmamos que o número de problemas sob a forma de exercício (quarenta e dois) é significativamente superior aos que surgem sobre a forma de exemplo resolvido (doze). Neste período há pela primeira vez um problema de optimização sob a forma de actividade de grupo, com relatório, e nenhum sob a forma de demonstração. Relativamente ao 10º ano, o livro de Lima e Gomes **(LG)** apenas apresenta um problema de optimização como actividade de grupo/relatório:

> *“ **(LG10.1.)** Actividade (Trabalho de grupo com relatório):*
>
> *Com 100 m de rede temos de vedar 3 lados de um terreno rectangular à beira de um rio.*
>
> *Exprime a área do terreno em função do lado* x.
>
> *Estuda o domínio da função; esboça o gráfico.*
>
> *Faz um estudo da função relativamente a zeros, monotonia, extremos, injectividade.*
>
> *Conclui qual a área máxima que se pode vedar com os 100 m de rede.*
>
> *Ilustra o relatório desenhos à escala de vários rectângulos possíveis.”*

O livro de Neves e Brito **(NB)**, para o 10º ano, indica dois problemas de optimização sob a forma de exercício, ou seja, sem um exemplo prévio. Nos manuais do 11° ano surgem para todos os autores, primeiramente, três ou quatro exemplos de problemas de optimização e só depois os exercícios. Por fim, nos manuais do 12º ano existe, no manual de Jorge e outros **(JAFB)** um problema sob a forma de exemplo e depois dois como exercício. No livro de Lima e Gomes os dois problemas encontram-se sob a forma de exercício.

Quanto ao contexto dos problemas observamos que os problemas geométricos predominam, sendo que de contexto real de medida detectamos vinte e três problemas e de geometria métrica dezanove. Neste período, pela primeira vez, há mais problemas em contexto real de medida do que de geometria métrica. Os outros contextos surgem em número reduzido: quatro problemas de aritmética (JAFB11.8.a, JAFB11.8.b, NB11.7.a, NB11.7.b), quatro de geometria analítica (JAFB11.12, LG11.17, NB11.9, JAFB12.1), três de física (LG11.4, LG11.20, LG11.21) e dois de Economia (JAFB11.5, JAFB11.6).

Quanto à função a optimizar, uma vez que predominam os problemas geométricos, na maioria dos problemas se pretende optimizar uma área (trinta e um): Área de um rectângulo dado o seu perímetro (LG10.1, LG11.7, LG11.14.b, LG11.1, NB11.4, JAFB11.6); área de um rectângulo inscrito noutra figura (NB10.2, LG11.11, LG11.18, JAFB11.8, NB11.11, NB11.1); área de um rectângulo com dois vértices sobre uma curva dada (JAFB11.12, NB11.9); área de um trapézio dadas as medidas de alguns lados (NB10.1, LG11.16, LG12.1, LG12.2, JAFB12.3); área de um triângulo dadas algumas medidas de lados (LG11.5); área de um sector circular dado o seu perímetro (LG11.12); área de um triângulo inscrito no círculo trigonométrico (JAFB12.1); soma da área de um quadrado com um círculo dada a soma dos seus perímetros (LG11.15); área de uma figura composta por um rectângulo e um semicírculo dado o perímetro (LG11.19, JAFB11.7, NB11.5); área de um rectângulo circunscrito a outro rectângulo dada a área do mais pequeno (JAFB11.3); área de um triângulo rectângulo dada a hipotenusa (JAFB11.11); área lateral de um sólido formado por um cilindro e um cone dado o seu volume (LG11.3); área total de um cilindro dado o seu volume (JAFB11.9, NB11.2). Em onze pretende-se optimizar o volume: Volume de um paralelepípedo, dadas as dimensões da folha para o construir (LG11.2, LG11.9, JAFB11.1, JAFB11.2, NB11.6, NB11.10); volume de um paralelepípedo dada a sua área total (NB11.10); volume de um prisma dado o perímetro de uma secção (LG11.13); volume de um cilindro/cone dado o raio da esfera que o circunscreve (JAFB11.4, NB11.3); volume de um cone dada a medida da geratriz (NB11.8). Os outros tipos aparecem em número reduzido. Em três pretende-se optimizar um perímetro: perímetro de um trapézio dada a sua área (JAFB11.10); perímetro de um rectângulo dada a sua área (LG11.6, LG11.14.a). Em três pretende-se optimizar uma distância: Distância entre dois objectos móveis dada a velocidade de cada um e a distância inicial (LG11.4); soma mínima dos quadrados das distâncias entre dois pontos fixo e um ponto móvel (LG11.17); distância entre dois pontos dado o ângulo que a recta que os une forma com um segmento (JAFB12.2). A optimização do produto entre dois números dada a sua soma ou diferença surge também três vezes (LG11.8.a, LG11.8.b, NB11.7.a); a optimização de tempo que se demora a percorrer uma distância repartida em duas partes em que o objecto se move a velocidades diferentes surge duas vezes

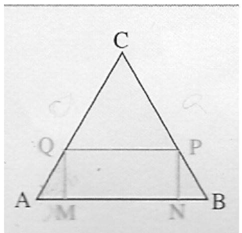
(LG11.20, LG11.21); a optimização de uma soma dos quadrados de dois números dada a sua soma surge apenas uma vez (NB11.7.b) e a optimização do custo de uma vedação dada a área e o custo do lado (JAFB11.5) surge também apenas uma vez.

Nestes problemas, em trinta e um a figura apresenta dados, em onze dos problemas geométricos, não encontramos nenhum tipo de figura (JAFB11.9, LG11.5, LG11.6, LG11.7, LG11.10, LG11.14.a, LG11.14.b, LG11.15, LG11.16, LG11.17, LG11.18, NB11.4) e em apenas nove a figura é simples (JAFB11.8, JAFB11.12, LG11.11, LG11.13, LG11.19, NB11.5, NB11.6, NB11.10, NB11.11). Verificamos que nos manuais do 10º ano e do 12º ano todos os problemas apresentam uma figura com dados; nos manuais do 11º ano verificamos que, a maioria dos problemas do livro de Jorge e outros e do livro de Neves e Brito apresentam uma figura com dados, mas no livro de Lima e Gomes cerca de metade dos problemas não têm qualquer tipo de figura. Examinemos o exemplo de um problema geométrico, que apesar de não ter qualquer figura, contém uma nota que irá auxiliar o aluno na resolução:

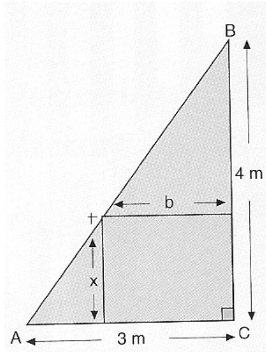
*“ **(LG11.16)** Um trapézio tem três lados com 8 cm cada um.*
Determina o comprimento do 4º lado de forma que a área seja máxima.
Sugestão: Exprima a área em função de metade da diferença das bases.”

Tal como no período anterior, quase todos os problemas apresentam dados numéricos (cinquenta e três), sendo apenas um o problema com dados genéricos. Vejamos:

*“ **(JAFB11.8)** Considere o triângulo equilátero [ABC] de lado a.*
Inscreve-se neste triângulo um rectângulo [MNPQ].
Faça-se $\overline{AM} = x$
Para que valor de x a área do rectângulo é máxima?”



Em relação ao tipo de enunciado, surgem em número significativo (quarenta e três) os problemas em que o enunciado é simples e apenas doze problemas com a resolução encaminhada. Todos os problemas do 10º ano são de resolução encaminhada e, dos problemas do 12º ano, apenas um não apresenta a resolução encaminhada (JAFB12.1). Quanto aos manuais do 11º ano verificamos que, no manual de Jorge e outros, apenas dois problemas têm resolução encaminhada (JAFB11.7, JAFB11.10); no manual de Lima e Gomes também apenas dois problemas têm resolução encaminhada (LG11.13, LG11.16) e no manual de Neves e Brito apenas um problema tem resolução encaminhada (NB11.10). Indicámos a seguir alguns exemplos de problemas com resolução encaminhada:



*" **(NB10.2)** Pretende-se construir uma estante para colocar numa parede triangular de umas águas-furtadas, como se indica na figura.*

a. Escreve b em função de x.

b. Mostre que a área da estante pode ser dada pela fórmula:

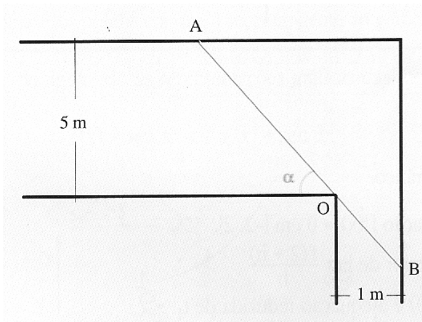
$$A = 3x - \frac{3}{4}x^2$$

c. Para que valores de x é máxima a área?!

*" **(LG11.16)** Um trapézio tem três lados com 8 cm cada um. Determina o comprimento do 4º lado de forma que a área seja máxima. Sugestão: Exprima a área em função de metade da diferença das bases."*

*" **(JAFB12.2)** Na figura está representado um corredor de um museu.*

Considere a recta que passa por O, sendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e que encontra as paredes em A e B.



1. *Exprima $\overline{OA}$ em função de α.*
2. *Exprima $\overline{OB}$ em função de α.*
3. *a. Faça $\overline{AB} = f(\alpha)$ e mostre que $f(\alpha) = \frac{5}{sen\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}$*

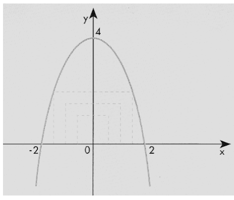
   b. Determine a função derivada de f em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e deduza recorrendo à calculadora um valor aproximado α_0 de α para o qual f admite extremo.

   c. Calcule o valor de $\overline{AB}$ para $\alpha = \alpha_0$.

   d. Pretende-se transportar naquele corredor um painel, em posição vertical. Quais as consequências práticas que se podem tirar do estudo feito nas alíneas anteriores?"

No primeiro exemplo, as duas alíneas que precedem a questão em que se pretende determinar a solução óptima ajudam o aluno a equacionar o problema. No segundo, apesar de não haver questões prévias, surge no final uma sugestão para chegar à função a optimizar em ordem a apenas uma variável. No último, também as questões prévias auxiliam o aluno a chegar à solução. Neste não é pedida explicitamente a solução óptima mas é pedido que se calcule o extremo e posteriormente a interpretação do valor.

A função auxiliar é implícita em trinta e oito dos problemas e apenas em dezassete surge explicitamente. Nos problemas do 10º ano e do 12º ano a função auxiliar é sempre implícita. Quanto aos manuais do 11º ano, no manual de Jorge e outros a função surge explicitamente apenas em três problemas (JAFB11.5, JAFB11.7, JAFB11.9); no manual de Lima e Gomes a função auxiliar surge explicitamente em nove problemas (LG11.3, LG11.6, LG11.7, LG11.8.a, LG11.8.b, LG11.9, LG11.14.a, LG11.14.b, LG11.19) e no manual de Neves e Brito a função auxiliar surge explicitamente em cinco problemas (NB11.2, NB11.5, NB11.7.a, NB11.7.b, NB11.10). A função auxiliar surge explicitamente em problemas geométricos em que, por exemplo, é dado o valor da área, perímetro ou volume de uma figura, ou em problemas aritméticos em que, por exemplo é dado o valor da soma ou produto entre dois números. A função auxiliar surge implicitamente em problemas em que é necessário aplicar o Teorema de Pitágoras, noção de distância, semelhança de figuras, equação da recta, funções trigonométricas, noção de velocidade, ou seja, problemas em que não é imediato, a partir dos dados, a forma de obter uma variável a partir da outra. Apresentamos agora um exemplo de um problema em que a função auxiliar surge implicitamente:



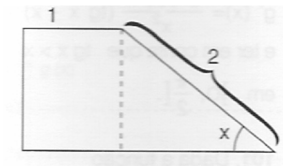
" ***(NB11.9)*** *Um rectângulo tem base no eixo dos xx e os outros dois vértices pertencem à parábola de equação $y = 4 - x^2$.*

Qual a área máxima que o rectângulo pode ter?"

Neste, para determinar o valor da largura em função do comprimento do rectângulo, será necessário usar a equação da curva que nos fornece o valor do *y* em função do valor do *x*, ou seja, não é tão imediato como se fosse dado, por exemplo, o valor do perímetro do rectângulo.

Passemos agora às noções aplicadas na resolução dos problemas. Uma vez que predominam os problemas geométricos, também as noções mais aplicadas são as noções geométricas. Vemos que o Teorema de Pitágoras e a fórmula de cálculo do perímetro são as noções mais aplicadas, surgindo a primeira em onze problemas (JAFB11.4, JAFB11.8, JAFB11.10, JAFB11.11, LG11.5, LG11.6, LG11.11, LG11.13, LG11.16, NB11.3, NB11.8). Normalmente esta noção aplica-se em problemas em que temos triângulos rectângulos, ou figuras inscritas e a segunda surge em treze problemas (LG10.1, JAFB11.6, JAFB11.7, LG11.1, LG11.7, LG11.9, LG11.12, LG11.13, LG11.14.b, LG11.15, LG11.19, NB11.4, NB11.5), problemas em que é dado o perímetro de uma figura que nos auxilia a determinar a medida de um lado em função dos outros lados. As outras noções são aplicadas menos vezes, sendo que a fórmula da distância surge em seis problemas (NB10.1, JAFB11.1, JAFB11.2, JAFB11.3, LG11.17, NB11.6); a noção de soma também em seis problemas (LG11.2, LG11.8.a, LG11.8.b, LG11.10, NB11.17.a, NB11.17.b); a semelhança de figuras (NB10.2, JAFB11.8, LG11.18, NB11.1, NB11.11) e as funções trigonométricas (JAFB12.1, JAFB12.2, JAFB12.3, LG12.1, LG12.2) em cinco problemas; a fórmula da área (JAFB11.5, LG11.6, LG11.14.a, NB11.10) e a do volume (JAFB11.9, JAFB11.10, LG11.13, NB11.2) em quatro problemas e a as magnitudes físicas em três problemas (LG11.4, LG11.20, LG11.21). Em todos os problemas dos manuais do 12º ano se aplicam as fórmulas trigonométricas, ou seja, são problemas apenas relativos aos conteúdos leccionados no 12º ano. Eis um exemplo:

LG12.1.



a. *Exprime a área deste trapézio* $\left(\frac{B+b}{2}.h\right)$ *em função de x.*
b. *Determina a área máxima*
c. *Qual a taxa de variação instantânea da área quando x = 1 radiano? (Lima e Gomes 12º, 1994, p. 204)*

Neste problema, é necessário usar as fórmulas trigonométricas para calcular, em função de x, a medida da base maior do trapézio e a medida da altura.

Quanto à estratégia a utilizar na resolução dos problemas, a maioria dos problemas já surgiram nos manuais anteriores (trinta) e cinco são retirados de provas de exame (JAFB11.11, JAFB11.12, LG11.11, JAFB12.3, LG11.12). Assim sendo, apenas vinte problemas são novos neste período.

Relativamente às funções utilizadas, verificamos que em grande parte dos problemas a função utilizada para optimizar é polinomial (trinta e três problemas); as funções racionais surgem em dez problemas (JAFB11.3. JAFB11.5, JAFB11.9, JAFB11.10, LG11.3, LG11.6, LG11.12, LG11.14.a, NB11.2, NB11.10), isto é, em problemas em que se aplica a noção de área ou volume; as funções irracionais surgem em sete problemas (JAFB11.11, LG11.4, LG11.11, LG11.16, LG11.20, LG11.21, NB11.8), ou seja, em problemas em que se aplica o teorema de Pitágoras ou se pretende determinar uma distância e as trigonométricas em apenas cinco problemas (JAFB12.1, JAFB12.2, JAFB12.3, LG12.1, LG12.2), isto é, nos problemas em que se aplicam as fórmulas trigonométricas.

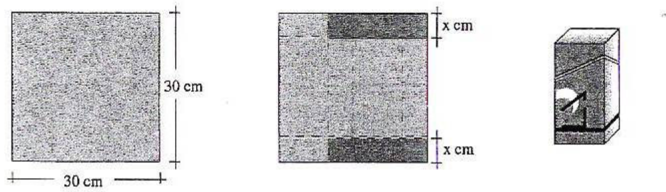
O esquema de cálculo utilizado, nos problemas com resolução, foi sempre o mesmo, cálculo dos zeros da função derivada seguido do estudo do sinal. Os problemas do 10º ano surgem como exercícios não apresentando a respectiva resolução, mas estes encontram-se após o estudo da função quadrática. Observemos a resolução do problema JAFB11.2:

Problema 2

recorde

A act. 2 (pág. 51)

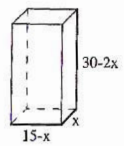
Uma empresa fabrica caixas em cartão cortando duas faixas da mesma largura numa folha quadrada.



A medida do lado da folha é 30 cm e designa-se por x a medida, em centímetros, da largura da faixa que se retira.

Determinemos o valor de x que torna o volume da caixa máximo e, seguidamente, calculemos esse volume.

Resolução



Designemos por V a função que nos dá o volume da caixa.

Vem

$V(x) = x(15 - x) \cdot (30 - 2x) =$

$= 2x^3 - 60x^2 + 450x$ e $0 \leq x \leq 15$

visto que as dimensões da caixa são, em centímetros, x, $15 - x$ e $30 - 2x$ e o volume de um paralelipípedo é dado pelo produto da área da base pela altura.

Teremos então que

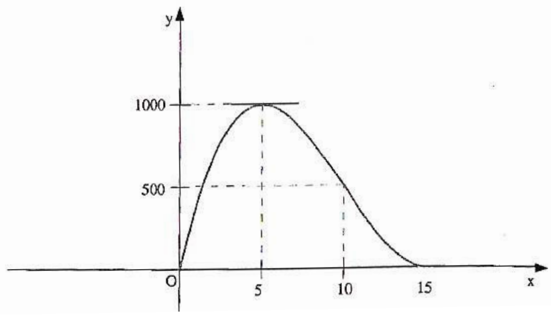
$V'(x) = 6x^2 - 120x + 450$

Os zeros de $V'(x)$ são 5 e 15 e o quadro de variação de V é:

x	0		5		15
V'(x)		+	0	−	
V	0	↗		↘	0

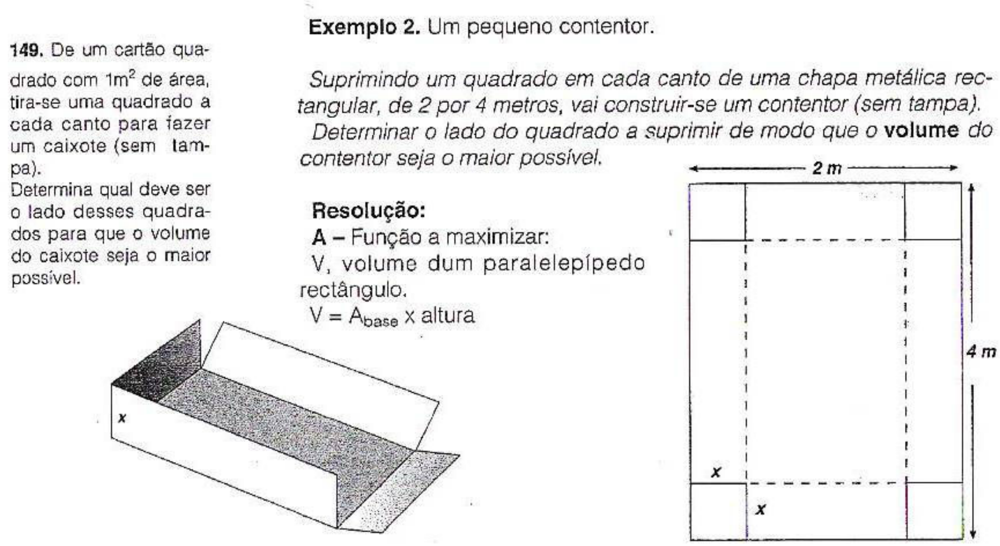
O volume será pois máximo para x = 5, e o valor do volume máximo é 1000 cm^3.

Para confirmarmos os resultados encontrados, representemos graficamente a função $x \mapsto V(x)$ no intervalo [0, 15].



Relativamente ao enunciado, este vem acompanhado de uma sequência de figuras que ilustram a construção da caixa e têm os dados representados. Relativamente à resolução, esta contém uma figura com dados na margem esquerda e a resolução é feita acompanhando os seguintes passos: equação do problema, cálculo da derivada, cálculo dos zeros da derivada e construção do quadro de monotonia e resposta ao problema. A seguir apresenta o gráfico obtido através da calculadora gráfica para confirmar o resultado.

Quanto aos gráficos, figuras ou esquemas auxiliares, todos os problemas que apresentam resolução, contêm o quadro de monotonia e três dos problemas que apresentam resolução possuem o gráfico da função (JAFB11.2, LG11.1, LG11.2). Reparemos no problema LG11.2 que apresenta quadro de monotonia e gráfico:



149. De um cartão quadrado com 1m^2 de área, tira-se uma quadrado a cada canto para fazer um caixote (sem tampa).
Determina qual deve ser o lado desses quadrados para que o volume do caixote seja o maior possível.

Exemplo 2. Um pequeno contentor.

Suprimindo um quadrado em cada canto de uma chapa metálica rectangular, de 2 por 4 metros, vai construir-se um contentor (sem tampa).
Determinar o lado do quadrado a suprimir de modo que o **volume** *do contentor seja o maior possível.*

Resolução:
A – Função a maximizar:
V, volume dum paralelepípedo rectângulo.
V = A_{base} x altura

B – Expressão do volume numa só variável:

Sendo x o lado do quadrado a suprimir, é também x a altura da caixa.
A base da caixa (ver figura) ficará com as dimensões $4-2x$ e $2-2x$
logo $A_{base} = (4-2x) \cdot (2-2x)$ e $V = (4-2x)(2-2x)x$

Obtemos a função $x \mapsto V = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

cujo domínio é dado por $x > 0$ e $2 - 2x > 0$: $D = [0;1]$

C – Derivada e pesquisa de extremos relativos:

$V'(x) = 12x^2 - 24x + 8 = 4(3x^2 - 6x + 2)$

Zeros da derivada : $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3}$

A derivada anula-se para $x = 1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ou seja, $x \approx 0{,}42$ ou $x \approx 1{,}58$

Quadro de sinais da derivada:

x	0		$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
V'		+	0	−	
V		↗		↘	

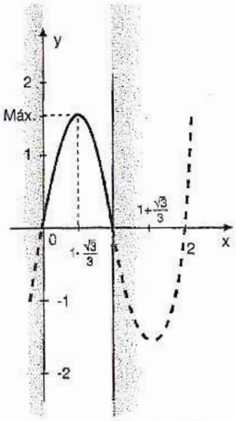
m = f(0) = 0 Máx. = $= f\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 1{,}5396$ m = f(1) = 0

O valor 1,58 está fora do domínio desta função. (Ver gráfico da função à margem).

D – No domínio [0,1] esta função só tem um máximo relativo e absoluto, que é $V\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx V(0{,}42) = 1{,}5396$, em m^3.

O lado do quadrado a suprimir para obter este volume máximo é 0,42 m.

Restrição da função $x \mapsto 4x^3 - 12x^2 + 8x$ ao intervalo [0,1]:



150. Uma pistola dispara uma bala verticalmente de baixo para cima, à velocidade de 98 m\s. Sabendo que a lei do movimento é

$e = -4{,}9t^2 + 98t$ (m;s)

Calcula a altura máxima atingida pela bala.

Na resolução deste problema vê-se que, também apresenta uma sequência de figuras que ilustram a construção do contentor. A resolução está dividida em 4 partes: A, B, C e D. Na primeira parte define-se a função a maximizar, na segunda expressa-se a função em ordem a uma só variável, na terceira calcula-se a derivada e os extremos relativos, construindo o quadro de monotonia e, por fim, apresenta-se a resposta ao problema. Do lado direito da resolução é apresentado o gráfico da função restrito ao domínio desta no contexto do problema.

Confirmamos então que, apesar de existir já um conjunto de meios auxiliares para esboço dos gráficos de funções, na resolução dos problemas de optimização, ainda não se nota um aumento significativo, então a calculadora é utilizada essencialmente para confirmação de resultados obtidos.

Por fim, o valor pedido surge explicitamente em trinta e oito problemas e implicitamente em apenas dezoito problemas. Todos os do 10º ano e os do manual de Lima e Gomes do 12º ano apresentam o valor pedido explicitamente. Os restantes apresentam os dois casos, sendo que, em todos os manuais o número de problemas em que o valor pedido surge explicitamente é sempre superior.

Assim, este período é caracterizado por problemas enunciados sob a forma de exercício, pela primeira vez encontramos mais problemas em contexto real de medida do que de geometria métrica mas, em contrapartida, na maioria dos problemas apenas se pretende optimizar uma área. Existe um elevado número de problemas com uma figura com dados e apenas um problema apresenta dados genéricos. Na maioria dos casos o enunciado é simples e a função surge explicitamente.

Quanto às noções aplicadas na resolução, dividem-se, essencialmente, entre o teorema de Pitágoras e a fórmula do perímetro. A maioria dos problemas já surgiu em manuais anteriores, aparecem essencialmente funções polinomiais e os extremos são calculados apenas através dos zeros e sinal da derivada apresentando estas resoluções o quadro de monotonia.

Os dados obtidos na análise dos problemas de optimização deste período estão sintetizados na tabela a seguir.

3.5. INTRODUÇÃO DO USO DA CALCULADORA GRÁFICA NOS PROGRAMAS OFICIAIS

3.5.1. O REAJUSTAMENTO DE MARÇAL GRILO (1997)

A. Análise do programa oficial

Como durante a aplicação experimental do programa anterior, respeitante à Lei de Bases do Sistema Educativo, surgiram dificuldades de concretização, mesmo contando com cargas horárias excepcionais, a generalização da sua aplicação em todas as escolas multiplicou essas dificuldades. Este facto deu-lhes uma visibilidade nacional que o quadro da experiência, pela sua própria natureza, não podia ter dado. Ao segundo ano da generalização, o volume dos problemas tornou clara a necessidade de proceder a ajustamentos desse programa.

Este ajustamento não veio constituir um novo programa. Procurando preservar os objectivos da renovação do ensino da Matemática este pretendeu estabelecer maior clareza e melhor organização dos conteúdos temáticos; explicitar a articulação entre metodologias, objectivos e conteúdos; reforçar a articulação vertical com o 3º ciclo do ensino básico e harmonizar no tempo, quando possível, algumas articulações interdisciplinares.

Dado que uma das principais dificuldades dos professores nas escolas e um dos maiores problemas residia na extensão do programa, o ajustamento deste teve em conta também a exclusão de itens de conteúdo que a experiência mostrou constituírem sobrecarga e impedimento para que aos alunos fosse dado acesso a temas fundamentais e fundadores. Foi também trocada a ordem em que eram dados alguns dos temas.

Assim, a 19 de Setembro de 1997, sendo a pasta da educação ocupada por Eduardo Carrega Marçal Grilo, foi publicada uma alteração à Lei de Bases do Sistema Educativo de 1986, cujos programas tinham entrado em vigor em 1993.

Com esta reformulação, cada um dos anos lectivos do Ensino Secundário passou a ser composto por três temas. No 10º ano abordava-se a Geometria, Funções e Estatística; no 11º eram estudados a Geometria, Funções e Sucessões e no 12º ano os três temas eram Probabilidades, Funções e Trigonometria e Números Complexos.

Esta modificação dos programas introduziu o uso das calculadoras gráficas no ensino Secundário. Foram inovadoras no estudo da geometria plana, das funções, das sucessões, da estatística e da análise combinatória.

Apesar de as derivadas apenas serem abordadas no 11º ano, também no 10º ano são abordados os problemas de optimização. Neste mesmo ano os problemas de optimização surgem no capítulo dedicado ao estudo de funções, em particular no estudo de funções quadráticas.

Eis então, a estrutura do programa relativo ao 10º ano de escolaridade:

Programas do Ensino secundário de 1997

10º Ano

2. Funções e Gráficos – Generalidades. Funções polinomiais. Função módulo.

- *Gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal*
- *Definição de função, gráfico e representação gráfica de uma função.*
- *Estudo intuitivo de propriedades das:*

  Funções quadráticas; referência à parábola

  Função módulo

  Funções definidas por 2 ou mais ramos

  Funções polinomiais (graus 3 e 4)
- *Equações e inequações do 2º grau; Inequações com módulos*
- *Decomposição de polinómios*

Nas indicações metodológicas deste programa podemos encontrar a seguinte informação:

> *"Para todos os tipos de funções devem ser dados exemplos a partir de questões concretas (tanto de outras áreas da matemática como os constantes em livros de Física, Química, Geografia, Economia, etc., em recortes de jornais). Particular importância deverá ser dada a situações problemáticas,* ***situações de modelação matemática*** *e a exemplos ligados com os trabalhos da Área-Escola e com a Geometria, devendo retomar-se alguns exemplos estudados no tema anterior. Os alunos devem reconhecer que o mesmo tipo de função pode constituir um modelo de diferentes tipos de situações problemáticas.*
>
> *Os alunos devem sempre traçar um número apreciável de funções tanto manualmente em papel quadriculado ou papel milimétrico como usando calculadora gráfica ou computador.*
>
> *No estudo das famílias de funções os alunos podem realizar pequenas investigações."*

Como se vê, há um interesse por parte dos seus autores em relacionar os temas matemáticos, neste caso o estudo de funções, com situações do contexto real, em particular na modelação matemática.

Apesar de a optimização não surgir explicitamente no referido programa, nos manuais relativos a esta reforma abordam este tipo de problemas.

Analisemos, pois o programa de Matemática para o 11º ano:

Programas do Ensino Secundário de 1997

11º Ano

2. Introdução ao Cálculo Diferencial I – Funções Racionais e com Radicais. Taxa de variação/Derivada

- *Estudo das propriedades das Funções racionais do tipo f(x) = a+b/(cx+d); referência à hipérbole.*
- *Aproximação experimental da noção de limite*
- *Operações com funções: soma, diferença, produto, quociente, composição.*
- *Noção de taxa de variação; interpretação geométrica e física.*
- ***Determinação da derivada em casos simples; aplicações***
- *Inversão de funções; funções com radicais quadráticos e cúbicos.*

(Matemática, Programas, 10º, 11º e 12º anos, 1997)

Refere-se no desenvolvimento dos temas, em relação ao nosso tema, o seguinte: "**Resolução de problemas envolvendo derivadas num contexto de aplicações**."

Assim, apesar de o programa não contemplar o estudo dos problemas de optimização, explicitamente, faz referência a que se abordem aplicações da derivada.

Passemos seguidamente ao programa de Matemática para o 12º ano. Em relação ao Cálculo Diferencial, este ficou estruturado da seguinte forma:

Programas do Ensino Secundário de 1997

12º Ano

2. Introdução ao Cálculo Diferencial II

- *Função exponencial e função logarítmica de bases maiores que 1*
  Regras operatórias de exponenciais e logaritmos. Aplicações concretas.
- *Limite de uma função Heine; propriedades operatórias sobre limites; limites notáveis; indeterminações. Assímptotas.*
- *Continuidade*
  Teorema de Bolzano – Cauchy e aplicações numéricas
- *Funções deriváveis. Regras de derivação e derivadas de funções elementares. Segunda definição de número e segundas derivadas e concavidade*

– *Estudo de funções em casos simples*
– ***Problemas de optimização***

(Matemática, Programas, 10º, 11º e 12º anos, 1997)

Refere-se no desenvolvimento dos temas, em relação ao nosso tema, o seguinte:

> "Os **problemas de optimização** devem ser escolhidos de uma forma a que um aluno trabalhe de uma forma tão completa quanto possível a modelação. É uma boa oportunidade para discutir com os alunos o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual."

Tal como no programa anterior do 12º ano, também neste se contempla o estudo dos problemas de optimização. Notamos ainda que com o estudo destes tem como objectivo que o aluno identifique a importância do Cálculo Diferencial no mundo actual.

Este programa não faz nenhuma referência a manuais para o ensino.

B. Análise dos Manuais Escolares

Manuais do 10º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: *Xeqmat, 10º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1996, Editorial O Livro

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este apresenta uma estrutura semelhante ao manual dos mesmos autores apresentado no período anterior. É composto por 336 páginas repartidas pelas três unidades: Geometria, Funções e Estatística.

Os problemas de optimização surgem na unidade dedicada às funções. Este capítulo está assim estruturado:

- Funções e gráficos
- Função quadrática
- Função módulo
- Polinómios. Funções polinomiais
- Métodos Gráficos
- Nota histórica
- Soluções

Ao longo do capítulo, vão surgindo, nas margens, exercícios de aplicação e no final de cada sub-capítulo os autores apresentam um conjunto de exercícios de revisão.

Apesar de no respectivo ano lectivo, ainda não ter sido abordado o Cálculo Diferencial, é possível calcular máximos e mínimos, uma vez que o programa contempla o cálculo do vértice de uma parábola. É também possível calcular máximos e mínimos uma vez que os alunos utilizam já a calculadora gráfica e, portanto, apesar de não ser possível calcular máximos e mínimos de funções polinomiais, analiticamente, pode fazer-se o seu cálculo apenas graficamente.

Encontramos neste manual três problemas de optimização. O primeiro nos exercícios de revisão do primeiro sub-capítulo, o segundo nos exercícios acerca das inequações do 2º grau e o último nos exercícios de revisão das funções.

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo

Título: *Infinito 10, 10º Ano Volume 2*

Ano, editora e lugar de edição: 1997, Areal Editores: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em dois volumes. O primeiro, constituído por 180 páginas, é dedicado à Geometria no Plano e no Espaço. O segundo, constituído por 220 páginas, trata das Funções e Gráficos e da Estatística.

Os problemas de optimização estão no capítulo dedicado às funções e gráficos. Este capítulo contempla o estudo dos seguintes pontos:

- Noção de função; gráfico e representação gráfica de uma função
- Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos
- Função afim. Resolução de problemas
- Funções definidas por ramos. Aplicações
- Função quadrática. Resolução de problemas
- Funções polinomiais. Polinómios numa variável
- Operações com funções. Função soma, função diferença e função produto.
- Zeros de uma função polinomial.

Pela análise dos temas abordados pelo manual, nota-se uma preocupação em apresentar para cada tipo de função, problemas concretos e aplicações. Os problemas de optimização surgem na parte dedicada às funções quadráticas e na parte dedicada às funções polinomiais.

Autor: Maria Augusta F. Neves

Título: *Matemática, 10º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 2001, Porto Editora: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em três volumes. O primeiro trata a Geometria, o segundo de Funções e o último de Estatística. Da mesma autora foi também publicado um livro de exercícios, este também estava dividido em três volumes abordando cada um deles um do tema.

Os problemas de optimização encontram-se no volume dedicado às Funções. Este volume é composto por 224 páginas, repartidas por seis sub-temas:

- Funções e gráficos
- Transformações de gráficos de funções
- Função quadrática
- Parábola
- Função módulo
- Operações com polinómios. Decomposição de polinómios em factores.

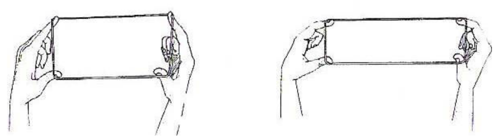
Cada um destes sub-temas apresenta no final uma síntese do que se tratou, um conjunto de problemas resolvidos e outro de problemas propostos. No final do livro há um conjunto de exercícios acerca de todos os assuntos abordados acerca de funções, de seguida as soluções de todos os exercícios e, por fim informação relativa ao uso das calculadoras gráficas no estudo das funções.

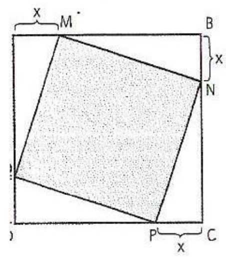
Vejamos, então, os problemas de optimização que identificámos ao longo deste manual.

Problemas de Geometria Métrica

JAFB10.1. *Actividade 9 – Problema de Euclides*

De todos os rectângulos com o mesmo perímetro, qual o que tem área máxima? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 232)





JAFB10.2. *Considere-se o quadrado [ABCD] tal que* $\overline{AB}=6$. *Constrói-se o quadrado [MNPQ] inscrito em [ABCD] de modo que* $\overline{AM}=\overline{BN}=\overline{CP}=\overline{DQ}=x$.

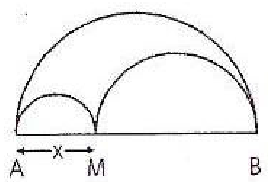
Pretende-se saber:

a. Como varia a área A(x) de [MNPQ] com os valores de x.

b. Para que valores de x é mínima a área de [MNPQ] e qual o seu valor neste caso.

c. Quais os valores de x para os quais a área A(x) é igual a 20 unidades quadradas?

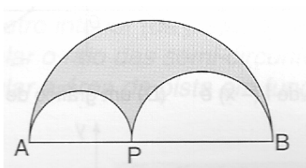
d. Para que valores de x é A(x) > 30? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 244)



JAFB10.6. *Designando por A(x) a área do domínio limitado pelas três semicircunferências de diâmetro [AB], [AM] e [MB], onde* $\overline{AB}=6$ *e* $\overline{AM}=x$, *sendo M um ponto de [AB].*

1. Mostre que $A(x)=\frac{\pi}{4}(6x-x^2)$

2. Represente graficamente a função $A: x \mapsto \frac{\pi}{4}(6x-x^2)$ *e determine x de modo que a área A seja máxima. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 313)*

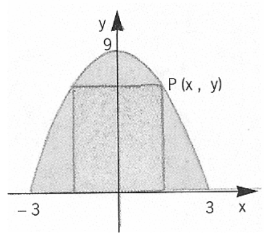


LG10.3. *Na figura estão um semicírculo de diâmetro fixo* $\overline{AB}=d$ *e dois outros semicírculos de diâmetros* $\overline{AP}=x$ *e* $\overline{PB}$, *variáveis, sendo P* $\in$ *[AB]*

a) Exprime em função de x a área colorida.

b) Que relação deverá existir entre d e x para que a área colorida seja máxima. (Lima e Gomes 10º, 1996, p. 173)

Problemas de Geometria Analítica



N10.5. *O rectângulo na parábola*

Observe a figura. A unidade é o centímetro.

a. Escreva uma equação que represente o arco da parábola.

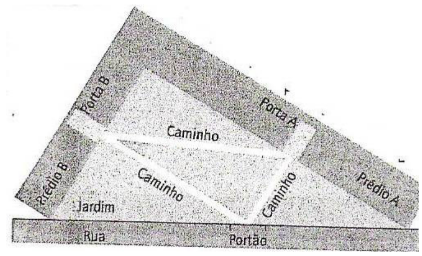
b. Escreva a área do rectângulo em função de x e determine:

i. A área máxima do rectângulo, com uma aproximação às centésimas;

ii. Entre que valores de x a área do rectângulo é superior a 2 cm^2. (Neves 10º, 2001, p. 177)

Problemas de Medida em Contexto Real

JAFB10.3. *O caminho mais curto*



As fachadas de dois prédios fazem entre si um ângulo recto.

O muro que os separa da rua limita um jardim triangular.

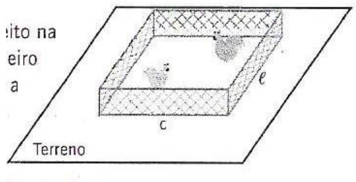
O jardim é atravessado por três caminhos que ligam entre si o portão de tal modo que:

1º Cada caminho do portão até às portas é perpendicular ao prédio.

2º O caminho que liga as duas portas é o mais curto possível.

Em que ponto do muro está o portão? Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, (p. 261)

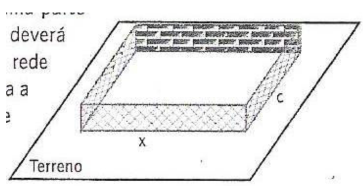
JAFB10.4. *Um agricultor comprou 6 metros de rede para fazer 1 galinheiro rectangular, como ilustra a figura.*



Para optimizar o empate de capital feito na compra da rede, pretende que o galinheiro tenha área máxima. Ajude o agricultor a resolver o problema seguindo os passos que a seguir se indicam:

1. *Exprima l em função de c.*
2. *Exprima a área A do galinheiro em função de c.*
3. *Determine o valor de c para o qual a área é máxima e o correspondente valor de l. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 312)*

JAFB10.5. *Dispõe-se de 20 000$00 para vedar uma parte de um terreno rectangular. A vedação deverá ser feita em tijolo num dos lados e em rede os três lados restantes, conforme ilustra a figura ao lado. Cada metro de rede custa 200$00 e cada metro de parede em tijolo, 600$00. Qual a área máxima que se consegue vedar?*

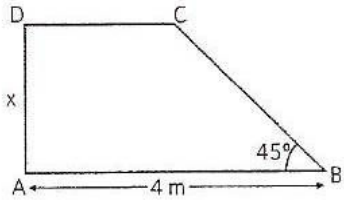


Tente resolver o problema seguindo os passos que a seguir se sugerem:

1. *Exprima c em função de x, recorrendo ao capital de que se dispões.*
2. *Prove que a área da parte do terreno a vedar em função de x é* $A(x) = 50x - 2x^2$.

Determine o valor de x para o qual a área A é máxima e o valor dessa área. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 312)

JAFB10.7. *A figura representa um jardim com a forma de um trapézio rectângulo.*



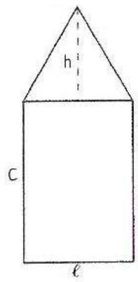
a. Escreva $\overline{DC}$ *em função de x.*

b. Mostre que a área do trapézio em função de x é dada pela expressão $A(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$

c. *Calcule a altura x do trapézio de modo que a área seja inferior a 6 m².*

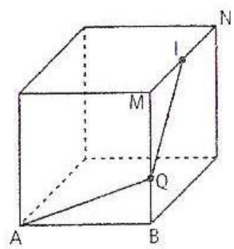
d. *Recorrendo à representação gráfica da função A, determine o valor de x para o qual é máxima a área do jardim e indique o seu valor. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 313)*

JAFB10.8. *As janelas de uma casa têm 6 metros de perímetro e a configuração da figura – um rectângulo encimado por um triângulo equilátero.*



1. *Exprima c e h em função de l.*
2. *Exprima a área A da janela em função de l e represente graficamente a função* $l \to A(L)$. *(Utilize valores aproximados Às décimas)*
3. *Determine c e l de modo que entre pela janela a maior quantidade de luz possível (isto é, a área seja máxima). (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 313)*

JAFB10.9. *O cubo da figura tem 2 cm de aresta. Uma formiga desloca-se de A para I, ponto médio da aresta [MN], passando sempre por um ponto (Q) da aresta [BM] e percorrendo segmentos rectilíneos. Designando* $\overline{BQ}$ *por x e por D(x) a distância percorrida pela formiga:*

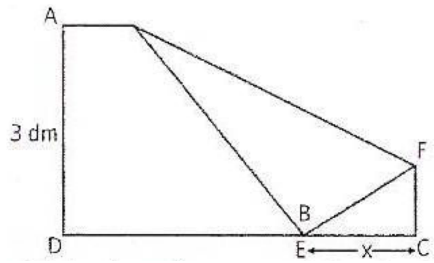


1. *Escreva uma expressão de D(x).*
2. *Entre que valores pode variar x?*
3. *Recorrendo a uma calculadora gráfica, represente a função D e apresente um valor aproximado de x a menos de 0, 01 para o qual a distância percorrida pela formiga seja mínima. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 315)*

JAFB10.10. *Considere uma folha rectangular de papel de 3 dm de largura.*

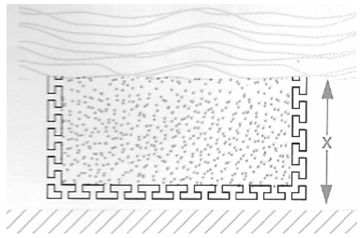
Dobra-se o canto B de modo que coincida com o ponto E do lado oposto.

Mostre que a área A(x) do triângulo rectângulo [ECF] é dada por $A(x) = 0{,}75x - \frac{1}{12}x^3$



Qual o seu valor máximo? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 323)

LG10.1. *Com 100 m de rede temos de vedar 3 lados de um terreno rectangular à beira de um rio.*



a. Exprime a área do terreno em função do lado x.

b. Estuda o domínio da função; esboça o gráfico.

c. Faz um estudo da função relativamente a zeros, monotonia, extremos, injectividade.

d. Conclui qual a área máxima que se pode vedar com os 100 m de rede.

e. Faz um relatório com desenhos à escala de vários rectângulos possíveis.

(Lima e Gomes 10º, 1996, p. 149)

LG10.2

a) Sendo 80 m o perímetro dum terreno rectangular, exprime a área A em função da altura h.

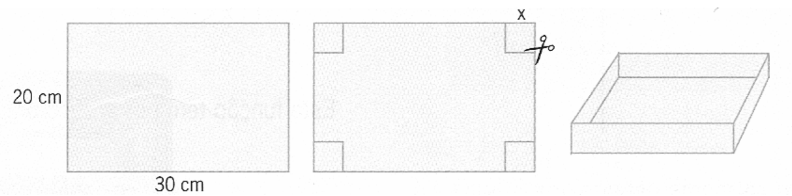
b) Esboça o gráfico da função h |–> A e calcula a área máxima que o terreno pode ter.

c) Calcula para que valores de h vem A > 200 m². (Lima e Gomes 10º, 1996, p. 159)

N10.1. Volume da caixa

Tem-se uma cartolina rectangular com 30 cm de comprimento e 20 cm de largura.

Pretende-se construir uma caixa sem tampa, cortando nos quatro cantos um quadrado de lado x.



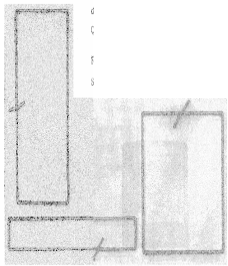
a. . Escreva a expressão do volume da caixa.

b. Qual é o domínio da função?

c. Use a calculadora gráfica para obter o gráfico da função que escreveu em 20.1.

d. Indique um valor aproximado de x para o qual o volume da caixa é máximo. (Utilize o TRACE da calculadora gráfica) (Neves 10º, 2001, p. 51)

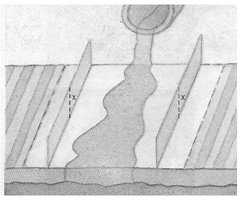
***N10.2.** A importância do vértice*



Com cem metros de rede pretende-se vedar um terreno rectangular de modo a que este tenha o máximo de área.

Quais devem ser as dimensões do terreno? (Neves 10º, 2001, P. 90)

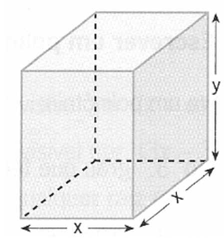
***N10.3.** Tem-se uma "folha" de metal com 50 cm de largura.*



Pretende-se fazer uma peça para conduzir água de uma conduta de águas pluviais, como mostra a figura, dobrando de cada lado, na vertical, uma parte da folha com a mesma altura x.

Para que a quantidade de água transportada seja máxima, qual deve ser o valor de x? (Neves 10º, 2001, p. 100)

N10.4. A caixa do presente



Para embalar uma peça de louça de colecção a empresa "Vista contente" produziu uma caixa com a forma de um prisma quadrangular regular.

A caixa levará uma fita dourada cobrindo todas as arestas da caixa.

Para cada caixa são necessários 160 cm de fita dourada.

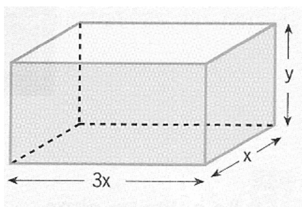
De acordo com a figura:

a. Determine o valor de x, em função de y;

b. Determine um valor aproximado, a menos de uma décima, para o volume máximo da caixa;

c. Se pretender um volume para a caixa de 2000 cm^3, qual deve ser o valor de x? (Neves 10º, 2001, p. 176)

***N10.6.** A caixa fechada*



Uma caixa com a forma de um paralelepípedo tem a base rectangular cujo comprimento é o triplo da largura.

Mostre que:

a. Se a área da caixa é 168 cm^2, o volume v da caixa, em cm^3, é dado pela expressão:

$$V = 63x - \frac{9}{4}x^3$$

em que x é a medida, em cm, da largura da base da caixa.

b. Determine um valor aproximado para o qual o volume da caixa é máximo e indique o valor do volume para essa aproximação. (Neves 10º, 2001, p. 184)

Manuais do 11º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: *Xeqmat, 11º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1997, Editorial O Livro

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual apresenta uma estrutura semelhante ao manual dos mesmos autores apresentado no período anterior. É composto por 344 páginas repartidas por três capítulo: Trigonometria e Geometria, Funções e Derivadas e o último tema Sucessões.

Os problemas de optimização encontram-se na parte referente às Funções e Derivadas. Veja-se como está estruturada esta unidade.

- Funções racionais
- Funções definidas por troços
- Operações com funções
- Limite. Taxa de variação média. Derivada
- Inversão de uma função. Funções com radicais.

No final de cada sub-unidade surge uma revisão/síntese e a seguir um conjunto de exercícios de revisão. No final da unidade ainda surge mais um conjunto de exercícios de revisão geral do tema, separados por sub-temas.

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo

Título: *Infinito 11, 11º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 2001, Areal Editores: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Esta obra é composta por dois volumes., sendo o segundo composto por 318 páginas repartidas por dois capítulos: Cálculo Diferencial e Sucessões.

O capítulo dedicado ao cálculo diferencial apresenta os conteúdos seguintes:

- Funções racionais
- Operações com funções

- Função composta
- Resolução de problemas envolvendo as funções estudadas
- Taxa de variação de uma função. Derivada
- Função derivada. Funções derivadas de algumas funções
    - Função derivada
    - Funções derivadas de algumas funções
    - Sinal da derivada e sentido de variação
    - Extremos relativos de uma função
- Função inversa
- Funções com radicais quadráticos e cúbicos
- Determinação da equação reduzida da elipse recorrendo às propriedades focais
- Aplicando

Os problemas de optimização estão na parte dedicada às aplicações dos extremos relativos.

Autor: Maria Augusta F. Neves

Título: *Matemática 11º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 2001, Porto Editora: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual tem uma estrutura semelhante ao manual do 10º ano. Tem em três volumes: Geometria, Funções e Sucessões. Da mesma autora foi também publicado um livro de exercícios, este também com três volumes, sendo cada um deles dedicado a cada um dos temas referidos.

Os problemas de optimização fazem parte do segundo volume, respeitante às Funções. Este manual é composto por 208 páginas divididas por cinco sub-temas:

- Funções Racionais
- Funções Irracionais
- Operações com funções. Resolução de problemas envolvendo funções
- Taxa média de variação e taxa de variação de uma função. Cálculo da derivada de algumas funções
- A derivada e os extremos de uma função. Problemas de optimização.

Problemas de Geometria Métrica

LG11.5. *De todos os triângulos rectângulos cujos catetos somam 50 cm, determina o que tem área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 201)*

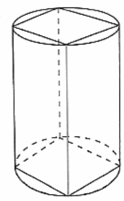
LG11.6. *De entre os rectângulos com 60 dm² de área, descobre as dimensões do que tem perímetro mínimo. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 201)*

LG11.7. *De entre os rectângulos com 80 m de perímetro, determina as dimensões do que têm área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 201)*

LG11.10. *Considera os vários paralelepípedos de base quadrada cujas dimensões somam 1 metro.*

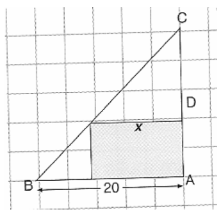
Calcula a altura do que em maior volume. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 204)

LG11.12. *Um prisma quadrangular regular está inscrito num cilindro. A secção desse cilindro por um plano contendo o eixo tem 30 cm de perímetro.*



a. Exprime o volume do prisma em função do diâmetro x do cilindro.

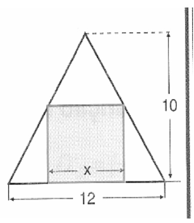
b. Determina o domínio da função e o valor de x que torna o volume máximo. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 205)



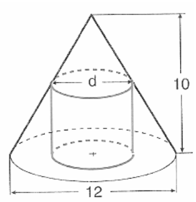
LG11.13. *Na figura um rectângulo em cor está inscrito no triângulo rectângulo isósceles cujos catetos medem 20 cm.*

Determina as dimensões do rectângulo de área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 205)

LG11.14. *Quais são as dimensões do rectângulo de área máxima que se pode inscrever, como indica a figura, num triângulo isósceles com 12 cm de base e 10 cm de altura? (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)*



LG11.15 *Calcula o diâmetro do cilindro de revolução, de volume máximo, que se pode inscrever, como indica a figura junta, num cone de revolução com 12 m de diâmetro da base e 10 m de altura. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)*



LG11.17. *Determina a altura do cone de revolução com 30 cm de geratriz cujo volume é máximo. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)*

LG11.18. *Um triângulo equilátero [ABC] tem 6 m de perímetro. Sendo M um ponto de [BC] determina a sua posição de forma que o produto das distâncias de M às rectas AB e AC seja máximo.*
Sugestão: Recorre à Trigonometria (sen 60º). (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)

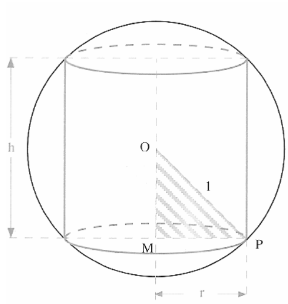
LG11.25. *Um trapézio tem três lados com 8 cm cada um. Determina o comprimento do 4º lado de forma que a área seja máxima.*
Sugestão: Exprima a área em função de metade da diferença das bases. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 232)

JAFB11.3. *O maior cilindro inscrito numa esfera.*

Consideremos uma esfera de raio 1 dm e um cilindro de altura h e raio da base r inscrito na esfera (as suas duas bases são círculos da esfera).

Qual o valor de h para o qual o volume do cilindro é máximo?

E qual é o valor desse volume? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 134)



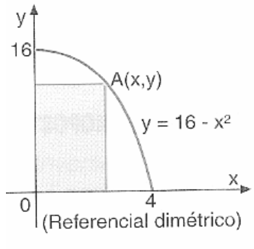
N11.5. *Determine o volume máximo de um cone inscrito numa esfera de raio 3 cm. (Neves 11º, 2001, p. 137)*

Problemas de Geometria Analítica

LG11.20. *Um rectângulo de área A não nula tem dois lados sobre os eixos coordenados sendo a origem um dos vértices. O vértice oposto é ponto da parábola de equação y = 16 – x^2.*

a) Exprime a área do rectângulo em função de x indicando o domínio de A(X).

b) Para que valores de x a área do rectângulo é máxima? (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)



LG11.21. *A figura representa uma elipse na qual se inscreveu um rectângulo [MNPQ].*

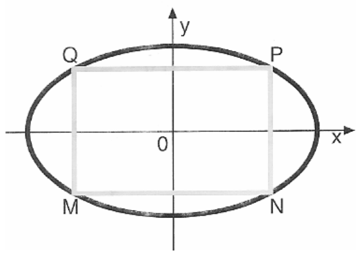
A elipse tem centro na origem O do referencial, distância focal 6 (cm) e eixo maior sobre o eixo das abcissas, com 10 cm de comprimento.

a) Escreve uma equação cartesiana da elipse.

b) Sendo (x, y) as coordenadas do ponto P da elipse prova que a área do rectângulo representado se pode exprimir em função de x do seguinte modo

c) Determina o valor de x para o qual é máxima a área do rectângulo e calcula essa área.

Sugestão: na área é máxima quando $25x^2 - x^4$ *o for.*



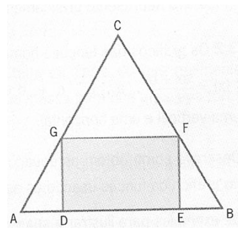
Aferição, 94 – 1ª Chamada – Época Especial. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 224)

N11.12. *O rectângulo de área máxima*

O triângulo [ABC] é equilátero de lado 10 cm.

Construiu-se um rectângulo [DEFG] como se indica na figura.

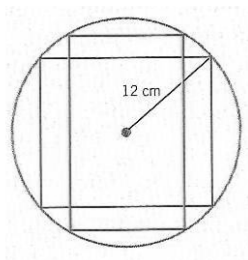
Determine as dimensões do rectângulo de modo que este tenha área máxima. (Neves 11º, 2001, p. 143)



N11.15. *O rectângulo no círculo*

Num círculo de raio 12 cm inscreveu-se um rectângulo.

Quais as dimensões do rectângulo de modo que a área deste seja máxima? (Neves 11º, 2001, p. 157)



Problemas de Aritmética

LG11.8. *Calcula os números:*

a. Cuja soma é 30 e cujo produto é máximo.

b. Cuja diferença é 20 e cujo produto é máximo. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 201)

N11.6. *A soma é 20*

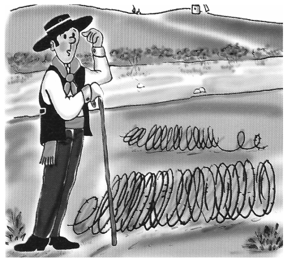
A soma de dois números positivos é 20. Determine os números sabendo que:

a. O seu produto é máximo

b. A soma dos seus quadrados é mínima. (Neves 11º, 2001, p. 141)

Problemas de Medida em Contexto Real

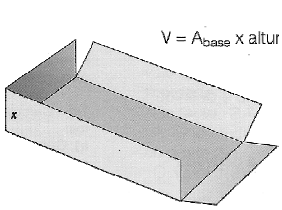
LG11.1. *A horta à beira rio*



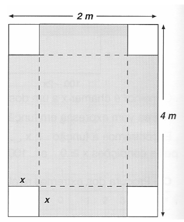
O Sr. Joaquim pediu-nos ajuda:

"Tem 100 metros de rede para vedar um terreno rectangular à beira rio. Só quer vedar 3 lados que não dão para o rio. Mas quer que a área da horta fica a maior possível…" (Lima e Gomes 11°, 1997, p. 201)

LG11.2. *Um pequeno contentor – volume máximo*

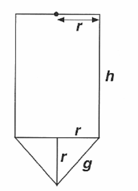


Suprimindo um quadrado em cada canto de uma chapa metálica rectangular, de 2 metros por 4 metros, vai construir-se um contentor (sem tampa).



Determinar o lado do quadrado a suprimir de modo que o volume do contentor seja o maior possível. (Lima e Gomes 11°, 1997, p. 202)

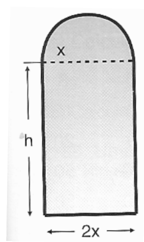
LG11.3. *Silos para cimento – área mínima*



Silos para conter cimento têm a forma de um cilindro de altura h e raio r sobreposto a um cone de altura e raio iguais a r.

Para silos com volume total de 100 m³ determinar r de modo que a área lateral seja o menor possível para minimizar o custo do silo. (Lima e Gomes 11°, 1997, p. 203)

LG11.4. *Janela com vão máximo.*



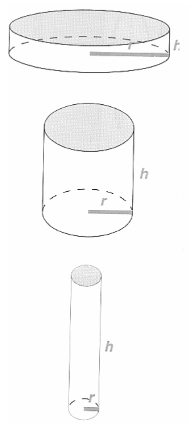
Um edifício vai ter janelas com a forma dum semicírculo sobreposto a um rectângulo.

O perímetro da janela não pode exceder 4 metros. Determina o formato óptimo da janela para obter o vão máximo (área máxima). (Lima e Gomes 11°, 1997, p. 205)

LG11.9. *De um cartão quadrado com 1m² de área, tira-se um quadrado a cada canto para fazer um caixote (sem tampa).*

Determina qual deve ser o lado desses quadrados para que o volume do caixote seja o maior possível. (Lima e Gomes 11°, 1997, p. 202)

LG11.11. *Pensa em vários gasómetros cilíndricos com capacidade de 2 m*^{3}*. Repara que podem ter formas muito diferentes.*



a. Prova que a área total é dada, em função do raio r, por

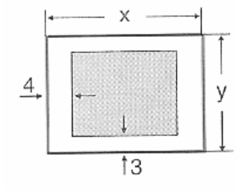
$$A = 2\pi r^2 + \frac{4}{r},\ r > 0.$$

b. Estuda a monotonia da função r |–> A recorrendo à derivada.

c. O custo do gasómetro será mínimo quando a área A for mínima. Que valor deve ter o raio para obter o custo mínimo? (Lima e Gomes 11°, 1997, p. 204)

LG11.19. *Um editor decidiu que as páginas dum livro a editar deveriam ter margens de 3 cm em cima e em baixo e de 4 cm de cada lado e que a área da página seria de 432 cm*^{2}*.*

Determina as dimensões da página para que a área impressa seja a maior possível. (Lima e Gomes 11°, 1997, p. 209)



LG11.22. *Determina as dimensões do rectângulo.*

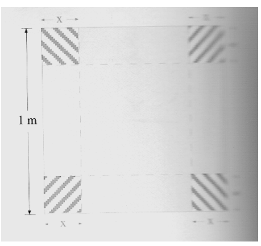
a*. Com 100 cm*^{2} *de área e cujo perímetro é o menor possível.*

b. *De maior área que se pode contornar com 1200 m de rede. (Lima e Gomes 11°, 1997, p. 231)*

LG11.24. *Um arame com 24 cm vai ser cortado em duas partes, uma para formar um quadrado e outra para definir um círculo.*

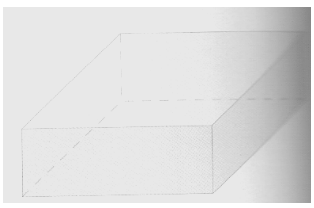
Em que ponto deve ser cortado o arame para que a soma das áreas do quadrado e do círculo seja mínima? (Lima e Gomes 11°, 1997, p. 231)

JAFB11.1. *Economia no fabrico.*



Considere-se uma placa de cartão de forma quadrada com 1m de lado.

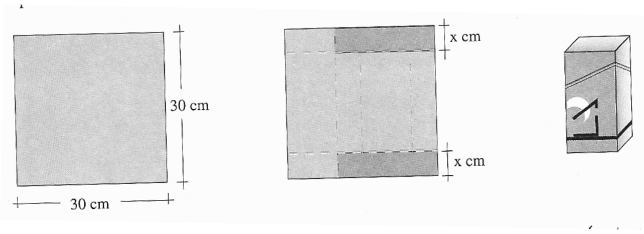
Corta-se em cada canto um quadrado de lado x, com o fim de fazer uma caixa paralelipipédica sem tampa.



Qual o valor de x que torna o volume da caixa máximo? E qual é, então, esse volume? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11° V2, p. 133)

JAFB11.2. *Economia no fabrico.*

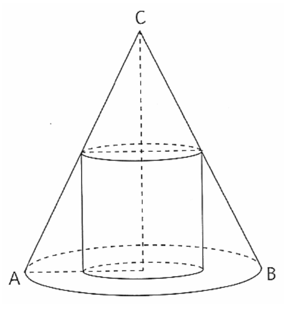
Uma empresa fabrica caixas em cartão cortando duas faixas da mesma largura numa folha quadrada.



A medida do lado da folha é 30 cm e designa-se por x a medida, em centímetros, da largura da faixa que se retira.

Determinemos o valor de x que torna o volume da caixa máximo e, seguidamente, calculemos esse volume. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 133)

JAFB11.4. *Num circo, uma lâmpada emite um cone de luz de altura 16m e raio da base 8m. Para um trabalho dos trapezistas, é preciso saber que espaço é utilizado dentro desse cone de luz. Chegou-se à conclusão que interessaria o espaço limitado pelo cilindro interior ao cone de volume máximo.*



Conhecer a altura e o raio da base desse cilindro é essencial para o trabalho dos trapezistas. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 165)

JAFB11.5. *Um aquário aberto em cima, de forma paralelepipédica, de 45 cm de altura, deve ter um volume de 170 litros.*

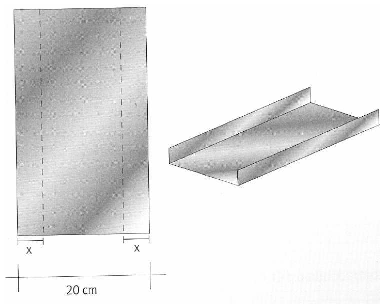
Sejam x e y o comprimento e a largura da base, respectivamente.

a. Exprima y como função de x.

b. Exprima, em função de x, a área total de vidro necessária.

c. Determine para que valor de x essa área é mínima. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 173)

JAFB11.6. *Uma folha rectangular de metal com 20 cm de largura vai ser dobrada para se fabricarem caleiras, como mostra a figura:*

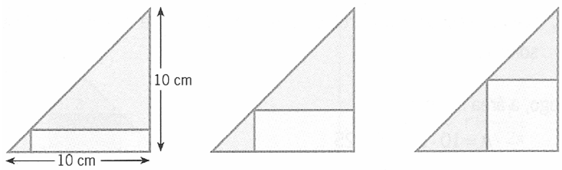


Por onde devem ser feitas as dobragens para que a caleira transporte a maior quantidade possível d água? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 183)

N11.1. *O canteiro num jardim*

Num jardim com a forma de um triângulo isósceles queremos desenhar um canteiro como se indica na figura: um dos vértices do rectângulo pertence à hipotenusa e os outros aos catetos.

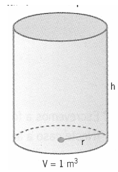
Um destes rectângulos terá área máxima. Qual deles é? (Neves 11º, 2001, p. 131)



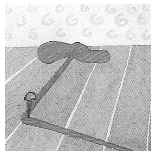
N11.2. *O cilindro de latão*

Uma empresa fabrica cilindros em latão com 1m³ de volume.

Estudar as dimensões do cilindro de modo a gastar o mínimo latão possível na sua construção. (Neves 11º, 2001, p. 132)

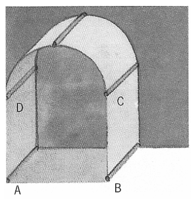


N11.3. *Com um fio de 150 cm de comprimento, quais as dimensões do rectângulo de área máxima que é possível construir? (Neves 11º, 2001, p. 132)*



N11.4. *Com 714 m de rede pretende-se vedar um terreno, com a forma indicada em cima, constituído por um rectângulo [ABCD] e um semicírculo de diâmetro [DC].*

Determine as dimensões do rectângulo de modo a que a área seja máxima. (Neves 11º, 2001, p. 133)



N11.7. *O problema do jardineiro*

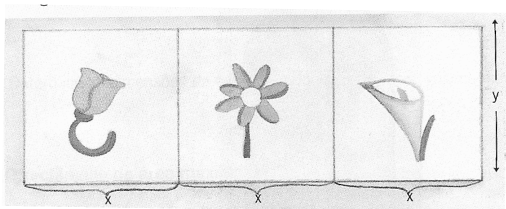
Um jardineiro pretende criar três canteiros rectangulares vedados como se indica na figura.

Ele tem 300 metros de rede.

a. De acordo com os dados da figura, mostre que a área dos canteiros em função de x é dada por:

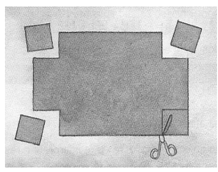
$$A(x) = 450x - 9x^2$$

b. Determine x e y de modo que a área seja máxima. Qual o valor máximo dessa área? (Neves 11º, 2001, p. 141)



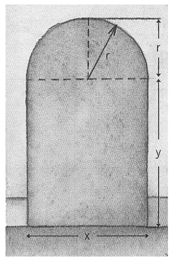
N11.8. *A construção da caixa*

Para construir uma caixa vão ser cortados quatro cantos quadrados iguais a um quadrado de 12 cm de lado. Determine o



lado de cada quadrado de modo que o volume da caixa obtida seja máximo. (Neves 11º, 2001, p. 142)

N11.9. *A porta*



Uma porta será constituída por um rectângulo por um semicírculo, como se ilustra na figura.

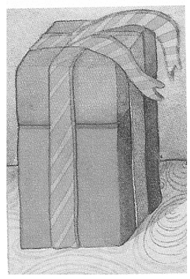
Sabendo que o perímetro da porta será 18, determine a área máxima da porta. (Neves 11º, 2001, p. 142)

N11.10. *O rectângulo com vértices na parábola*

Um rectângulo tem base no eixo dos xx e os outros dois vértices pertencem à parábola de equação $y = 4 - x^2$.

Qual a área máxima que o rectângulo pode ter? (Neves 11º, 2001, p. 143)

N11.11. *Volume máximo*



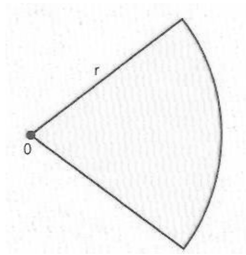
Uma caixa com a forma de um paralelepípedo de base quadrada de lado x cm, tem uma área total de 150 cm^2.

a. Mostre que o volume do paralelepípedo é dado pela fórmula:

$$V = \frac{75x - x^3}{2}$$

b. Determine as dimensões da caixa de modo que ela tenha volume máximo. (Neves 11º, 2001, p. 143)

N11.14. *O sector circular*

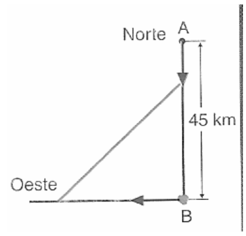


Um canteiro de um jardim terá a forma de um sector circular de raio r.

O perímetro do canteiro terá de ser 20 metros.

Determine r de modo que a área do canteiro seja máxima. (Neves 11º, 2001, p. 157)

Problemas de Física



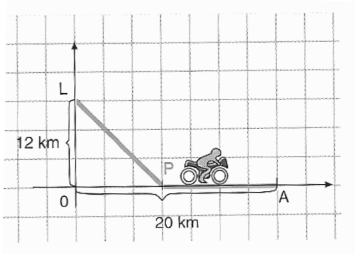
LG11.16 *Em dado momento o barco A está a 45 km a norte do barco B.*

O barco A dirige-se para Sul à velocidade de 9 km/h e o barco B vai para Oeste à velocidade de 12 km/h.

No seu movimento qual a distância mínima que separa os barcos?

Sugestão: Estuda a função f: t |–> $d^2(t)$ visto que d mínima equivale a d^2 mínima. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)

LG11.23. *Um ciclista está na localidade L a 12 km do ponto O mais próximo de uma estrada, rectilínea e alcatroada, e pretende ir à aldeia A que dista 20 km de O sobre essa estrada.*



O ciclista desloca-se a 10 km/h na estrada alcatroada e a 8 km/h fora da estrada.

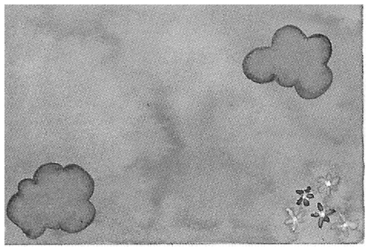
Determina o ponto P em que deve atingir a estrada alcatroada para fazer o percurso no menor tempo possível. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 231)

Nota: $\left(\sqrt{f}\right) = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

Problemas de Economia

N11.13. O custo da vedação

A Beatriz queria ter um jardim com a forma de um rectângulo. Ela entendeu que não queria mais do que 200 m^2 de terreno pois não teria tempo de cuidar dele devidamente.



Suponha que x representa o comprimento e y a largura do jardim.

a. Escreva y em função de x.

b. Escreva o perímetro P em função de x.

c. Se a Beatriz pretende vedar o jardim com rede que custe 9 euros (1 804$00) o metro, qual é a função custo para a vedação?

d. Represente graficamente a função custo e determine gráfica e algebricamente o custo mínimo da vedação em função de x. (Neves 11º, 2001, p. 156)

Manuais do 12º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: *Xeqmat, 12º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1997, Editorial O Livro

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está estruturado de modo muito semelhante ao manual editado para a reforma anterior. É composto por 392 páginas, num só volume, repartidas por três temas: Probabilidades e combinatória, Introdução ao Cálculo Diferencial II e, por fim, Trigonometria e Números Complexos.

Encontramos os problemas de optimização em dois capítulos: no do Cálculo Diferencial e no da trigonometria.

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo

Título: *Infinito 12, 12º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 2002, Areal Editores: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Esta obra tem uma estrutura muito semelhante à obra dos mesmos autores analisada no período anterior, também está dividia em três partes, sendo a primeira dedicada às probabilidades e combinatória, a segunda ao cálculo diferencial e a última à trigonometria e números complexos.

Os problemas de optimização constam na segunda e na terceira parte. Os capítulos estão assim estruturados:

1. Introdução ao cálculo diferencial II
    - Função exponencial de base superior a um
    - Função logarítmica de base a (a > 1). Logaritmo de um número
    - Limite de uma função segundo Heine
    - Continuidade
    - Teorema de Bolzano-Cauchy
    - Assimptotas
    - Funções deriváveis
    - Derivada de uma função exponencial
        - Derivada da função logarítmica
        - Teorema da derivada da função composta
        - Primeira derivada e sentido de variação
        - Extremos relativos de uma função
        - Segundas derivadas e concavidades
        - Estudo analítico de funções
        - Problemas de máximos e mínimos
        - Problemas de optimização

2. Trigonometria e números complexos
   - Função seno, co-seno e tangente
     - Função seno
     - Função co-seno
     - Estudo intuitivo de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$
     - Derivabilidade das funções seno e co-seno
     - Função tangente
     - Derivabilidade da função tangente
     - Aplicações
     - Resolução de problemas

Os problemas de optimização encontram-se no segundo volume, na parte dedicada aos problemas de optimização. Nesta parte as autoras começam por explicar as etapas a seguir na resolução deste tipo de problemas:

- Definir uma função que sirva de modelo matemático à situação a estudar (se possível com uma só variável);
- Estudar a variação dessa função determinando, em particular, os seus extremos;
- Confrontar os resultados teóricos com o fenómeno real e a situação concreta do problema.

De seguida mostra um conjunto de problemas resolvidos e no final do capítulo, na parte dos exercícios, aparece mais um conjunto de problemas de optimização.

No terceiro volume os problemas de optimização surgem na parte referente às aplicações da derivada e no final do capítulo, na parte destinada aos exercícios.

Autor: Maria Augusta F. Neves

Título: *Matemática 12º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 2002, Porto Editora: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Também esta obra tem uma estrutura semelhante à dos manuais da mesma autora analisados anteriormente. Este manual está dividido em três volumes, o primeiro trata as Probabilidades, o segundo as Funções e o último a trigonometria.

Encontramos os problemas de optimização no segundo e no terceiro volume. O segundo volume é composto por 256 páginas repartidas pelos vários sub-temas:

- Funções exponenciais e logarítmicas
- Limites
- Continuidade de uma função
- Derivadas
- Aplicações das derivadas
    - Funções estritamente crescentes e funções estritamente decrescentes
    - Extremos de uma função
    - Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função
    - Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função
    - Extremos relativos e primeira derivada de uma função
    - Teste da segunda derivada
    - Estudo de funções
    - **Problemas de optimização**
    - O que estudou no tema
    - Problemas resolvidos
    - Problemas propostos

O terceiro volume é composto por 176 páginas repartidas pelos vários sub-temas:

- Radiano. Razões trigonométricas
- Fórmulas trigonométricas
- Funções trigonométricas. Equações trigonométricas
- Derivada das funções trigonométricas
    - Estudo intuitivo do $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x}$
    - Derivada de funções trigonométricas
    - O que estudou no tema
    - Problemas resolvidos
    - Problemas propostos
- Introdução aos números complexos
- Representação trigonométrica de um complexo. Operações
- Domínios planos e condições em variável complexa

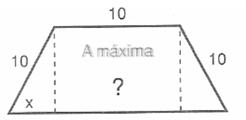
Da mesma autora foi também publicado um livro de exercícios, também dividido em três volumes, sendo cada um deles dedicado a cada um daqueles temas.

Os problemas de optimização existem nos dois manuais. No segundo surgem explicitamente na parte das aplicações da derivada. No terceiro surgem, não de forma explícita, na parte relativa às derivadas de funções trigonométricas.

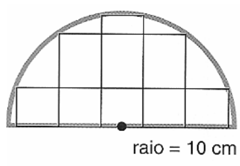
Observemos então, os problemas de optimização presentes nas obras.

Problemas de Geometria Métrica

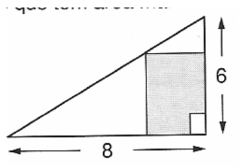
LG12.5. *De ente os rectângulos com 1 m² de área, qual é o que tem perímetro mínimo? (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 233)*



LG12.6. *Um trapézio tem 3 lados com 10 m cada um, Qual deve ser o comprimento do 4º lado para que a área seja a maior possível? (Fazer base maior = 10 + 2x.) (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 233)*

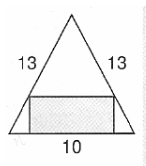


LG12.7. *Dos rectângulos inscritos num semicírculo de raio 10 cm, determina a base do que tem maior área. (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 233)*



LG12.8. *De entre os rectângulos que se podem inscrever neste triângulo rectângulo, determina as dimensões do que tem área máxima.*

(um dos ângulos do rectângulo coincide com o ângulo recto do triângulo.) (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 235)



LG12.12. *Num triângulo isósceles de lados 10, 13, 13, inscreve-se um rectângulo como a figura indica (base contida na base do triângulo).*

Determina as dimensões do rectângulo de modo que a sua área seja máxima. (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 247)

JAFB12.1. *[DABC] é uma pirâmide tal que [ABC] é um triângulo em A. O ponto D pertence à recta perpendicular a ABC no ponto B.*

Os triângulos [DBA] e [DBC] são rectângulos em B.

$\overline{AB} = 9$ *(em centímetros).*

$\overline{AC} = 12$ *(em centímetros).*

$\overline{BD} = 16$ *(em centímetros).*

Designe-se por M um ponto do segmento [AB] e $\overline{AM} = a$.

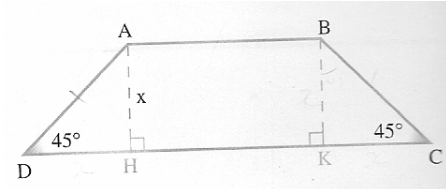
Por M trace-se um plano perpendicular a [AB]. Designe-se por N a sua intersecção com [BC], por P a sai intersecção com [CD] e Q a sua intersecção com [AD].

*Exprima em função de **a** a área do quadrilátero [MNPQ] e averigúe quando é máxima esta área. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 179)*

JAFB12.9. *[ABCD] é um trapézio isósceles de área* $5\sqrt{2}$ *cm²*

Os ângulos agudos medem 45º.

Seja x (em cm) a altura do trapézio e P(x) o seu perímetro (em cm).



a. *Exprima* $\overline{DH}$ *e* $\overline{CK}$ *em função de x.*

b. *Exprima* $\overline{AD}$ *e* $\overline{BC}$ *em função de x.*

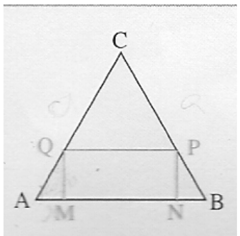
c. *Utilize a área do trapézio para exprimir* $\overline{AB}$ *em função de x.*

d. *Mostre que* $P(x) = 2\sqrt{2}x + \dfrac{10\sqrt{2}}{x}$

e. *Encontre o valor de x para o qual o perímetro do trapézio é mínimo.*

Qual é então a medida dos lados do trapézio? Interprete graficamente. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 216)

JAFB12.11. *Considere o triângulo equilátero [ABC] de lado a.*

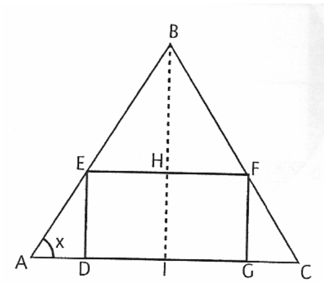


Inscreve-se neste triângulo um rectângulo [MNPQ].

Faça-se $\overline{AM} = x$

Para que valor de x a área do rectângulo é máxima? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 217)

JAFB12.17. *Na figura*



– *O triângulo [ABC] é isósceles (* $\overline{AB} = \overline{BC}$ *)*

– *[DEFG] é um rectângulo*

$\overline{DG} = 2$

$\overline{DE} = 1$

– *x designa a amplitude do ângulo BAC*

a. *Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada, em função de x, por* $f(x) = 2 + tg\,x + \dfrac{1}{tg\,x} \left(x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$

(Nota: pode ser-lhe útil reparar que BÊF = BÂC)

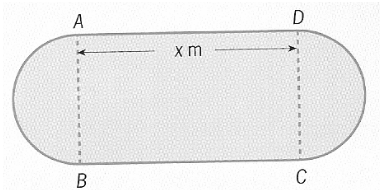
b. *Mostre que* $f'(x) = \dfrac{-\cos(2x)}{sen^2 x . \cos^2 x}$ *(f' designa a derivada de f).*

c. *Determine o valor de x para o qual a área do triângulo [ABC] é mínima.*

Obs: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\,\beta\, sen\,\alpha$ $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$

(Exame Nacional, 2ª fase, 1998) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p.127)

N12.8. *O perímetro mínimo*



A figura representa uma superfície constituída por um rectângulo [ABCD] e dois semicírculos de diâmetros [AB] e [CD].

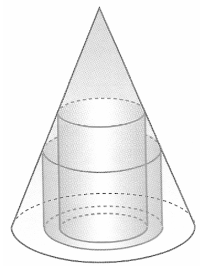
A área do rectângulo é 200 m² e $\overline{AD} = x$ *m.*

a. Mostre que o perímetro P m da figura é dado por:

$$P = \frac{200\pi}{x} + 2x$$

b. Determine o perímetro mínimo que a figura pode ter. (Neves, 12º V2, p. 231)

N12.5. *Observe a figura:*



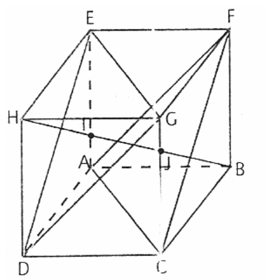
Os cilindros e o cone têm a base assente no mesmo plano e as respectivas alturas estão contidas na mesma recta.

O cone tem de altura 60 cm e raio da base 10 cm.

Determine o volume máximo do cilindro que se pode inscrever no cone. (Neves, 12º V2, p. 217)

Problemas de Geometria Analítica

JAFB12.3. *Consideremos o cubo de aresta 1 unidade.*



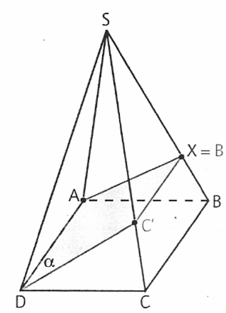
Considere o referencial $(A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$ *e considere o plano de equação*

$x - y + z = a \quad a \in [-1, 2]$

Determine a de modo que a secção do plano com o cubo tenha área máxima.

Quais são os vértices do polígono secção correspondente à área máxima? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 209)

JAFB12.4. *Considere a pirâmide [SABCD] de base quadrada [ABCD], em que SA é perpendicular à base [ABCD], tal que* $\overline{AB} = 3$ *e* $\overline{SA} = 3\sqrt{3}$ *(em centímetros).*



O plano α contém AD, intersecta [SB] em B' e [SC] em C'.

a. Designando por x o comprimento $\overline{SX}$*, mostre que*

$$\overline{AB'}^2 + \overline{B'C'}^2 + \overline{C'D}^2 = \frac{5}{2}x^2 - 21x + 63$$

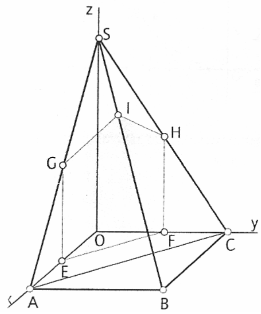
b. Faça y = $\overline{AB'}^2 + \overline{B'C'}^2 + \overline{C'D}^2$ *, estude a função*

$$f: x \rightarrow y$$

e interprete o significado dos extremos relacionando-os com a secção correspondente. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 210)

JAFB12.5. *Seja* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *um referencial o.n. e A, B, C, S definidos por*

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i}\ ; \overrightarrow{OC} = \vec{j}\ ; \overrightarrow{AB} = \vec{j}\ ; \overrightarrow{OS} = \vec{k}$$



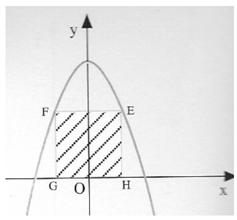
Seja a um número real do intervalo]0, 1[.

Pretende-se determinar a área máxima da secção definida pela intersecção do plano de equação x + y = a com a pirâmide [SOABC].

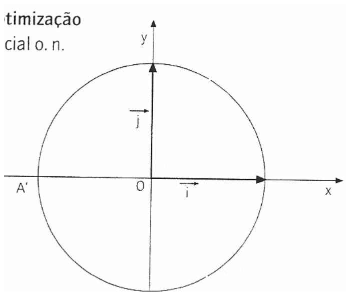
1. *Designemos por E, F, H, I e G os pontos de intersecção do plano com as arestas da pirâmide.*
   Prove que [GEFH] é um rectângulo.
2. *Determine as coordenadas de I e calcule a área do triângulo [GHI].*
3. *Seja f a função, área da secção, definida em]0, 1[por* $f(a) = a\sqrt{2}\,\dfrac{(4-3a)}{4}$.
   Estude a variação de f. Para que valor de a é esta área máxima?
4. *Mostre que o plano que determina a área máxima é paralelo a AC e OS e passa pelo baricentro do triângulo [OAC]. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 210)*

JAFB12.7. *Considere a parábola definida por*

$$y = -x^2 + 9.$$



Supondo que a unidade adoptada é o cm, determine as dimensões do rectângulo [EFGH] de área máxima sabendo que E e F são pontos da parábola e G e H são pontos do eixo das abcissas. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 215)

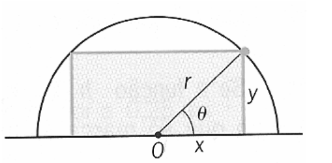


JAFB12.12. *Seja* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *um referencial o.n.*

Seja C o círculo de centro O e de raio 1, A, o ponto de coordenadas (1, 0) e A', o ponto de coordenadas (-1, 0). Seja M um ponto de C distinto de A e de A', de ordenada positiva e M' o seu simétrico em relação a AO.

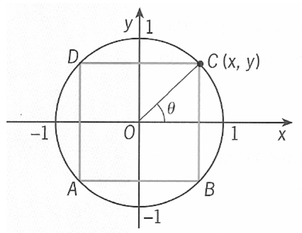
Pretende-se determinar a posição do ponto M, de modo que a área do triângulo [AMM'] seja máxima e conhecer a natureza do triângulo. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p.59)

N12.16. *O rectângulo no semicírculo: Observe a figura ao lado.*



De acordo com os dados na figura, mostre que o rectângulo inscrito num semicírculo de raio r tem área máxima se $x = y = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ *(Neves, 12º V3, p.110)*

N12.17. *O rectângulo no circulo*



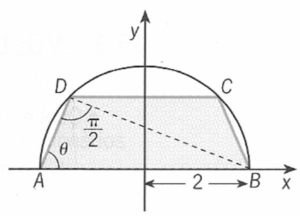
Com centro na origem do referencial representou-se uma circunferência de raio 1 e um rectângulo.

a. Escreva uma equação para a circunferência.

b. Escreva a área A do rectângulo [ABCD] em função de θ.

c. Qual é a área máxima do rectângulo [ABCD]? (Neves, 12º V3, p.111)

N12.18. *O trapézio no semicírculo*

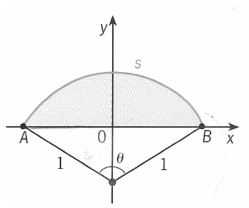


Observe a figura.

Num semicírculo de raio 2 inscreveu-se um trapézio [ABCD] isósceles e de base maior igual ao diâmetro.

Qual é a área máxima do trapézio [ABCD] (com aproximação às décimas)? (Neves, 12º V3, p.111)

N12.19. *A área máxima*



Na figura está representado um arco circular de comprimento s e raio 1.

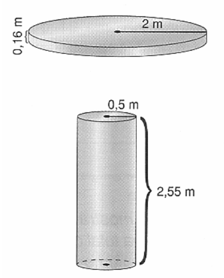
Os pontos A e B, que limitam o arco, pertencem ao eixo das abcissas.

Mostre que A é máxima quando θ = π. (Neves, 12º V3, p.111)

Problemas de Medida em Contexto Real

LG12.1. *Gasómetros de volume constante – preço mínimo.*

Função radical fraccionária

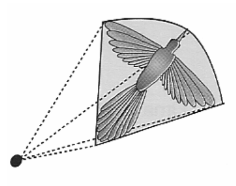


O custo de fabrico dum gasómetro cilíndrico com volume de 2 m^3 será mínimo quando a área total for mínima, porque se usa assim menos material, e essa área depende do raio das bases.

Qual é então o raio óptimo para que o custo seja mínimo? (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 231)

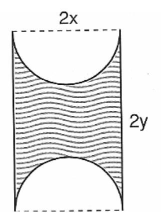
LG12.3. *"Papagaio" com área máxima.*

Função racional fraccionária



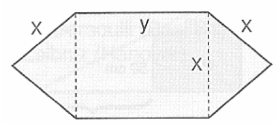
Uma fábrica de artigos de desporto produz "papagaios" de tecido muito fino esticado numa armação de alumínio com a forma de um sector circular e tendo 2 m de perímetro total.

Determina, em radianos, a amplitude do sector para que a resistência ao vento seja máxima (área máxima). (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 235)



LG12.9. *Vai construir-se um lago com a forma indicada na figura – um rectângulo ao qual se suprimem dois semicírculos. Para contornar o lago (a zona com água) dispõe-se de 100 m de gradeamento.*

Quais as dimensões do rectângulo inicial para que a área com água seja máxima? (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 235)



LG12.10. *A Direcção dum banco encomendou uma mesa com a forma desta figura.*

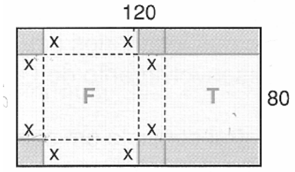
(Um rectângulo e dois triângulos equiláteros)

O perímetro da mesa tem de ter 10 m para dar lugar aos 10 membros da Direcção, mas a área tem de ser a maior possível.

Tendo em conta o perímetro, o fabricante resolveu tomar y = 3m e x = 1m, mas foi uma opção errada e teve de fazer outra mesa. Porquê?

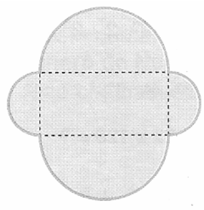
Quais são os valores correctos com aproximação ao cm?

Se x e y (metros) tivessem de ser números inteiros, a solução do fabricante teria sido aceite? (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 236)



LG12.11. *Num rectângulo de cartão fazem-se os cortes indicados a vermelho e dobra-se pelo ponteado de*

modo a obter uma caixa com tampa. Os rectângulos F (fundo) e T (tampa) são iguais. Calcula x de modo que o volume da caixa seja máximo. (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 247)

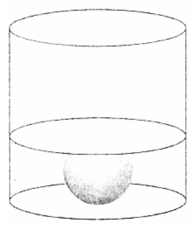


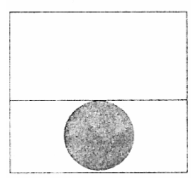
LG12.13. *Com um gradeamento de 100 m de comprimento contorna-se um jardim com a forma indicada (um rectângulo e 4 semicírculos):*

Determina as dimensões do rectângulo de modo que a área do jardim seja o maior possível (Designa por $2x$ e $2y$ as dimensões do rectângulo.) (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 247)

JAFB12.2. *Num cilindro de 30 cm de altura e em que a base é um círculo de 10 cm de raio, coloca-se uma esfera de raio r, em centímetros.*

A esfera está coberta de água como mostram as figuras.





a. O raio da esfera é 8 cm. Qual é, em centímetros cúbicos, o volume de água necessário para cobrir?

b. Exprima, em função de r, o volume de água $V(r)$ necessário para cobrir uma esfera de raio r.

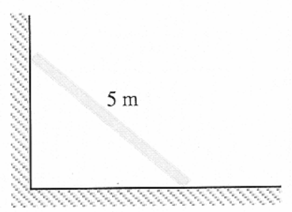
c. Qual é o domínio da função V?

d. Estude $V'(r)$ e o sentido de variação de V.

e. Qual é o raio da esfera correspondente a um volume máximo?

f. Haverá esferas de raios diferentes que necessitem da mesma quantidade de água para serem cobertas? Analise o gráfico de $y = V(r)$ e tire conclusões. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 207)

JAFB12.6. *Num canto de um terreno murado pretende-se delimitar com uma trave de madeira a maior área de terreno possível.*

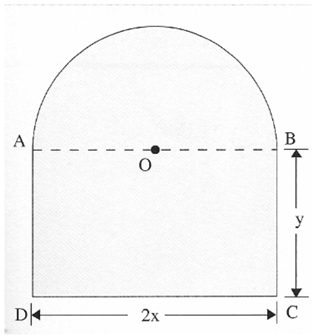


Sabendo que a trave mede 5 metros, em que posição deverá ser colocada? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 214)

JAFB12.8. *Que dimensões, com aproximação a 0,1 mm, deve ter uma caixa de conservas cilíndrica, com a capacidade de 1l, para que no seu fabrico se gaste o mínimo de material? (A espessura do material de que é feita não é de considerar).*

Compare a altura com o diâmetro da caixa. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p.216)

JAFB12.10. *Uma janela é formada por um rectângulo [ABCD] e por u m semicírculo de diâmetro [AB].*



Seja x o raio do semicírculo e y a distância $\overline{BC}$ *expressa em metros.*

O perímetro da janela é igual a 5 metros.

Pretende-se encontrar as dimensões da janela a fim de que a abertura tenha uma área máxima.

a. Exprima o perímetro da janela em função de x e de y.

b. Retire da expressão o valor de y em função de x.

c. Para que valores de x se tem y > 0?

d. Exprima a área da janela em função de x e de y.

e. Utilizando os resultados das questões anteriores, mostre que a área se pode escrever na forma

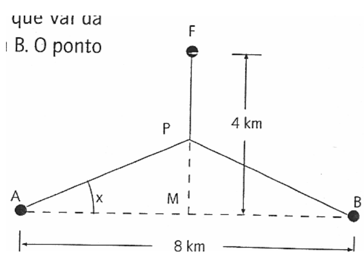
$$A(x) = 5x - \frac{4+\pi}{2}x^2$$

f. Deduza para que valores de x e de y a área da janela é máxima.

Encontre o valor exacto dessa área e em seguida o valor aproximado a menos de 10^{-2}

(Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 216)

JAFB12.13. *Duas povoações, A e B, distanciadas 8 km uma da outra, estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em F.*



Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura ao lado. A canalização é formada por três canos: um que vai da fonte F até ao ponto P, e dois que partem de P, um para A e outro para B. O ponto P está a igual distância de A e de B.

Tem-se ainda que:

- O ponto M, ponto médio de [AB], dista 4 km de F;

- x é a amplitude do ângulo PAM $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

a. Tomando para unidade o quilómetro, mostre que o comprimento total da canalização é dado por

$$g(x) = 4 + \frac{8 - 4\,sen\,x}{\cos x}$$

(Sugestão: comece por mostrar que $\overline{PA} = \frac{4}{\cos x}$ *e que* $\overline{FP} = 4 - 4\,tg\,x$ *)*

b. Calcule g(0) e interprete o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

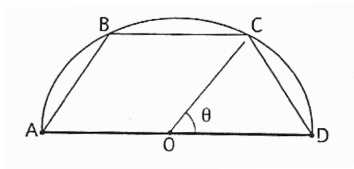
c. Determine o valor de x para o qual o comprimento da canalização é mínimo.

(Exame Nacional 1ª Chamada, 1998) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p. 115)

JAFB12.14. *A secção de um túnel é um semicírculo com 1 hm de raio.*

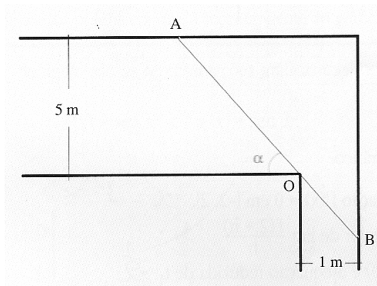
No interior do túnel há uma estrutura com a forma de um trapézio, como mostra a figura.

Qual é o valor de θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ *que torna máxima a área da secção da estrutura trapezoidal? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p.117)*



JAFB12.15. *Na figura está representado um corredor de um museu.*

Considere a recta que passa por O, sendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ *e que encontra as paredes em A e B.*



1. *Exprima* $\overline{OA}$ *em função de* α*.*
2. *Exprima* $\overline{OB}$ *em função de* α*.*
3. *a. Faça* $\overline{AB} = f(\alpha)$ *e mostre que* $f(\alpha) = \frac{5}{sen\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}$

   b. Determine a função derivada de f em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *e deduza recorrendo à calculadora um valor aproximado* α_0 *de* α *para o qual f admite extremo.*

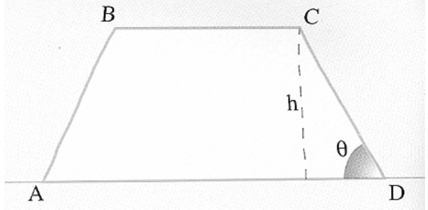
   c. Calcule o valor de $\overline{AB}$ *para* $\alpha = \alpha_0$*.*

   d. Pretende-se transportar naquele corredor um painel, em posição vertical.

   Quais as consequências práticas que se podem tirar do estudo feito nas alíneas anteriores? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p. 118)

JAFB12.16. *A pedido de um dos clientes, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima, com a forma de um trapézio, em que* $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2dm$.

Designando por θ *a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC,*



1. *Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior em função de* θ*;*

2. *Prove que a área A(θ) do trapézio é dada, em dm², por*

$$A(\theta) = 4sen\theta + 2sen2\theta$$

3. *Determine o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima e calcule essa área;*

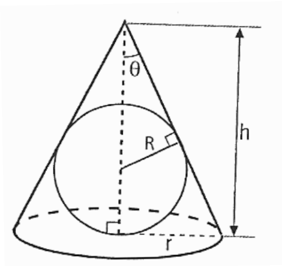
4. *Calcule* $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{A(\theta)}{\theta}$.

(Prova de Aferição, Época normal, 1994) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p. 122)

Obs: sen ($\alpha+\beta$) = sen α cos β + sen β cos α

sen (2 α) = 2 sen α cos α

JAFB12.18. *Um desenhador de peças de arte decorativas projecta pôr no mercado esferas de cobre dentro de cones de cristal transparentes.*

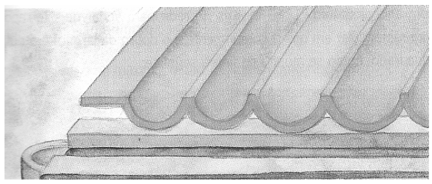


Cada esfera tem raio R e será comercializada num cone com dase de raio r e altura h (ver figura).

Muitos cones poderão ser fabricados tendo diferentes ângulos θ.

1. *Exprima o volume V de cada cone em função do ângulo θ.*
2. *Que valor deve ser escolhido para θ de modo que o cone a ser fabricado tenha volume mínimo? (Esta escolha minimiza a quantidade de cristal a gastar e dá o máximo destaque à esfera introduzida.) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p.13)*

N12.1. *A caleira de capacidade máxima*

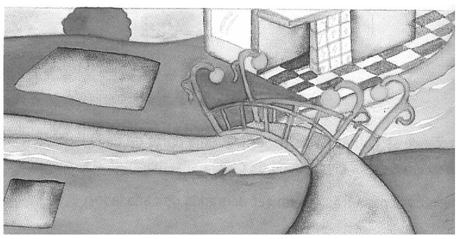


Uma folha rectangular de metal com 28 m de largura vai ser utilizada para construir uma caleira.

Pretende-se dobrar na perpendicular uma parte de cada lado da folha, de modo a que a capacidade da caleira seja máxima.

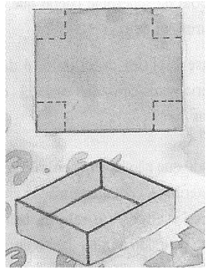
Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado? (Neves, 12º V2, p. 215)

N12.2. *As vedações*

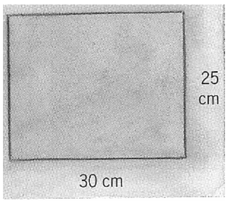


Um agricultor tem 1680 metros de rede para vedar dois terrenos: um rectangular em que o comprimento é o dobro da largura e o outro quadrado, como mostra a figura seguinte.

Determine as dimensões dos terrenos de *modo a maximizar a área dos dois espaços. (Neves, 12º V2, p. 216)*



N12.3. *Uma caixa aberta com a base rectangular vai ser construída de uma folha de cartolina com 25 cm por 30 cm.*



Na folha serão cortados quatro cantos com a forma de um quadrado.

Determine, com aproximação às centésimas, as dimensões dos cantos a cortar de modo a obter-se uma caixa de volume máximo. (Neves, 12º V2, p. 215)

N12.7. *Um depósito de água aberto tem a forma de um prisma rectangular com duas faces laterais quadradas.*

A área total do depósito (Sem tampa) é de 54 m^2.

Seja x a altura do tanque:

a. Mostre que o volume, V m^3, do tanque é dado por:

$$V = 18x - \frac{2}{3}x^3$$

b. Determine s de modo a que o volume seja máximo. (Neves, 12º V2, p. 222)

N12.9. *O tanque de superfície mínima*

Um tanque com a forma de um cilindro, aberto na parte superior, tem de altura 4 metros e raio r m.

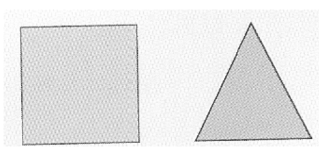
O volume do tanque é 1 m^3.

a. Mostre que $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$

b. Sendo S a sua área total interior, mostre que, em m^2, $S = \dfrac{2}{r} + \pi r^2$.

c. Determine o valor de r de modo que a área da superfície interior, S, seja a menor possível. (Neves, 12º V2, p. 231)

N12.10. *O triângulo e o quadrado*



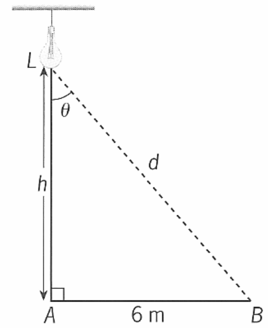
Com um arame de 20 m de comprimento fez-se um quadrado e um triângulo equilátero.

Pretende-se minimizar as áreas das duas figuras.

Escreva uma curta composição onde explique como deveria ser partido o arame. (Neves, 12º V2, p. 231)

N12.11. *Maximizar a iluminação.*

Observe a figura.



No ponto L está uma lâmpada, situada à distância h do solo.

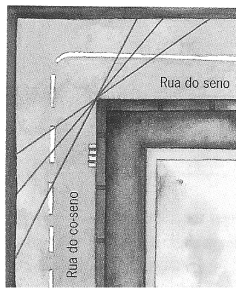
O ponto B, no solo, dista 6 m do ponto A.

Sabe-se que a intensidade i da iluminação no ponto B é dada por $i(\theta) = k \times \dfrac{\cos\theta}{d^2}$ *(i é directamente proporcional ao* $\cos\theta$ *e inversamente proporcional ao quadrado da distância, d, da lâmpada ao ponto B.)*

Calcule a que distância deve estar a lâmpada do solo de modo a que seja máxima a iluminação no ponto B.

Na figura $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ *(Neves, 12º V3, p.97)*

N12.12. *O comprimento do autocarro.*



Duas ruas formam um ângulo de 90º.

Um autocarro circula numa das ruas e pretende ir para a outra rua.

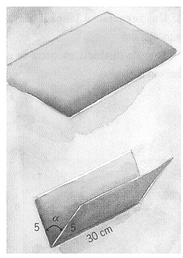
Uma das ruas tem 4 m de largura e a outra tem 6 m.

Será que o autocarro dá a volta?

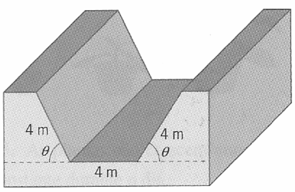
Na resolução do problema não considere a largura do autocarro.

Efectue os cálculos necessários e use as derivadas e a calculadora gráfica na sua resolução. (Neves, 12º V3, p.98)

N12.13. *Com uma folha de metal de 30 cm de comprimento e 10 cm de largura fez-se uma caleira como se mostra na figura.*



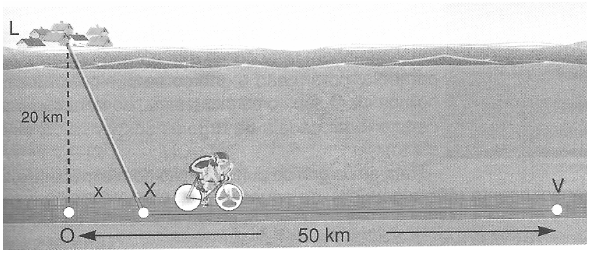
Determine α *de modo a maximizar a quantidade de água que a caleira pode comportar. (Neves, 12º V3, p.95)*



N12.14. *A secção de um canal de drenagem tem a forma de um trapézio, como se mostra na figura;*

De acordo com os dados da figura, calcule a amplitude de θ *de modo a que o caudal da água que o canal possa suportar seja máximo. (Neves, 12º V3, p.100)*

Problemas de Física

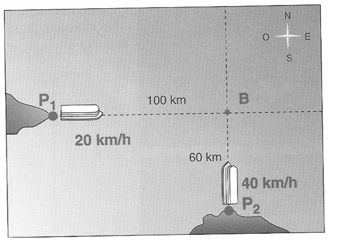


LG12.2. *O trajecto mais rápido pode não ser o mais curto.*

Função com radicais

Um ciclista mora na localidade L que dista 20 km da estrada alcatroada; O é o ponto da estrada mais próximo de L.

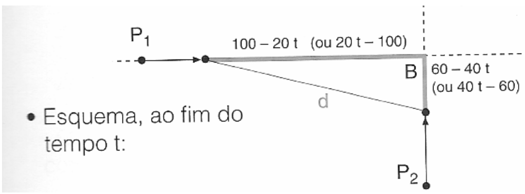
Diariamente tem de se deslocar à vila V, a 50 km de O. Na estrada desloca-se a 25 km/h, mas ao atravessar o campo só consegue andar a 15 km/h. Determina o ponto X onde deve entrar na estrada de modo a fazer o percurso no menor tempo possível. Supõe que os dois trajectos a cores são rectilíneos. (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 233)



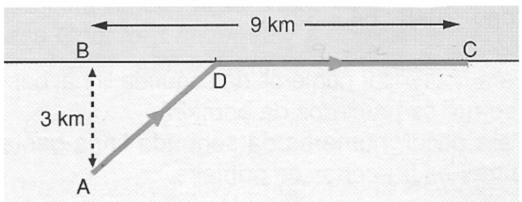
LG12.4. *Os "ferry-boats" com rotas cruzadas*

Função com radicais

Todas as manhãs, à mesma hora, sai um barco do ponto P_1 para leste, a 20 km/h e outro do ponto P_2 para norte, a 40 km/h. A bóia B, no cruzamento das rotas, dista 100 km de P_1 e 60 km de P_2.

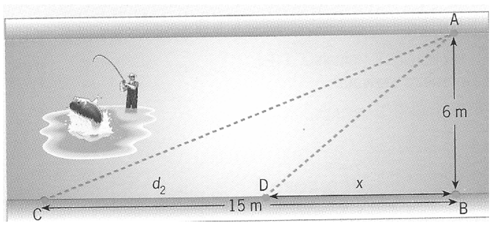


Determina ao fim de quanto tempo a distância entre os barcos é mínima. (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 236)



LG12.14 *Uma pessoa está num barco A a 3 km do ponto B da praia, mais próximo de A, e tem de ir ao outro ponto C da praia a 9 km de B.*

Se o barco se desloca à velocidade de 6 km/h e o tripulante pode correr à velocidade de 10 km/h como deve este proceder para chegar a C no mais curto tempo possível? (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 247)



N12.6. *Um rio tem 6 metros de largura.*

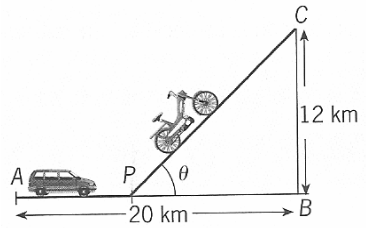
Um pescador encontra-se no local A, numa margem do rio, e pretende ir para C, na outra margem, demorando o menor tempo possível.

A distância de C ao local B, oposto a A, é de 15 m.

A velocidade do pescador na água é de 20 km/h e em terra é de 60 km/h.

Como deve proceder o pescador? (Neves, 12º V2, p. 220)

N12.15. *Minimizar o tempo: Observe a figura.*



Para ir de A a C o Vítor terá de usar dois meios de transporte: Carro de A a um ponto P de [AB] e de bicicleta de P a C.

De carro a velocidade média é de 60 km/h e de bicicleta é de 10 km/h.

O Vítor quer minimizar o tempo necessário para ir de A a C.

Quantos km deve o Vítor andar de carro? (Neves, 12º V3, p.110)

Problemas de Economia

N12.4. *Uma fábrica de frascos destinados a produtos de conserva pretende o seguinte:*

- *Construir uma embalagem cilíndrica com a capacidade de 48 π cm^3;*
- *A base inferior do cilindro é do mesmo material da superfície lateral que custa 2 euros por m^2;*
- *A base superior do cilindro é de um material mais raro, que custa 3 euros por m^2.*

Supondo que não haverá perdas de material determine, com aproximação às centésimas, a altura e o raio da base do cilindro de modo a minimizar o custo do material gasto. (Neves, 12º V2, p. 216)

C. Análise do período

Começando pela análise do programa oficial, constatamos que os problemas de optimização fazem parte do programa de 11º e de 12º ano. Estes estão inseridos no capítulo sobre Cálculo Diferencial. Também no 10º ano os problemas de optimização são abordados, mas no capítulo destinado às Funções e Gráficos. No 10º ano os problemas são abordados num contexto de problemas de máximos e mínimos; no 11º ano como aplicação das derivadas e no 12º são referidos como problemas de optimização. Nesta reforma o uso da calculadora gráfica já se torna obrigatório e os programas não fazem qualquer referência aos manuais escolares a utilizar.

O primeiro aspecto a salientar para este período é o facto de o número de problemas de optimização encontrados ser significativamente superior ao número de problemas encontrados nos períodos anteriores. Neste período encontrámos cerca de cento e dezanove problemas, enquanto que no período anterior foram apenas cinquenta e cinco, ou seja, temos neste período mais do dobro do que no período anterior. Acrescentamos também que, como os manuais analisados neste período são dos mesmos autores dos manuais do período anterior, muitos dos problemas encontrados neste período são os mesmos que tinham sido publicados no manual da reforma anterior. Assim, destes cento e dezanove problemas, cinquenta e um surgiram já nos manuais do período anterior. Apenas quatro problemas do período anterior não estão presentes nos manuais deste período.

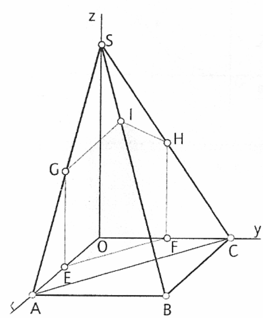
O aumento mais significativo foi no número de problemas do 12º ano que passou de cinco referentes ao período anterior para cinquenta e um neste período. Este aumento está relacionado com o facto de, neste período, encontrámos problemas de vários tipos enquanto que no período anterior apenas contemplavam problemas relacionados com Trigonometria. Também os problemas dos manuais do 10º ano sofreram um aumento significativo, pois passaram de três no período anterior para dezanove neste período. Quanto ao 11º ano, o aumento foi irrelevante, uma vez que passámos de quarenta e sete problemas para quarenta e nove problemas neste período. O número de problemas encontrados distribui-se de forma muito semelhante pelos três autores. Nos manuais de Brito e outros **(JAFB)** existem trinta e quatro problemas; nos manuais de Lima e Gomes **(LG)** quarenta e quatro problemas e nos manuais de Neves **(N)** quarenta e um problemas.

Outro aspecto a salientar é o facto de, neste período, o uso das calculadoras gráficas pelos alunos ser obrigatório. Por esse motivo, é possível, por parte dos alunos, resolver os problemas de optimização, graficamente, sem que seja necessário o auxílio da derivada para o cálculo dos extremos. Por isso, a forma de resolução dos problemas de optimização sofre algumas alterações relativamente aos períodos anteriores.

Olhemos agora para as características dos problemas.

Relativamente ao tipo de problema constatámos que a maioria dos problemas surge sob a forma de exercício (oitenta e oito); vinte e quatro sob a forma de exemplo (JAFB10.2, N10.2, N10.3, JAFB11.1, JAFB11.2, JAFB11.3, JAFB11.4, LG11.1, LG11.2, LG11.3, LG11.4, N11.1, N11.2, N11.5, JAFB12.1, JAFB12.12, LG12.1, LG12.2, LG12.3, LG12.4, N12.1, N12.2, N12.11, N12.12); três sob a forma de relatório (JAFB10.1, LG10.1, N12.10); dois sob a forma de exemplo resolvido (N12.6, N12.7) e dois sob a forma de demonstração (JAFB12.5, N12.16). Os manuais do 11º e do 12º ano mostram, primeiro, alguns exemplos ou exercícios resolvidos e, posteriormente, os outros exercícios. Nos manuais do 10º ano isso não acontece, uma vez que o manual de Jorge e outros assim como o manual de Lima e Gomes apresentam o primeiro problema de optimização sob a forma de relatório e o manual de Neves expõe o primeiro problema de optimização sob a forma de exercício. É ainda de referir que, relativamente aos manuais do 10º ano, em que surgem os primeiros problemas de optimização, o manual de Jorge e outros apenas apresenta um exemplo (JAFB10.2), o manual de Lima e Gomes não tem nenhum exemplo ou exercício resolvido e o manual de Neves tem dois exemplos. Examinemos um dos problemas que surge sob a forma de demonstração:

> " ***(JAFB12.5)*** *Seja* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *um referencial o.n. e A, B, C, S definidos por*
>
> $$\overrightarrow{OA} = \vec{i}\,; \overrightarrow{OC} = \vec{j}\,; \overrightarrow{AB} = \vec{j}\,; \overrightarrow{OS} = \vec{k}$$
>
> *Seja a um número real do intervalo]0, 1[.*
>
> *Pretende-se determinar a área máxima da secção definida pela intersecção do plano de equação x + y = a com a pirâmide [SOABC].*



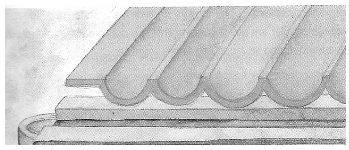
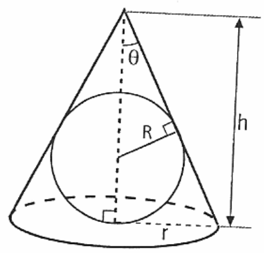
> 1. *Designemos por E, F, H, I e G os pontos de intersecção do plano com as arestas da pirâmide.*
>
>   *Prove que [GEFH] é um rectângulo.*
> 2. *Determine as coordenadas de I e calcule a área do triângulo [GHI].*
> 3. *Seja f a função, área da secção, definida em]0, 1[por* $f(a) = a\sqrt{2}\,\frac{(4-3a)}{4}$.
>
>   *Estude a variação de f. Para que valor de a é esta área máxima?*
> 4. *Mostre que o plano que determina a área máxima é paralelo a AC e OS e passa pelo baricentro do triângulo [OAC]."*

Infere-se que na última alínea deste problema é pedido para mostrar que a área é máxima quando o plano é paralelo a duas rectas e passa num determinado ponto.

Relativamente ao contexto em que os problemas se enquadram verifica-se que a maioria dos problemas são Geométricos/de Medida, sendo cinquenta e seis de Contexto Real de Medida, trinta e cinco de Geometria Métrica e quinze são de Geometria Analítica. Detectámos depois sete problemas de Física (LG11.16, LG11.23, LG12.2, LG12.4, LG12.14, N12.6, N12.15), quatro de Aritmética (LG11.8.a, LG11.8.b, N11.6.a. N11.6.b) e dois de Economia (N11.13, N12.4). Observámos ainda que os manuais de Jorge e outros não têm problemas de Física, Aritmética ou Economia, indicando apenas problemas Geométricos. No entanto e apesar de este manual apresentar apenas problemas Geométricos, estes são muito diversificados. Referimos ainda que apenas o manual de Neves nos mostra problemas de Economia.

Passando agora para o que se pretende optimizar, vemos que na maioria dos problemas se pretende optimizar uma área (setenta); em vinte e três um volume; em dez uma distância; em cinco um perímetro; em cinco o tempo; em três o produto; em dois o custo e num a soma.

Quanto aos esquemas ou figuras auxiliares, vemos que na maioria dos problemas há uma figura com dados (setenta e um); em vinte e cinco uma figura simples e em vinte e três problemas não encontramos esquemas ou figuras auxiliares. Examinemos a seguir um exemplo de cada um destes problemas:

> “ ***(JAFB12.8)*** *Que dimensões, com aproximação a 0,1 mm, deve ter uma caixa de conservas cilíndrica, com a capacidade de 1l, para que no seu fabrico se gaste o mínimo de material? (A espessura do material de que é feita não é de considerar).*
>
> *Compare a altura com o diâmetro da caixa.”*
>
> “ ***(N12.1)*** *A caleira de capacidade máxima*
>
> 
>
> *Uma folha rectangular de metal com 28 m de largura vai ser utilizada para construir uma caleira.*
>
> *Pretende-se dobrar na perpendicular uma parte de cada lado da folha, de modo a que a capacidade da caleira seja máxima.*
>
> *Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado?”*
>
> “ ***(JAFB12.18)*** *Um desenhador de peças de arte decorativas projecta pôr no mercado esferas de cobre dentro de cones de cristal transparentes.*
>
> 
>
>
> *Cada esfera tem raio R e será comercializada num cone com dase de raio r e altura h (ver figura).*
>
> *Muitos cones poderão ser fabricados tendo diferentes ângulos θ.*
>
> 1. *Exprima o volume V de cada cone em função do ângulo θ.*
> 2. *Que valor deve ser escolhido para θ de modo que o cone a ser fabricado tenha volume mínimo? (Esta escolha minimiza a quantidade de cristal a gastar e dá o máximo destaque à esfera introduzida.)”*

Nestes problemas as figuras dão um apoio importante, auxiliando no raciocínio da resolução do problema. No primeiro problema não é dado qualquer apoio, no segundo é apresentada a ilustração da figura e no último, para além da ilustração encontramos alguns dados na figura.

Passando agora para o tipo de dados do enunciado, reparamos que a maioria dos problemas apresenta dados numéricos (cento e catorze), sendo apenas cinco os problemas com dados genéricos (JAFB10.3, LG10.3, JAFB12.11, JAFB12.18, N12.6). Portanto, os manuais do 11° ano não contêm problemas com dados genéricos e tanto os manuais de Lima e Gomes, como os manuais de Neves, apenas referem um problema com dados genéricos.

Em relação ao enunciado, apuramos que oitenta problemas apresentam um enunciado simples e apenas trinta e nove uma resolução encaminhada. Nos problemas dos manuais do 10º ano apenas três problemas apresentam um enunciado simples (JAFB10.3, N10.2 e N10.3). Nos problemas dos manuais do 11° ano apenas cinco apresentam uma resolução encaminhada (LG11.12, LG11.20, LG11.21, N11.7, N11.9). Por fim, nos manuais do 12º ano o número de problemas com enunciado simples é ligeiramente superior ao número de problemas com resolução encaminhada. Analisemos o exemplo a seguir:

> *“* ***(N12.9)*** *O tanque de superfície mínima*
>
> *Um tanque com a forma de um cilindro, aberto na parte superior, tem de altura 4 metros e raio r m.*
>
> *O volume do tanque é 1 m*^{3}*.*
>
> *a. Mostre que* $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$
>
> *b. Sendo S a sua área total interior, mostre que, em m*^{2}*,* $S = \dfrac{2}{r} + \pi r^2$
>
> *c. Determine o valor de r de modo que a área da superfície interior, S, seja a menor possível.”*

Vemos, neste problema, que as duas alíneas que precedem a questão de optimização são muito importantes na medida em que, a primeira auxilia na determinação de uma das variáveis em função da outra variável e a segunda alínea auxilia na determinação da função que posteriormente se pretende optimizar.

Indo agora para a função auxiliar, esta surge implicitamente na maioria dos problemas (oitenta e cinco) e surge explicitamente em apenas trinta e quatro. A função auxiliar aparece explicitamente em problemas geométricos em que, por exemplo, é dado o valor da área, perímetro ou volume de uma figura, ou em problemas aritméticos em que, por exemplo, é dado o valor da soma ou produto entre dois números. Surge implicitamente em problemas em que é necessário aplicar o Teorema de Pitágoras, noção de distância, semelhança de figuras, expressão de uma função, funções trigonométricas, noção de velocidade, ou seja, problemas em que não é imediato, a partir dos dados, a forma de obter uma variável a partir da outra.

Tratemos agora das noções aplicadas na resolução dos problemas. Uma vez que predominam os problemas geométricos, também as noções mais aplicadas são as geométricas. A fórmula de cálculo do perímetro é a noção mais aplicada, surgindo em vinte e oito problemas. Normalmente esta noção aplica-se em problemas em que é dado o perímetro de uma figura que nos auxilia a determinar a medida de um lado em função dos outros lados. O Teorema de Pitágoras aplica-se em vinte problemas, normalmente naqueles em que temos triângulos rectângulos, ou figuras inscritas. A fórmula da distância surge em vinte problemas e as funções trigonométricas surgem em dezassete problemas. As outras noções encontram-se em número mais reduzido; a semelhança de figuras surge em onze problemas; a fórmula da área surge em oito; a fórmula do volume surge em nove e a as magnitudes físicas em sete. Também a noção de soma surge em sete problemas e, por fim, a noção de função surge em três (função quadrática e equação da elipse). É de salientar que o número de problemas em que se utilizam as fórmulas trigonométricas sofreu um grande aumento. Os problemas dos manuais do 10º ano apenas aplicam quatro noções: Teorema de Pitágoras, noção de distância, fórmula do perímetro e formula da área. Existem oito problemas em que é utilizada mais do que uma noção, como por exemplo o Teorema de Pitágoras e a semelhança de figuras.

Quanto à estratégia para a resolução, apenas encontramos um problema histórico (JAFB10.1) e seis que saíram em exame (JAFB10.6, LG10.3, JAFB12.7, JAFB12.13, JAFB12.16, JAFB12.17). Dos restantes, a maioria já saiu em manuais anteriores (setenta e nove) e trinta e três surgem neste manual pela primeira vez.

As funções utilizadas são maioritariamente as polinomiais (setenta e três problemas). As restantes ocorrem em número semelhante: dezassete são trigonométricas, dezasseis são racionais e treze são irracionais. Nos manuais do 10º ano apenas encontramos um problema com uma função irracional (JAFB10.9), sendo todos os restantes com funções polinomiais e nos manuais do 11º ano apenas existe um em que se aplicam as funções trigonométricas (LG11.18).

Com respeito ao esquema de cálculo, utilizado nos vinte e seis problemas que apresentam resolução, verificamos que na maioria dos casos (quinze problemas) o extremo é determinado a partir do sinal da derivada e em quatro é calculado o vértice da parábola (JAFB10.2, N10.2, N10.3, JAFB12.1). Em três faz-se o cálculo apenas dos zeros da derivada (JAFB11.4, N12.11, N12.12), em três o estudo do sinal da segunda derivada

(N12.1, N12.2, N12.7), em cinco utiliza-se a calculadora gráfica (JAFB10.1, JAFB11.4, N12.1, N12.7, N12.12) e num problema a resolução é feita de outra forma (JAFB10.1), sendo neste caso, algebricamente e geometricamente. Existem cinco problemas que apresentam mais do que uma resolução (JAFB10.1, JAFB11.4, N12.1, N12.7, N12.12).

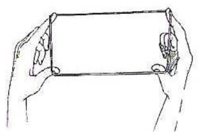
Olhando para a resolução dos problemas do 10º ano, verificámos que em quase todos se faz apenas o cálculo do vértice da parábola, não se utilizando ainda as potencialidades da calculadora gráfica para calcular os extremos. Apenas na resolução do problema JAFB10.1 não se faz o cálculo do vértice da parábola. Nos problemas do 11º ano apenas num se faz apenas o cálculo dos zeros da derivada e nos restantes calculam-se os zeros da derivada e faz-se o estudo do seu sinal. Por fim, nos problemas dos manuais do 12º ano, reparámos que estes apresentam uma maior diversidade de processos de resolução, sendo que os problemas em que indicam o estudo do sinal da segunda derivada e os problemas em que se utiliza a calculadora gráfica, para calcular os extremos, apenas surgem neste ano.

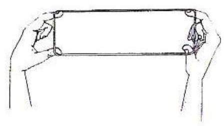
Em relação aos gráficos, figuras ou esquemas auxiliares não existem problemas que não apresentem um destes auxiliares. Na maioria dos problemas é encontrámos o quadro de monotonia (quinze problemas); em treze o gráfico da função e só num a figura (JAFB11.4). Verificamos ainda que em todos os problemas em que o extremo é calculado, fazendo o estudo do sinal da derivada, é apresentado o quadro de monotonia.

Apreciemos alguns exemplos de resoluções apresentadas nos manuais e de auxiliares à resolução:

" ***(JAFB10.1)*** *Problema de Euclides*

De todos os rectângulos com o mesmo perímetro, qual o que tem área máxima?

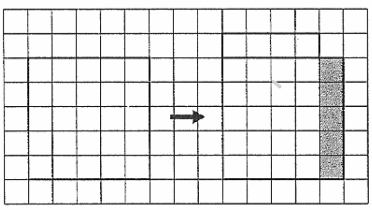




I. Geometricamente

A observação de diversos rectângulos, todos eles com o mesmo perímetro, sugere-nos que o quadrado é o que tem a maior área.

A demonstração geométrica é muito simples e sugestiva:



Partindo de um quadrado, constrói-se um rectângulo, que tem uma dimensão um pouco maior e a outra, outro tanto menor do que o lado do quadrado.

A barra roxa é maior que a barra azul, logo a área do quadrado inicial é maior do que a do rectângulo.

II. Algebricamente

Se considerarmos um quadrado com 10 cm de lado e diminuirmos sucessivamente uma unidade a um dos lados acrescentando-a ao outro, obtemos áreas progressivamente menores:

$10 \times 10 = 100$
$11 \times 9 = 99$ .... $(10+1)(10-1) = 99$
$12 \times 8 = 96$ .... $(10+2)(10-2) = 96$
$13 \times 7 = 91$ .... $(10+3)(10-3) = 91$
$14 \times 6 = 84$ .... $(10+4)(10-4) = 84$
$15 \times 5 = 75$ .... $(10+5)(10-5) = 75$

Constata-se que "10 + *" vezes "10 − *" é menor que 10×10 e que, quanto maior for *, menor é o valor do produto.

O enunciado algébrico correspondente ao resultado estabelecido geometricamente por Euclides é, então, o seguinte:

Se $p + q$ for constante, então $p \times q$ é máximo quando $p = q$.

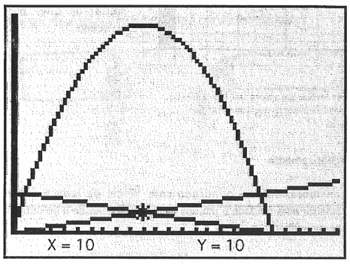
Todos os rectângulos acima considerados têm o mesmo perímetro (40 cm); o de maior área é precisamente o quadrado com 10 cm de lado.

III. Recorrendo à calculadora gráfica

Consideremos ainda a família dos rectângulos cujo comprimento e largura somam 20 unidades.
Se considerarmos que a largura vale **x**, então o comprimento é igual a **20 − x**.

Introduzindo na calculadora as funções
$y_1 = x$
$y_2 = 20 - x$
$y_3 = y_1 \times y_2$

obtemos, depois de definir adequadamente o rectângulo de visualização os seguintes gráficos:

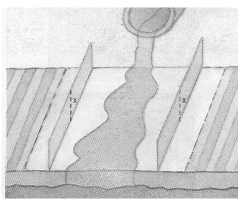


A linha curva – uma **parábola** – corresponde à representação gráfica da função definida por **y = x(20 − x)** ou seja, a função que representa a área do rectângulo de largura **x** e comprimento **20 − x**.

A leitura das coordenadas do **vértice** da parábola – ponto correspondente ao valor máximo da função – conduz-nos a:
$x = 10$ e $y = 100$ (este último é o valor da área máxima).

Verificámos que este problema apresenta uma resolução interessante uma vez que é feita de três formas diferentes: Geometricamente, algebricamente e utilizando a calculadora gráfica.

" ***(N10.3)*** *Tem-se uma "folha" de metal com 50 cm de largura.*



Pretende-se fazer uma peça para conduzir água de uma conduta de águas pluviais, como mostra a figura, dobrando de cada lado, na vertical, uma parte da folha com a mesma altura x.

Para que a quantidade de água transportada seja máxima, qual deve ser o valor de x?

Para que a quantidade de água transportada seja máxima deve-se considerar máxima a secção feita por um plano perpendicular à base.

$A = (50 - 2x) \cdot x$

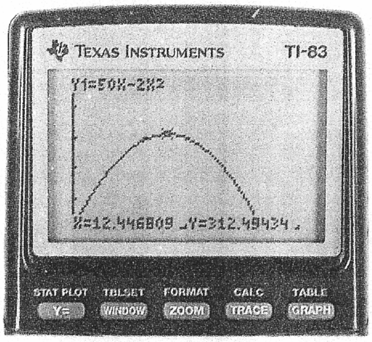
$A = 50x - 2x^2$

$A = -2x^2 + 50x$

$A = -2\left(x^2 + 25x + \frac{625}{4}\right) + \frac{625}{2}$

$A = -2\left(x + \frac{25}{2}\right)^2 + \frac{625}{2}$

O vértice da parábola é $\left(\frac{25}{2}, \frac{625}{2}\right)$.



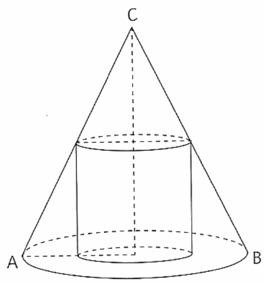
A área máxima consegue-se para $x = 12{,}5$ cm e é $312{,}5$ cm^2.

Confirme-se os cálculos usando uma calculadora gráfica.

Na resolução deste problema a autora determina o vértice da parábola, concluindo, de imediato, que esse é o valor para o qual a área é máxima.

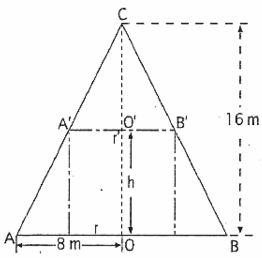
" ***(JAFB11.4)*** *Num circo, uma lâmpada emite um cone de luz de altura 16m e raio da base 8m. Para um trabalho dos trapezistas, é preciso saber que espaço é utilizado dentro desse cone de luz. Chegou-se à conclusão que interessaria o espaço limitado pelo cilindro interior ao cone de volume máximo.*

Conhecer a altura e o raio da base desse cilindro é essencial para o trabalho dos trapezistas.



Conhecer a altura e o raio da base desse cilindro é essencial para o trabalho dos trapezistas.

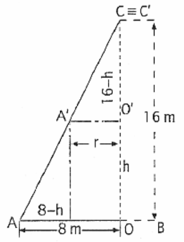
Analisemos o que ficou registado da resolução do Tiago e da Rita.
R – *Por onde começar?*
T – Colocando os dados: 16 m de altura, 8 m de raio da base do cone e as incógnitas, h e r, na figura.
R – Observando a figura, parece que basta raciocinar num esboço dum corte plano, pois o que está em jogo são as alturas e os raios dos dois sólidos.



Esbocemos e usemos variáveis.
T – h, altura do cilindro, e **r**, raio da base do cilindro, estão relacionados com a altura do cone e o seu raio por meio de uma relação de semelhança entre o triângulo A'O'C' e AOC, dado que são triângulos de lados respectivamente paralelos, isto é, de ângulos respectivamente iguais. Então:

$\frac{r}{8} = \frac{16-h}{16}$, donde podemos exprimir r em função de **h** (altura)

$$r = \frac{8\,(16-h)}{16} = \frac{16-h}{2} \qquad (1)$$



R – Mas há uma condição para o volume: é a de ele ser máximo.

O volume é a área da base (πr^2) vezes a altura (h), então $V = \pi \left(\frac{16-h}{2}\right)^2 . h$
V é uma função de h

T – Para sabermos para que valor de h é máximo...

Vou já meter na calculadora $y_1 = \left(\frac{16-x}{2}\right)^2 . x$ e depois pesquiso com o TRACE ou a TABLE .

R – Está bem, mas não pensas no rectângulo de visualização?
T – Vamos lá ver qual é o que convém.

O raio só pode variar de 0 a 8 m e h (altura) só pode variar de 0 a 16.
Então, para o eixo das abcissas, temos que ver pelo menos o domínio, que é]0, 16[(vê como pode variar a altura).

R – E, para o eixo das ordenadas, o mínimo volume que nos interessa é zero, e o máximo é, quando muito, o volume do cone, que toma o valor de um terço da área da base vezes a altura.

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 64 \times 16 \simeq 1072$$

... um bom rectângulo de visualização pode ser [–1, 20] × [–1, 1000]

T – Já meti a função $y_1 = \pi \left(\frac{16-x}{2}\right)^2 . x$

Também já teclei GRAPH e depois TRACE
Para h, ou seja x = 5,32, vem V, isto é y_1 = 476,5
Com um ZOOM IN obtenho h ≃ 5,42 e V ≃ 475,2
Com dois ZOOM IN obtenho h ≃ 5,32 e V ≃ 476,54

Com três ZOOM IN obtenho h ≃ 5,33 e V ≃ 476,59

A altura é de 533 cm, a menos de 1 cm, e o volume é 476,6, a menos de uma décima de m^3.

R – Mas acho que podemos experimentar o processo analítico.
Eu acho que se quero alguma coisa com variação, como o máximo de uma função, penso na derivada. A derivada não é quem "traduz" a variação duma função?
T – Espera, tens razão, e se quero o máximo, quero um extremo, e se há derivada aí, ela é zero!
R – Há derivada porque a função é polinomial!
T – É?
R – Olha, desenvolvendo o quadrado de

$$y = \pi \left(\frac{(16-x)}{2}\right)^2 . x \quad \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}(256 - 32\,x + x^2)\,x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}(256\,x - 32\,x^2 + x^3)$$

Vês? É uma função de 3.º grau e, queres ver?...

T – Agora também já vejo: $V = 256\,\frac{\pi}{4}\,h - 32\,\frac{\pi}{4}\,h^2 + \frac{\pi}{4}\,h^3$

E então a derivada é

$$V' = \frac{\pi}{4}(256 - 64\,h + 3\,h^2)$$

E agora, igualando a zero e resolvendo

$h = \frac{64 \pm \sqrt{4096 - 4 \times 3 \times 256}}{6}$, obtemos $h = \frac{16}{3} \vee h = 16.$

R – Mas obtivemos dois valores!
T – Pois, mas temos que ver o domínio!
R – Tens razão, 16 não pertence ao domínio, pois um cilindro com essa altura no interior do cone de 16 m de altura *não teria raio*, isto é, não existe! $\frac{16}{3}$ é o valor exacto e a aproximação às décimas é 5,3 m, obtido pela calculadora.
T – Voltemos a ler, para saber o que fazer.
R – Acho que só falta responder ao problema, não é?

T – Falta calcular o raio da base.

Calculando **r** em (1) vem:

$$r = \frac{16 - \frac{16}{3}}{2} = \frac{16}{3} \simeq 5{,}3$$

T e R – E agora a resposta: *O espaço que interessa ao trapezista é o interior dum cilindro cuja altura é 5,3 m e a base tem de raio 5,3 m.*

Arranje um parceiro, relembre as sugestões dadas sobre a resolução de problemas e discuta com ele o texto proposto pelo Tiago e pela Rita.

Esta é, sem dúvida, uma resolução interessante, uma vez que as autoras apresentam a forma de resolução do problema feita por dois alunos, explicando cada passo, detalhadamente. Essa resolução é feita de duas formas: primeiro recorrendo à calculadora gráfica e depois calculando os zeros da derivada.

*“ **(N12.7)** Um depósito de água aberto tem a forma de um prisma rectangular com duas faces laterais quadradas. A área total do depósito (Sem tampa) é de 54 m².*

Seja x a altura do tanque:

c. *Mostre que o volume, V m³, do tanque é dado por:*

$$V = 18x - \frac{2}{3}x^3$$

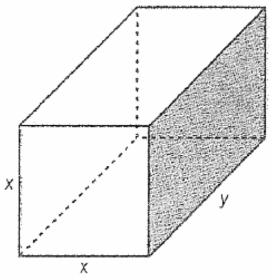
d. *Determine s de modo a que o volume seja máximo.*

$A_t = 3xy + 2x^2$

$54 = 3xy + 2x^2 \iff y = \dfrac{54 - 2x^2}{3x}$

$V = x^2\, y$

$V = x^2 \left(\dfrac{54 - 2x^2}{3x}\right); \quad V = 18x - \dfrac{2}{3}x^3$



O volume é dado, em m^3, por:

$V = 18x - \dfrac{2}{3}x^3$

$V(x) = 18x - \dfrac{2}{3}x^3; \qquad V'(x) = 18 - 2x^2$

$V'(x) = 0 \iff 18 - 2x^2 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = -3 \lor x = 3.$

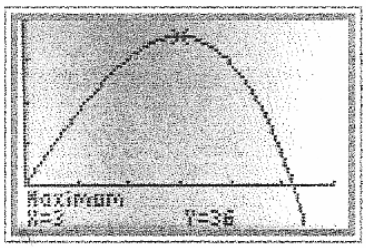
A solução $x = -3$ não serve o problema.

Considere-se: $x = 3; \quad v''(x) = -4x$

$v''(18) = -4 \times 3 < 0$

O volume é máximo quando $x = 3$ m.

Confirme-se com a calculadora gráfica:



Nesta resolução a autora calcula os zeros da derivada e o sinal destes na segunda derivada.

Observámos então que em três das resoluções se detecta a preocupação por parte dos autores, de fazer a confirmação dos resultados obtidos, através da calculadora gráfica.

Por fim, quanto ao valor pedido, verificamos que este ocorre, na maioria das vezes, de forma explícita (oitenta e um problemas), surgindo de forma implícita em trinta e cinco. Nos problemas do 10º ano apenas em três o valor pedido aparece de forma implícita.

Assim sendo, fica este período caracterizado por problemas enunciados sob a forma de exercício. Há essencialmente problemas geométricos, em contexto real de medida, pretendendo-se optimizar, em grande parte dos casos, uma área. Existe um decréscimo de problemas com figuras com dados. O enunciado é simples, na maioria dos problemas e com a função auxiliar a surgir implicitamente. Quanto às noções utilizadas, verificamos que as mais aplicadas são o teorema de Pitágoras, a noção de distância e a fórmula do perímetro. Grande parte dos problemas já tinha surgido em manuais anteriores e a função polinomial é a mais utilizada.

Em relação ao esquema de cálculo dos extremos, tal como no período anterior, na maioria dos casos, são calculados os zeros da derivada e é feito o estudo do sinal, através do quadro de monotonia. No entanto, um grande número de resoluções apresenta o gráfico obtido através da calculadora gráfica.

Os dados obtidos na análise dos problemas de optimização deste período estão sintetizados na tabela a seguir.

3.5.2. A REFORMA DE SANTOS SILVA (2001)

A. Análise do programa oficial

Em 22 de Fevereiro de 2001, sendo a pasta da educação ocupada por Augusto Ernesto Santos Silva, é homologado o novo programa para a disciplina de Matemática. A realização destes novos programas foi coordenada pelo Professor Doutor Jaime Carvalho e Silva, professor do Departamento de Matemática, da Universidade de Coimbra.

A disciplina fica, com esta reforma, dividida em três disciplinas: Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS). A primeira faz parte do currículo dos Cursos Gerais de Ciências Naturais, de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socio-económicas; a segunda para os Cursos Tecnológicos[21] e para o Curso De Artes e a terceira para Curso Geral de Ciências Sociais e Humanas Curso Tecnológico de Ordenamento do Território.

A aplicação destes novos programas iniciou-se no ano lectivo de 2003/2004 para a Matemática A, no 10º ano, com uma carga horária semanal de 3 aulas de 90 minutos, e no ano lectivo seguinte para a Matemática B e para a MACS.

Iremos apenas analisar o programa da Matemática A, uma vez que é o que "substitui" a matemática leccionada até então.

MATEMÁTICA A

Cursos Gerais de Ciências Naturais, de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socio-económicas

10º Ano

II – Função, gráfico (gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal) e representação gráfica.

- Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos. Tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para as seguintes classes de funções:
  - Funções quadráticas;
  - Função módulo;

[21] Construção Civil, Electrotecnia/Electrónica, Informática, Mecânica, Química e Controlo Ambiental, Ambiente e Conservação da Natureza, Desporto, Administração, Técnicas Comerciais e Serviços Jurídicos.

E recorrendo a:

a. Análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções dessas classes (considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez);
b. Transformações simples de funções: dada a função, esboçar o gráfico das funções definidas por $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = af(x)$, $y = f(ax)$, $y = |f(x)|$, com a positivo ou negativo, descrevendo o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.

(*) Referência breve à parábola, a algumas das suas principais propriedades e à sua importância histórica.

- Resolução de problemas envolvendo funções polinomiais (com particular incidência nos graus 2, 3 e 4).
- Possibilidade de decomposição de um polinómio em factores (informação).

Decomposição de um polinómio em factores em casos simples, por divisão dos polinómios e recorrendo à regra de Ruffini. Justificação desta regra.

(*) Estudo elementar de polinómios interpoladores.

Na parte dedicada Às indicações metodológicas encontramos a informação seguinte:

"Na resolução de problemas deve ser dada ênfase especial à Modelação Matemática (por exemplo, usando dados concretos recolhidos por calculadoras gráficas ou computadores acoplados a sensores adequados). Deve ser dada ênfase especial à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos, nomeadamente quando forem usadas inequações. A resolução numérica ou gráfica deve ser sempre confrontada com conhecimentos teóricos. Deve ser usada a resolução analítica sempre que a natureza do problema o aconselhar, por exemplo quando for conveniente decompor o polinómio em factores. O estudo analítico dos polinómios deve ser suscitado pela resolução de problemas e aí integrado. A resolução analítica de problemas deve ser sempre acompanhada da verificação numérica ou gráfica."

Tal como no programa anterior, relativo ao 10º ano, também neste programa os problemas de optimização não surgem explicitamente, mas sim implicitamente no estudo das funções.

Quanto à Matemática A, o programa de 11º ano contemplava o estudo de três temas: Geometria no Plano e no Espaço, Funções Racionais, Taxa de Variação e Sucessões reais.

É de referir que o tema Geometria no Plano e no Espaço inclui, agora, na parte final, um novo ponto dedicado à programação linear. O programa anterior já fazia referência ao tema, mas só nesta reforma os conteúdos a abordar ficam bem definidos.

Examinemos como ficou estruturado o novo programa de Matemática A, em relação ao tema Cálculo Diferencial:

MATEMÁTICA A

Cursos Gerais de Ciências Naturais, de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socio-económicas

11º Ano

Tema II – Introdução ao Cálculo Diferencial I. Funções racionais e com radicais. Taxa de Variação e Derivada

- Resolução de problemas envolvendo funções ou taxa de variação
- Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando a calculadora gráfica, para a seguinte classe de funções:

$$f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$$

Neste estudo enfatiza-se a analiso dos efeitos das mudanças dos parâmetros nos gráficos das funções de uma mesma classe.

- Conceito intuitivo de limite, de $+\infty$ e $-\infty$
- Noção de **taxa média de variação**; cálculo da taxa média de variação. Noção de taxa de variação; obtenção da taxa de variação (valor para que tende a t.m.v. quando a amplitude do intervalo tende para zero) em casos simples.
- Interpretação geométrica da taxa de variação; definição de derivada (recorrendo à noção intuitiva de limite).
- Determinação da derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais do 2º e 3º grau, função racional do 1º grau, função módulo.
- Constatação, por argumentos geométricos, de que:
  i. Se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo;
  ii. Se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto.

(*) Referência à hipérbole; informação das suas principais propriedades e da sua importância histórica.

- Funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos).
- Soma, diferença, produto, quociente e composição de funções no contexto do estudo de funções racionais, envolvendo polinómios do 2º e 3º grau.
- Inversa de uma função. Funções com radicais quadráticos ou cúbicos.

Operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente fraccionário. Simplificações de expressões com radicais (não incluindo a racionalização).

O ponto que refere a determinação da derivada em casos simples refere as seguintes indicações metodológicas:

> Podem ser postos alguns problemas simples que envolvam derivadas no contexto de aplicações.

Verificamos então que, apesar de o programa não referir o estudo dos problemas de optimização, refere que se ponham problemas de aplicação das derivadas.

A respeito da Matemática A, o programa de 12º ano contemplava o estudo de três temas: Probabilidades e Combinatória, Introdução ao Cálculo Diferencial II e por fim Trigonometria e Números Complexos.

Vejamos como ficou estruturado o novo programa de Matemática A, no tema Cálculo Diferencial II:

MATEMÁTICA A

Cursos Gerais de Ciências Naturais, de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socio-económicas

12º Ano

- Funções exponenciais e logarítmicas
- Teoria de limites
- Cálculo Diferencial

- Funções deriváveis. Regras de derivação (demonstração da regra da soma e do produto; informação das restantes regras). Derivadas de funções elementares (informação baseada em intuição numérica e gráfica). Segunda definição de número e. Teorema da derivada da função composta (informação).
- Segundas derivadas e concavidade (informação baseada em intuição geométrica)
- Estudo de funções em casos simples.
- Integração do estudo do Cálculo Diferencial num contexto histórico.
- **Problemas de optimização**

- Funções seno co-seno e tangente
  - Estudo intuitivo com base no círculo trigonométrico, tanto a partir de um gráfico particular, como usando a calculadora gráfica ou computador.
  - Estudo intuitivo de

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x}$$

  - Derivadas do seno, co-seno e tangente
  - Utilização de funções trigonométricas na modelação de situações reais.

Em relação ao ponto que refere os problemas de optimização surgem as seguintes indicações metodológicas:

> Os **problemas de optimização** devem ser escolhidos de modo que o estudante trabalhe de uma forma tão completa quanto possível a modelação. É uma boa oportunidade para discutir com os estudantes o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual.

Assim, o programa de Matemática A para o 12º ano, contempla, tal como na reforma anterior, o estudo dos problemas de optimização no capítulo dedicado ao Cálculo Diferencial, pretendendo-se deste modo que o aluno fique com a noção da aplicabilidade do conceito de derivada no mundo actual.

Apurámos, então, que este programa, em relação às funções e ao cálculo diferencial, não sofreu alterações. O objectivo desta reforma era essencialmente o de criar a Matemática B e a Matemática Aplicada às Ciências Sociais, sendo que a Matemática A corresponde, essencialmente, à Matemática da reforma anterior.

Este programa não faz nenhuma referência a manuais para o ensino.

Foi esta a última reforma legislada até ao momento em que terminou esta parte da nossa investigação.

B. Análise dos Manuais Escolares

Desta forma, também os manuais escolares relativos à Matemática A (até agora Matemática) não sofreram alterações e nem os manuais da autoria de Maria Neves, da Porto Editora, nem os de Ana Jorge e outras, da Areal Editores, apresentam estrutura e conteúdos idênticos aos analisados, anteriormente, dos mesmos autores.

Por sua vez o manual de Yolanda Lima, Francelino Gomes e Cristina Viegas sofreu algumas alterações. A primeira a referir é relativamente aos autores do manual, pois a autora Yolanda Lima apenas faz parte do manual do 10º e a autora Cristina Viegas apenas do manual a partir desta reforma, sendo co-autora dos manuais para os três anos lectivos. Quanto à estrutura, verificamos que o manual passou a estar dividido em três volumes, sendo cada um destes, dedicado a cada um dos três temas.

A alteração mais relevante, relativamente à estrutura, prende-se com o facto de o manual apresentar agora um conjunto de testes ao longo dos capítulos. Cada um dos testes está dividido em duas partes, uma parte com cinco questões de escolha múltipla e outra parte com cinco questões de resposta aberta. As questões não são só do tema que se está a abordar, mas inclui também questões de temas anteriores.

Deste modo, o manual deixa de ter um papel apenas de material de apoio para o aluno na aula, mas tem também como objectivo fazer uma preparação do aluno, ao longo do ano, para o exame nacional que se realiza no final do 12º ano.

Uma vez que os problemas de optimização, que os manuais escolares contêm, não sofreram alteração em relação aos problemas encontrados nos mesmos manuais, no período anterior, julgámos que não se justifica apresentar de novo os problemas, bem como a sua análise.

CONCLUSÃO

A. Análise do programa oficial

Após a análise das reformas curriculares sofridas pela disciplina de Matemática ao longo do século XX e XXI, verificámos que estas foram sofrendo grandes alterações. Estas foram consequência da situação política do país e também das correntes pedagógicas vividas a nível Internacional.

Assim, através da análise realizada a cada uma das reformas curriculares, podemos atestar que as aplicações da derivada não foram abordadas em todas as reformas curriculares e não pertenciam sempre ao mesmo ano lectivo. A primeira referência encontrada à abordagem da derivada foi na reforma de 1905, onde esta era estudada na 7ªclasse (actual 11º ano), no capítulo da Álgebra, mas esta reforma não contempla o estudo das aplicações da derivada.

A primeira referência nos programas oficiais, ao estudo de aplicações da derivada, deu-se na reforma de 1918. Nesta foi criado um capítulo consagrado ao Cálculo Infinitesimal, na 6ª classe (Actual 10º ano), onde se abordava não só o estudo da derivada, mas também as aplicações desta. A reforma seguinte, de 1919, era muito semelhante à anterior, mas a classe em que se fazia o estudo da derivada e suas aplicações passa da 6ª classe para a 7ª classe.

A partir da reforma seguinte, de 1926, as aplicações da derivada foram suprimidas do programa, voltando apenas a fazer parte deste, a partir da reforma de 1947. Nesta, a derivada era abordada na 7ª classe (actual 11º ano). Estava inserida no capítulo dedicado à Álgebra e fazia referência ao estudo de aplicações da derivada à Física. Na reforma posterior, de 1954, a derivada passa para o ano lectivo anterior, ou seja para a 6ª classe (Actual 10º ano), continua a estar inserida no capítulo dedicado à Álgebra e pretende-se apenas que se abordem aplicações desta, não se especifica o tipo de aplicações.

A reforma de 1963, marca a introdução das Matemáticas Modernas em Portugal. A partir desta a derivada deixa de pertencer ao capítulo dedicado à Álgebra, passando a fazer parte do capítulo da Análise ou do Cálculo Diferencial. Assim, esta reforma aborda a derivada no 7º ano (actual 11º ano), no capítulo respeitante ao Cálculo Diferencial. Este programa refere, pela primeira vez, o estudo dos máximos e mínimos.

A esta seguiu-se a reforma de 1973. Nesta, a derivada continua a fazer parte do 5º ano (correspondente ao 7º na reforma anterior), incluída no capítulo dedicado à Análise Infinitesimal. Também esta refere o estudo das aplicações das derivadas, mas agora, pela primeira vez, a problemas concretos. Esta reforma marca o fim do período ditatorial em Portugal, que se deu a 25 de Abril de 1974.

A primeira alteração nos programas, efectuada após o fim do regime Ditatorial, foi feita ainda no mesmo ano, mas apenas o programa da Matemática Clássica sofreu alterações, sendo semelhante ao anterior, embora menos extenso. Este programa era seguido por algumas turmas onde ainda não se leccionavam as matemáticas modernas. Nele a derivada estava presente no 1º ano do Curso Complementar (equivalente ao 11º ano actual). Pertencia ao capítulo do Cálculo e este mencionava que se estudassem aplicações da derivada a problemas de máximos e mínimos.

Em 1979 e em 1980 são publicados novos programas para o 11º e 12º ano, respectivamente. Nestes, a derivada é estudada no 11º e no 12º ano. No 11º ano está enquadrada no capítulo dedicado às derivadas, sendo o último ponto deste capítulo dedicado às aplicações das derivadas. No 12º ano esta está na parte dedicada à Análise, no capítulo dedicado à derivada. Este apenas pretende introduzir mais regras do cálculo diferencial, não referindo o estudo de aplicações.

Uma vez que este programa era muito extenso, foi publicado, em 1983, um novo programa, menos extenso, para a disciplina de Matemática do 12º ano. O tema em estudo não sofreu nenhuma alteração em relação ao anterior.

Também em 1988 o programa veio a sofrer mais um encurtamento. Sendo suprimido o seguinte ponto: *A noção de diferencial de uma função num ponto; interpretação geométrica; regra de diferenciação* onde se referia a resolução de questões aplicando o conceito de derivada.

Como consequência da Lei de Bases do Sistema Educativo, publicada em 1986, os programas sofreram uma nova alteração. Em 1991 foram publicados os novos programas para aplicação em regime de experiência pedagógica. Nestes novos programas a derivada continua a ser abordada no 11º ano, no sub – capítulo dedicado às derivadas. Este refere a aplicação da derivada ao estudo de máximos e mínimos, mencionando como um dos objectivos a resolução de problemas de máximos e mínimos e apresentando nas indicações metodológicas o estudo, pela primeira vez, de problemas de optimização. Também o programa do 12º ano contempla o estudo da derivada e refere nas indicações metodológicas o estudo de funções irracionais ligadas a problemas de optimização.

Em 1997 fez-se um ajustamento a este programa, introduzindo-se então o uso obrigatório das calculadoras gráficas no Ensino Secundário. Neste programa a derivada continua a ser introduzida no 11º ano, no capítulo dedicado ao Cálculo Diferencial. Expõe nos seus conteúdos o estudo de aplicações da derivada e aponta no desenvolvimento dos temas a resolução de problemas de aplicação, envolvendo derivadas. O programa do 12º ano também aborda a derivada no capítulo dedicado ao Cálculo Diferencial, fazendo menção, explicitamente, nos conteúdos programáticos, o estudo de problemas de optimização.

Por fim, em 2001 foi homologado o novo programa para a Matemática A. Este programa também contempla, no 11º ano, no sub – capítulo da derivada o estudo de problemas de aplicação simples que envolvam derivada. No 12º ano o programa faz também referência, no final do estudo do Cálculo Diferencial, o estudo dos problemas de optimização.

As principais características de cada uma das reformas curriculares, em relação aos problemas de optimização, foram catalogadas na tabela que apresentamos na página seguinte.

Características \ Reforma		1905	1917	1918	1919	1926	1927	1929	1930	1931	1934	1936	1947	1954	1963	1973	1974	1979	1983	1991		1997		2001	
Ano em que aborda a derivada	Não aborda											X													
	4º					X	X																		
	4ª/6º/10º			X				X	X	X	X			X			X								
	5ª/7º/11º	X	X		X								X		X	X		X		X		X		X	
	12º																		X		X		X		X
Capítulo em que se insere a derivada	Álgebra	X	X			X	X	X	X	X	X		X	X											
	Cálculo Infinitesimal			X	X											X	X								
	Cálculo Diferencial														X							X	X	X	X
	Derivada																	X	X	X	X				
Forma de abordar os P. O.	Não Aborda	X	X			X	X	X	X	X	X														
	Aplicação da derivada			X	X									X		X		X	X			X		X	
	Problema de max. e mín.														X		X			X					
	Problema de optimização																			X	X		X		X
	Aplicação à Física												X									X		X	
Máquina de calcular utilizada	Não utiliza	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X								
	Calculadora Simples																								
	Calculadora Científica																	X	X	X	X				
	Calculadora Gráfica																					X	X	X	X
Manuais Escolares	Faz sugestão	X	X			X	X				X														
	Não faz sugestão			X	X															X	X	X	X	X	X
	Manual único												X												

B. Análise dos manuais

À medida que os programas oficiais foram sofrendo alterações, em relação ao estudo dos problemas de optimização, também os manuais escolares foram sendo reajustados, relativamente aos problemas de optimização. Façamos agora a análise às alterações sofridas pelos manuais quanto às características dos problemas de optimização. Os dados apresentados nas tabelas a seguir estão sob a forma de percentagem. Apenas indicámos os dados a partir do período 3.2 uma vez que no período 3.1 não encontramos problemas de optimização nos manuais.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Tipo Problema (T)	TEP	11	37	21	22	20
	TER	6	30	16	0	2
	TEX	78	33	61	76	74
	TDM	6	0	2	0	2
	TR	0	0	0	2	3

Deste modo, e em relação ao tipo de problema, no período 3.2 a maioria surgiu sob a forma de exercício e não encontrámos problemas em que se pretendesse fazer um relatório. No período 3.3.2 observámos que os exemplos, exercícios resolvidos e exercícios surgem de uma forma muito equilibrada mas, em contrapartida, não encontramos nenhum problema sob a forma de demonstração ou relatório. No período seguinte, período 3.3.3 verificamos que a distribuição já não é tão equilibrada, sendo o número de problemas sob a forma de exercício, maior do que os restantes e também este não tem exercícios sob a forma de relatório. No período 3.4, a percentagem de problemas sob a forma de exemplo e sob a forma de exercício é muito equilibrada. Figuram pela primeira vez exercícios em que se pretende que os alunos elaborem um relatório e não encontramos exercícios resolvidos ou demonstrações. Por fim, no período 3.5, a distribuição é idêntica à do período anterior, com a excepção de terem surgido novamente exercícios resolvidos e demonstrações.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Contexto do Problema (C)	CGM	56	58	43	35	29
	CGA	0	2	9	7	13
	CAR	22	12	7	7	3
	CRM	22	21	30	42	47
	CRF	0	5	7	5	6
	CRE	0	2	4	4	2

Quanto ao contexto dos problemas, no período 3.2., a maioria dos problemas são de Geometria Métrica e os restantes distribuem-se de forma igual entre Aritméticos e de contexto real de medida e não há problemas de Geometria Analítica, Física ou Economia. No período 3.3.2, a percentagem de problemas de Geometria Métrica e de contexto real de medida é muito semelhante à anterior. No entanto, diminuem os problemas Aritméticos e surgem, em número reduzido, problemas de Geometria Analítica, Física e Economia. No período 3.3.3 o número de problemas de Geometria Métrica começa a diminuir, aumentando o número de problemas de contexto real de medida e de Geometria Analítica. Os problemas de Física ou Economia sofrem um ligeiro aumento e os Aritméticos diminuem. O período 3.4 é muito semelhante ao anterior, com excepção dos problemas de Geometria Métrica que continuam a diminuir e os de contexto real de medida que continuam a aumentar. Por fim, no período 3.5, vemos, que tal como nos três períodos anteriores, os problemas de Geometria Métrica continuam a diminuir e que os de Contexto Real de Medida continuam a aumentar. Também os problemas de Geometria Analítica sofrem um aumento, os de Física sofrem um ligeiro aumento e os de Aritmética e Economia diminuem.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Função a optimizar (O)	**OD**	0	9	11	5	8
	OA	61	40	45	56	59
	OPE	6	7	9	5	4
	OV	11	28	23	20	19
	OPR	11	9	2	5	3
	OS	11	5	5	2	1
	OT	0	0	2	4	4
	OC	0	2	4	2	2

Analisemos agora as funções a optimizar que surgiram ao longo dos períodos. Verificamos que em todos os períodos a função que mais se optimiza é a área e a seguir o volume. Todas as outras surgem em número reduzido. Apurámos ainda que no período 3.2 não existem problemas em que se pretende optimizar uma distância, tempo ou custo e no período 3.3.2 ainda não encontrámos problemas em que se pretenda optimizar um custo. O período mais equilibrado é o 3.2 em que a percentagem de problemas em que se pretende optimizar um volume, produto ou soma é a mesma. Nos outros períodos aumentou a percentagem de problemas em que se optimiza um volume, mas os outros diminuem.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Esq./ Fig. auxiliares (F)	**FSE**	100	79	68	27	19
	FFS	0	5	5	16	21
	FFD	0	16	27	56	60

Relativamente aos esquemas ou figuras auxiliares que encontramos no enunciado dos problemas confirmamos que no período 3.2. nenhum dos enunciados vem acompanhado de qualquer tipo de esquema ou figura auxiliar. O número de problemas sem qualquer tipo de esquema ou figura auxiliar foi diminuindo, em cada um dos períodos seguintes e a partir do período 3.4 o número de problemas, que possuíam figuras com dados, passa a ser superior ao número de problemas sem auxiliares. Também o número de problemas com figuras simples foi aumentando.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Tipo de dados (D)	**DN**	61	49	86	98	96
	DG	39	51	14	2	4

Em relação ao tipo de dados, com excepção do período 3.3.2, em todos os restantes, o número de problemas com dados numéricos era superior ao número de problemas com dados genéricos. É ainda de referir que a percentagem de problemas com dados numéricos é significativamente superior à percentagem de problemas com dados genéricos nos três últimos períodos.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Tipo de en. (EN)	**ENS**	78	91	82	78	67
	ENE	22	9	18	22	33

No que diz respeito ao enunciado, em todas as reformas surgem mais problemas com enunciado simples do que com resolução encaminhada. No entanto, a partir da reforma 3.3.2, o número de problemas com enunciado encaminhado foi aumentando enquanto que o número de problemas com enunciado simples foi diminuindo.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Func./ Eq. auxiliar (A)	**AE**	67	37	43	31	29
	AI	33	63	57	69	71

Passando agora para a função/equação auxiliar, apenas no primeiro período existem mais problemas em que a função auxiliar aparece de forma explícita do que de forma implícita. Nos restantes períodos existem mais problemas em que a função auxiliar surge de forma implícita do que de forma Explícita. No entanto, com excepção do período 3.3.2, o número de problemas em que a função auxiliar surge de forma explícita vai diminuindo e o número de problemas em que a função auxiliar surge de forma implícita vai aumentando.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Noções aplicadas (N)	NTP	22	28	21	20	17
	ND	6	2	16	11	17
	NSF	0	5	9	9	9
	NPE	22	14	18	24	24
	NAR	6	28	18	7	7
	NVO	22	5	9	7	8
	NSO	17	12	5	11	6
	NPR	6	7	4	0	0
	NF	0	0	2	4	3
	NFT	0	0	0	9	14
	NMF	0	2	7	5	6

Quanto às noções aplicadas na resolução dos problemas, verificamos que o período que apresenta menor número de noções aplicadas é o período 3.2, uma vez que não existem problemas em que se utilize a semelhança de figuras, a noção de função ou função trigonométrica nem as magnitudes físicas. A semelhança de figuras e as magnitudes físicas surgem a partir do período 3.3.2, a noção de função a partir do período 3.3.3 e as funções trigonométricas a partir do período 3.4. A partir do período 3.4 deixam de existir problemas em que se utilize a noção de produto. Em todos os períodos as noções mais utilizadas são o Teorema de Pitágoras e a fórmula do perímetro. Uma vez que a maioria dos problemas de cada um dos períodos são problemas relacionados com geometria, em todos os períodos surgem mais problemas em que se aplicam as noções geométricas.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Estratégia (E)	EH	22	12	5	0	1
	EE	17	9	11	9	5
	EM	0	28	43	55	66
	EN	61	51	41	36	28

Sobre a estratégia aplicada na resolução dos problemas, no primeiro período, uma vez que não existiam manuais anteriores com problemas de optimização, a maioria dos problemas surgiam pela primeira vez, dos restantes, alguns tinham sido já identificados nos livros históricos analisados e outros faziam parte dos enunciados dos exames. Nos períodos seguintes, a percentagem de problemas novos foi diminuindo e a percentagem de problemas que apareceram em manuais anteriores foi aumentando. Também a percentagem de problemas que tinham presentes nos livros históricos e que tinham saído em exame, foi diminuindo. A partir do período 3.3.3 vê-se que a percentagem de problemas que já tinha figurado nos manuais anteriores ultrapassa a percentagem dos problemas que aparecem pela primeira vez.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Funções Utilizadas (f)	**fp**	56	56	45	60	61
	fr	28	19	32	18	13
	fir	17	26	23	13	11
	ft	0	0	0	9	14

As funções utilizadas, para cálculo dos extremos, são, em todos os períodos, na maioria dos problemas funções polinomiais, surgindo as funções racionais e as funções irracionais em percentagem mais reduzida. Com excepção do período 3.3.2, todos os outros possuem uma percentagem ligeiramente superior de funções racionais do que de funções irracionais. Só a partir do período 3.4 se identificam problemas em que se obtem uma função trigonométrica e o período 3.5 possui uma percentagem superior à do período anterior. O período em que as percentagens são mais equilibradas é o período 3.3.3 mas, de qualquer forma, há mais funções polinomiais.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Esquema de cálculo (e)	**ez**	0	30	9	0	10
	ezs	100	67	68	100	50
	ezss	0	4	23	0	10
	ev	0	0	0	0	13
	ecg	0	0	0	0	17
	eo	0	0	0	0	3

Acerca do esquema utilizado para calcular os zeros observamos que nos quatro primeiros períodos o processo de resolução é muito semelhante, uma vez que em todos eles se utilizam os zeros da derivada: No período 3.2 e no período 3.4 em todos os problemas se determinam os zeros da derivada e se faz, de seguida, o estudo do sinal da função derivada. No período 3.3.2 na maioria dos problemas calculam-se os zeros da derivada e faz-se, de seguida, o estudo do sinal da função derivada, noutros problemas apenas se calculam os zeros da derivada e num número reduzido de problemas calcula-se os zeros da derivada e faz-se o teste do sinal da segunda derivada. No período 3.3.3, na maioria dos problemas calculam-se os zeros da derivada e faz-se, de seguida, o estudo do sinal da função derivada, noutros problemas determina-se os zeros da derivada e faz-se o teste do sinal da segunda derivada e, num número reduzido de problemas, apenas se calculam os zeros da derivada.

O período que tem uma maior diversidade de formas de resolução é o último período, marcado pela utilização da calculadora gráfica pelos alunos. Existem neste período alguns problemas que apresentam mais do que uma resolução. Deste modo, neste período, metade dos problemas mostram o cálculo dos zeros da derivada e o estudo do sinal da função derivada; noutros calcula-se os zeros da derivada e faz-se o teste do sinal da segunda derivada ou apenas se calculam os zeros da derivada. Relativamente aos problemas resolvidos sem recorrer à derivada, a forma de resolução que identificámos mais vezes é através da calculadora gráfica, outros problemas calculam o extremo através do vértice da parábola e apenas um problema apresenta a resolução, para além de gráfica, também geométrica e algébrica.

É ainda de referir que, apesar de no período 3.4 surgirem problemas de optimização no 10º ano, para resolver através do vértice da parábola, nenhum desses problemas vem acompanhado da resolução.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Graf./fig./ esq. Aux. (g)	**Gn**	100	48	9	0	0
	Gf	0	41	50	0	3
	Gqm	0	11	50	100	50
	Gg	0	0	5	25	47

Acerca dos gráficos, figuras ou esquemas auxiliares presentes nas resoluções dos problemas, no período 3.2 as resoluções não têm qualquer tipo de gráfico, figura ou esquema auxiliar. No período seguinte o número de problemas sem qualquer tipo de auxiliar diminui e existem já muitos problemas acompanhados de figura. Alguns ainda apresentam o quadro de monotonia. No período 3.3.3 o número de problemas, sem qualquer tipo de auxiliar, é muito reduzido, mostrando um grande número de problemas figura ou quadro de monotonia, surgem neste período, pela primeira vez, alguns problemas com o gráfico da função a optimizar.

Nos dois últimos períodos todos os problemas apresentam algum tipo de auxiliar: no período 3.4 todas as resoluções apresentam quadro de monotonia e alguns problemas apresentam o gráfico da função e no período 3.5, metade dos problemas apresentam quadro de monotonia e bastantes problemas apresentam gráfico da função. Encontramos ainda neste período um número reduzido de resoluções com figura.

Variáveis	**Período**	**3.2**	**3.3.2**	**3.3.3**	**3.4**	**3.5**
Valor pedido (v)	**ve**	61	42	61	67	71
	vi	39	58	39	33	29

Por fim, em relação ao valor pedido, em todos os períodos, com excepção do período 3.3.2, a percentagem de problemas em que o valor pedido surge explicitamente é superior à percentagem de problemas em que aparece implicitamente. Verificamos ainda que, com excepção do período 3.3.2, a percentagem de problemas em que o valor pedido surge explicitamente, vai aumentando, enquanto que a percentagem de problemas em que o valor pedido surge implicitamente vai diminuindo.

4. CONCLUSÕES FINAIS

Esta investigação teve como ponto de partida levar a cabo um estudo acerca dos problemas de optimização. Inicialmente o objectivo era a elaboração de um estudo histórico acerca da evolução do seu tratamento no Ensino Secundário em Portugal. Após algumas pesquisas foi verificado que havia uma diferença no estudo dos problemas de optimização antes e depois de se começar a utilizar a calculadora gráfica na sala de aula. Por esta razão levanta-se uma outra questão bastante pertinente: Como se terá dado a evolução do estudo dos problemas de optimização a nível histórico?

Ora, como não existia nenhum estudo rigoroso nesta área, com a excepção da investigação elaborada por Astudillo (2002), que fez uma investigação histórica acerca dos pontos críticos, sem elaborar propriamente uma análise específica aos enunciados e resoluções dos problemas de optimização, iniciamos esta investigação identificando e analisando os livros históricos de Matemática e os manuais escolares espanhóis com o objectivo de verificar, essencialmente, as diferenças entre a resolução dos problemas de optimização, antes e depois de surgir o conceito de derivada.

Assim, depois duma análise efectuada a seis livros históricos (dois antes de surgir o conceito de derivada e quatro depois de surgir o conceito de derivada), verificámos que, apesar de encontrarmos algumas semelhanças nos enunciados, ou seja, no problema de optimização, a forma de resolução foi sendo muito simplificada ao longo dos tempos. Deixámos de ter demonstrações extremamente construtivas como descobrimos na obra de Euclides e de Pappus e passámos para resoluções mais simples e directas depois de surgir o conceito de derivada e deste ser aplicado ao cálculo de máximos e mínimos de uma função.

Posteriormente dirigimos a nossa atenção para a análise dos programas oficiais com o objectivo de identificar aqueles que referem a abordagem dos problemas de optimização. Concluímos então, que apesar de se referirem às aplicações das derivadas nos programas oficiais a partir de 1954, só depois da Lei de Bases do Sistema Educativo se propõe explicitamente, que se faça o estudo dos problemas de optimização. Notamos ainda que, ao longo do século, a importância dada às aplicações dos conceitos leccionados, principalmente ao conceito de derivada, foi aumentando, sendo cada vez mais específica em cada reforma.

Foi sobretudo, com a Lei de Bases do Sistema Educativo que os problemas de optimização deixaram de fazer parte apenas de um ano lectivo. E uma vez que o conceito de derivada passou a ser abordado no 11º e no 12º ano, também os problemas de optimização fizeram parte desses dois anos. Mais ainda, tendo em conta que no 10º ano se fez o estudo de funções, como é o caso da função quadrática, também neste ano se abordaram problemas de optimização. Assim, os problemas de optimização deixaram de estar limitados apenas a um ano lectivo e apenas como aplicação da derivada, passaram a estar incluídos em todos os anos do Ensino Secundário, antes e depois de se abordar a derivada.

Por fim, fomos analisar um conjunto de manuais escolares para cada uma das distintas reformas. Também nestes registámos evolução dos problemas de optimização, quer em relação ao tipo de problemas abordado, quer em relação à forma como estes são resolvidos. Uma das questões que consideramos mais interessantes é o facto de o primeiro problema de optimização, que encontramos resolvido nos manuais escolares, sem que se use o conceito de derivada (JAFB10.1 (1997)) fosse, precisamente, um problema presente na obra de Euclides, a primeira obra histórica onde identificámos os problemas de optimização, sem recorrer ao cálculo da derivada. Identificámos nos manuais escolares alguns dos problemas de optimização que tínhamos analisado nos livros históricos.

Apurámos ainda que, apesar de a Lei de Bases do Sistema Educativo ser a que traz mais alterações, relativamente aos problemas de optimização, tais alterações não são significativas nos manuais escolares analisados. Apesar de existirem já problemas de optimização nos manuais escolares do 10º ano, estes não apresentam qualquer tipo de resolução. Em contrapartida, o reajustamento de 1997 marca a diferença no tratamento dos problemas de optimização. Tanto a quantidade como a diversidade de problemas e resoluções é notória nos manuais desta última reforma analisada.

Pudemos então verificar que a introdução do uso da calculadora gráfica na sala de aula foi um ponto importante para a evolução no estudo e na abordagem feita aos problemas de optimização abordados no Ensino Secundário em Portugal.

4.1. REALIZAÇÃO DOS OBJECTIVOS DA INVESTIGAÇÃO

Relativamente aos objectivos a que se propôs esta investigação podemos considerar o seguinte:

> 1º Objectivo: Fazer uma análise histórica dos problemas de optimização: Ver como e quando surgiram na História da Matemática. Ver também quais os matemáticos que os abordaram;

O primeiro problema de optimização que registámos foi no séc. IV A.C, na obra *Elementos,* de Euclides. Nesta obra identificámos apenas problemas de Geometria Plana. A seguinte obra em que Identificámos problemas de optimização foi no séc. IV D.C., na obra *La colection Matematique,* de Pappus. Nesta encontrámos problemas de Geometria Plana e de Geometria Espacial.

> 2º Objectivo: Verificar quando e de que forma foram introduzidos nos programas oficiais portugueses os problemas de optimização;

Os problemas de optimização foram inseridos nos programas oficiais com a reforma de 1954, como uma aplicação da derivada; posteriormente, como problemas de máximos e mínimos e nas últimas reformas como problemas de optimização. Em todas as reformas estes surgiam depois da derivada, como uma aplicação em casos concretos. A partir da Lei de Bases do Sistema Educativo encontrámos problemas de optimização não como uma aplicação da derivada, mas sim como uma aplicação ao cálculo de máximos e mínimos de uma função, no 10º ano.

> 3º Objectivo: Analisar, em cada plano de estudos, a importância dada à disciplina de Matemática e, dentro desta, a importância dada ao estudo da Análise, mais especificamente ao estudo dos Problemas de Optimização.

Ao longo dos anos a disciplina de Matemática sofreu várias alterações, especialmente no número de horas semanais atribuídas à mesma disciplina. Em relação ao estudo da Análise Infinitesimal averiguámos que lhe foi dada uma crescente importância sendo considerada a partir de 1918 uma área autónoma. Também as aplicações da matemática, em particular os problemas de optimização, foram conquistando em cada reforma um peso e um maior destaque.

> 4º Objectivo: Analisar como foram abordados: os tipos de problemas propostos pelo Ministério e os tipos de problemas abordados pelos manuais escolares;

Foi possível identificar algumas indicações nos programas oficiais relativas aos problemas de optimização no sentido de orientar, quer os professores, quer os autores dos manuais escolares no que se pretendia que fosse abordado.

> 5º Objectivo: Verificar se os manuais, acerca dos problemas de optimização, vão de encontro às propostas do Ministério;

Verificámos que nos primeiros programas oficiais analisados, apesar de se fazer referência às aplicações da derivada, apenas, posteriormente, surgiram os problemas de optimização como aplicação da derivada. Nos programas posteriores verificámos que, cada manual, de forma distinta, abordava os problemas de optimização.

> 6º Objectivo: Observar qual a alteração sofrida pelos programas, em relação aos problemas de optimização, após a introdução das calculadoras gráficas no Ensino Secundário;

É visível que, apesar dos problemas de optimização tomarem um papel mais importante a partir da Lei de Bases do Sistema Educativo, essa importância só foi notória nos manuais escolares depois de ser introduzida a calculadora gráfica nos programas oficiais.

7º Objectivo: Contribuir para um melhor conhecimento da História da Análise Matemática em Portugal;

Esta tese de doutoramento, uma vez que julgamos pioneira na análise histórica dos problemas de optimização, trouxe novas informações ao conhecimento da História da Matemática e da História da Didáctica da Matemática em Portugal. Até agora não conhecemos nenhuma investigação acerca dos problemas de optimização nos manuais escolares portugueses e dada a crescente importância referente às questões ligadas às aplicações dos conceitos matemáticos, penso que esta tese de doutoramento poderá ter um papel importante.

4.2. HIPÓTESES DE INVESTIGAÇÃO. RESULTADOS

As hipóteses desta investigação eram:

4. Será que os problemas de optimização surgiram antes de surgir o conceito de derivada?

Relativamente a esta hipótese observamos que sim. De facto, os problemas de optimização surgiram muito antes de surgir o conceito de derivada. Os primeiros problemas de optimização foram identificados na obra *Elementos,* de Euclides, datada do séc. IV a.C.

5. Será que as várias fases por que passou o conceito de derivada influenciaram a forma de resolução dos problemas de optimização?

Também verificámos que à medida que os tempos foram passando, a forma de resolução dos problemas de optimização se tornou mais simples. Antes de se utilizarem as derivadas para determinar a solução óptima, a resolução dos problemas era muito extensa e complexa, e depois de se começar a aplicar as derivadas, essa resolução foi-se tornando cada vez mais simples.

6. Será que em alturas distintas eram abordados distintos tipos de problemas de optimização?

Apurámos, de facto que em cada época, os problemas que surgiam eram distintos. Inicialmente os problemas abordados eram mais abstractos, mas com o passar dos tempos foram aumentando os problemas aplicados à vida real, à Física ou à Economia.

4.3. LIMITAÇÕES DO TRABALHO

Como em grande parte dos trabalhos científicos, também nesta dissertação não conseguimos abarcar tudo o que inicialmente tínhamos ambicionado.

Tendo em conta a grande quantidade de livros históricos que abordam os problemas de optimização, não foi possível fazer a análise de todos. Fizemos então uma selecção e apenas analisámos os que nos pareceram mais representativos da época em que se enquadravam.

Também em relação aos manuais escolares sentimos essa dificuldade. Apesar das primeiras reformas terem um número reduzido de manuais escolares, dado que vigorava o regime do Livro Único, quando terminou este regime o número de manuais escolares publicados, para cada uma das reformas, foi aumentando significativamente. Assim, para os últimos períodos, sentimos necessidade de fazer uma selecção de manuais para analisar em cada um dos períodos. Essa escolha foi feita tendo em conta os manuais mais utilizados ou os que apresentavam problemas, do nosso ponto de vista, mais interessantes para serem analisados.

4.4. IMPLICAÇÕES PARA FUTURAS INVESTIGAÇÕES

A realização deste trabalho de investigação acerca da evolução histórica dos problemas de optimização e do seu tratamento no Ensino Secundário português, nos séculos XX e XXI, deixa em aberto algumas questões importantes para realização de novas investigações. Apesar de terminarmos a investigação, e sem menosprezar o muito que foi feito, e que demos muito de nós ao longo destes anos, concluímos que muito mais poderia ser feito. Por isso, não queremos terminar sem referir algumas questões que consideramos da maior importância e que bem mereciam um condigno tratamento:

- Utilizar o modelo construído, quer para analisar os problemas de optimização nos manuais escolares, quer para analisar outro tipo de problemas;
- Desenvolver investigações semelhantes à nossa própria investigação para outro tipo de questões Matemáticas;
- Elaborar um estudo histórico acerca da forma como os professores, nas distintas reformas, faziam o estudo dos problemas de optimização;
- Analisar a última reforma do sistema educativo para a Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais, relativamente ao facto de abordarem ou não os problemas de optimização e, no caso de serem abordados, identificar o tipo de problemas que são abordados para cada uma das disciplinas;
- Comparar os resultados obtidos nesta investigação para os problemas de optimização dos manuais escolares portugueses com os problemas de optimização dos manuais escolares de outros países.

BIBLIOGRAFIA

AIRES, A. P. (2006) *O conceito de derivada no ensino secundário em Portugal ao longo do século XX: Uma abordagem histórica através dos planos curriculares e manuais escolares.* Salamanca (Tese de doutoramento apresentada na Universidade de Salamanca).

BERNARDES, A. e outros (1994) Reflexão sobre a aplicação dos Novos Programas do. 10º Ano. Em *Encontro de professores Profmat*.

BEZOUT, Etienne (1764) *Cours de mathématique*. Avignon: Imp. H. Offray.

BISQUERA, R. (1989) *Métodos de investigación educativa*. Madrid: CEAC.

BOYER, C. B. (1959) *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover Publications, inc.

BOYER, C. B. (1993) *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda.

CAMACHO MACHIN, M e GONZÁLEZ MARTIN, A. S. (1998) Una aproximación a los Problemas de Optimización en libros de bachillerato y su resolución con la TI-92. *Revista de Enseñanza e Investigación Educativa AULA,* Vol. 10, p. 137-152.

CARVALHO, R. (2001) *História do Ensino em Portugal*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

CASTAÑEDA ALONSO, A. (2002) Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. Em *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa*. Março. México.

CASTAÑEDA ALONSO, A. (2006) Formación de un discurso escolar: El caso del máximo de una función en la obra de L´Hospital y Maria G. Agnesi. Em *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa*. Julho. México.

CASTRO, R. V. (Coord) (1993) *Conteúdos e contextos da Reforma Curricular no* 11º *ano de escolaridade -concepções e práticas de professores experimentadores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

CASTRO, R. V. (coord) (1999) *Manuais Escolares: Estatuto, Funções e História*. Braga: Centro de Estudos em Educação e Psicologia do Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.

DES (!997) Matemática – Programas 10º, 11º *e* 12º *anos.* Lisboa: Ministério da Educação.

DGBES (1991) *Programas de Matemática* e *Métodos Quantitativos. Organização Curricular e Programas. Ensino Secundário*. Lisboa: DGEBS, Ministério da Educação.

EDWARDS, C. H. Jr. (1979) *The Historical Development of Calculus*. New York: Springer-Verlag.

EECKE, Paul Ver (Trad) (1933) *La collection mathématique / Pappus d'Alexandrie*. Paris: Desclée de Brouwer.

FERNANDEZ, C. S. e CASTRO, C. V. (2004) *De los Bernoulli a los Bourbaki: una historia del arte y la ciencia del cálculo*. Tres Cantos: NIVOLA libros y ediciones, S. L.

GONÇALVES, V. (1992) Graves problemas na "experiência" dos novos programas de Matemática para o Ensino Secundário. Em *Boletim da SPM*, nº 24.

GONÇALVES, V. (1993) *A experimentação dos novos programas de Matemática: reflexões e algumas propostas concretas.* Em *Boletim da SPM*, nº 25.

GONZÁLEZ ASTUDILLO, M. T. (2002) *Sistemas Simbólicos de Representación en la Enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva Histórica.* Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

GRAÇA, M. M. e MÁXIMO, M. O. (1991) Novos programas, que generalização para 92/93. Em *Educação e Matemática*, nº 19/20.

HEATH, Thomas L. (Trad) (1956) *The thirteen books of Euclid's Elements*. New York: Dover.

KAPUT, J. (1992) Technology and Mathematics Education. Em Grows, Douglas A. (Ed) *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* p. 515-555. New York: MacMillan.

KINDT, M. (1995) Problemas antiguos y la calculadora gráfica. Em *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO*, nº4, p. 41 – 52.

L'HÔPITAL, G. F. A. (1988) *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris: ACL – editions.

LITHNER, J. (2004) Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. Em *Journal of Mathematical Behavior* nº 23.

LOBATO, G. (1991) Novos Programas de Matemática no Ensino Básico e Secundário. Em *Educação e Matemática*.

LUNDGREN, U. P. (Coord) (1981) *Relatório final do Projecto de Avaliação do Ensino Secundário Unificado*. Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e das Universidades.

MALAASPINA, U. (2007) Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. Em *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Novembro. México.

MESA, V (2004) Characterizing practices associated with functions in Middle School textbooks: An empirical approach. Em *Educational Studies in Mathematics*, nº56. Nederlands: Kluwer Academic Publishers.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (1986) *Lei de Bases do Sistema Educativo,* DR45/86, de 14 de Outubro. Lisboa: Assembleia da República.

POLYA, G. (1975) How to solve it: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press.

PONTE, J. P. (1987) A Matemática não é só cálculo e mal vão as reformas curriculares que a vêem como simples disciplina de serviço. Em *Educação e Matemática* nº4.

PONTE, J. P. (1992) Os programas de Matemática no Ensino Secundário. Em *Encontro de Professores Profmat*.

PROENÇA, M. C. (1998) *O Sistema de Ensino em Portugal (Séculos XIX-XX)*. Lisboa: Edições Colibri.

RICO, L. e Sierra, M. (1994) Educación matemática en la España del siglo XX. Em J. Kilpatrick, L. Rico e M. Sierra, *Educación matemática e investigación*. Síntesis: Madrid, p. 99-202.

RUIZ BERRIO, J. (1997) El método histórico en la investigación histórico-educativa. Em N. De Gabriel e A. Viñao (eds) *La investigación histórico-educativa*. Barcelona: Ronsel.

RUTHVEN, K. (1996) Calculators in the Mathematics Curriculum: the Scope of Personal Computation Technology. Em BISHOP, A. J. e outros, *International Handbook of Mathematics Education,* p. 435-468. Alemanha: Kluwer Academic Publishers.

SCHUBRING, G. (1987) On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Autor. *For the learning of mathematics* 7, 3 p. 41-51.

SCHUBRING, G. (1989) *Categorías para la investigación en la historia social de la enseñanza de la matemática y algunos modelos característicos*. Traduzido por A. Orellana e L. Rico

SERRET, J. A. (1879) *Cours de Calcul Différentiel et Intégral*. Paris : Gauthier Villars.

SIERRA, M (Coord.) (1997) *Los conceptos de límite y continuidad en educación secundaria: transposición didáctica y concepciones de los alumnos*. Salamanca: Dpto Didáctica da Matemática y CE (Memoria Inédita).

SIERRA, M (Coord.) (2003) *Evolución de la enseñanza del Análisis Matemático y del Álgebra: de los libros de texto a las nuevas tecnologías*. Salamanca: Dpto Didáctica da Matemática y CE (Memoria Inédita).

SILVA, J. C. (!991) Sobre a Proposta de Novas Programas de Matemática para o. Ensino Secundário. Em *Revista Educação e Matemática*, nº 19/20.

SILVA, J. C. (1992) Reforma Educativa: cresce a insatisfação dos professores. Em *Boletim da SPM*, nº 22.

STRUIK, D. (1989) *História concisa das Matemáticas.* Lisboa: Gradiva.

STURM, J. C. F. (1884) *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. Paris: Gauthier Villars.

TIKHOMIROV, V. M. (1986) *Stories About Maxima and Minima*. Rhode Island: American Mathematical Society.

TRULLS, O. S. (Coord) (1991) *A Experimentação dos Novos Programas para o 10º Ano de Escolaridade*. Braga: Centro ode Estudos Educacionais e Desenvolvimento Comunitário do Instituto de Educação da Universidade do Minho.

VALENTE, M. O. (Coord) (1989) *Manuais Escolares: Análise de Situação*. Lisboa: GEP e o Dpto de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

ANEXO 4

COURS DE MATHEMATIQUE DE BEZOUT

ELEMENTOS
DE
ANALYSE
POR
Mr. BEZOUT
TRADUZIDOS DO FRANCEZ.

SEGUNDA EDIÇÃO

Correcta e accommodada para o uso das Escolas de Mathematica da Universidade.

53003

TOMO II.

COIMBRA:

NA REAL IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

M.DCC.LXXXXIIII.

Com licença da Real Mesa da Commissaõ Geral sobre o Exame e Censura dos Livros, e Privilegio Real.

Application aux limites des Lignes courbes, & en général, aux limites des quantités, & aux questions de maximis & minimis.

41. Nous avons vu (33) que $\frac{dx}{dy}$ exprimoit la tangente de l'angle que la courbe ou sa tangente, fait en chaque point, avec l'ordonnée; & que $\frac{dy}{dx}$ exprimoit celle de l'angle que la courbe ou sa tangente fait avec l'axe des abscisses.

Donc, pour savoir en quel endroit la tangente d'une courbe devient parallele aux ordonnées, il faut chercher en quel endroit la valeur de $\frac{dx}{dy}$ devient zéro, ou ce qui revient au même, en quel endroit dx devient zéro, & pour savoir en quel endroit la tangente de la courbe est parallele aux abscisses, il faut chercher en quel endroit $\frac{dy}{dx}$ devient zéro, ou ce qui revient au même, en quel endroit dy est zéro. Car il est évident que dans le premier cas, l'angle de la courbe, avec les ordonnées est nul; & dans le second cas, l'angle de la courbe, avec les abscisses, est nul.

Il suit évidemment de là, que si l'on veut savoir si une courbe dont on a l'équation, a, dans quelque endroit, sa tangente parallele aux ordonnées ou abscisses, il faut différencier cette équation, & en ayant tiré la valeur de $\frac{dx}{dy}$, si l'on égale le numérateur de la valeur de $\frac{dx}{dy}$, à zéro, on aura une équation qui, conjointement avec l'équation même de la courbe, donnera la valeur de x & celle de y qui déterminent en quel endroit la tangente est parallele aux ordonnées; en sorte que si cela arrive en plusieurs endroits, on aura plusieurs valeurs pour x & plusieurs valeurs pour y.

Au contraire, si l'on égale le dénominateur à zéro, cette équation conjointement avec celle de la courbe, déterminera les valeurs de x & de y, qui répondent aux endroits où la tangente de la courbe devient parallele aux abscisses. Il faut cependant observer que quoique dx soit toujours zéro, quand la tangente est parallele aux ordonnées, & que dy soit zéro quand la tangente est parallele aux abscisses, on ne doit cependant lorsqu'on a trouvé la valeur ou les valeurs de x résultantes de la supposition $dx=0$, ou $dy=0$, en conclure que la tangente est parallele aux y ou aux x, qu'autant qu'on n'a pas en même temps $dx=0$ & $dy=0$.

Pour éclaircir ces regles, par un exemple familier, prenons la courbe qui a pour équation $yy + xx = 3ax - 2aa + 2by - bb$, qui, en supposant les x & les y perpendiculaires entr'elles, appartient au cercle, (*Alg.* 392).

Les lignes AP (*Fig.* 15.) sont x, & les lignes PM, PM' sont les deux valeurs de y que la résolution de cette équation donne pour chaque valeur de x.

Si l'on différencie cette équation, on aura $2ydy + 2xdx = 3adx + 2bdy$, d'où l'on tire $\frac{dx}{dy} = \frac{2y - 2b}{3a - 2x}$.

Egalons d'abord le numérateur à zéro, pour avoir les endroits où la tangente devient parallele aux ordonnées. Nous aurons $2y - 2b = 0$, ou $y = b$. Substituant cette valeur dans l'équation de la courbe, il vient $bb + xx = 3ax - 2aa + 2bb - bb$, ou $xx - 3ax = -2aa$, qui étant résolue donne $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa}$; c'est-à-dire; $x = 2a$, & $x = a$; ce qui nous apprend que la courbe, ou la tangente, devient parallele aux ordonnées, en deux points R & R', qui ont chacun pour ordonnée la ligne b, & dont l'un R, a pour abscisse la ligne $AQ = a$, & l'autre R', a pour abscisse la ligne $AQ' = 2a$.

Egalons maintenant à zéro, le dénominateur de la valeur de $\frac{dx}{dy}$, pour savoir en quel endroit la courbe, ou sa tangente, devient parallele aux abscisses : nous aurons $3a - 2x = 0$, ou $x = \frac{3}{2}a$. Substituant cette valeur dans l'équation de la courbe, nous aurons $yy + \frac{9}{4}aa = \frac{9}{2}aa - 2aa + 2by - bb$, ou $yy - 2by + bb = \frac{1}{4}aa$; & tirant la racine quarrée, $y - b = +\frac{1}{2}a$; donc $y = b + \frac{1}{2}a$; c'est-à-dire, $y = b + \frac{1}{2}a$, & $y = b - \frac{1}{2}a$; ce qui nous apprend que la tangente devient parallele aux abscisses, en deux endroits ou points T & T' qui ont pour abscisse commune la ligne $AS = \frac{3}{2}a$, & dont l'un T' a pour ordonnée $ST' = b + \frac{1}{2}a$, & l'autre T, a pour ordonnée la ligne $ST = b - \frac{1}{2}a$.

Les points Q & Q' sont ce qu'on appelle les *limites* des abscisses, parce qu'entre Q & Q', à chaque abscisse AP répondent des valeurs réelles PM & PM' pour y ; au lieu qu'entre Q & A, & au delà de Q' par rapport à A, il n'y a aucun point de la courbe, en sorte que si on suppose x plus petit que AQ ou a, ou bien plus grand que AQ' ou $2a$, on ne trouve aucune valeur réelle pour y. En effet, si dans l'équation on met au lieu de x une quantité $a - q$, plus petite que a, ou une quantité plus grande que $2a$, ou telle que

$aa + q$, on trouvera en résolvant l'équation, que les deux valeurs de y sont imaginaires.

Pareillement, si par le point A on conçoit AL parallele aux ordonnées, c'est-à-dire, l'axe des ordonnées ; & que par les points T & T' on mene les lignes TL, $T'L'$ paralleles aux abscisses ; les lignes $AL = ST = b - \frac{1}{2}a$, & $AL' = ST' = b + \frac{1}{2}a$, sont les limites des ordonnées ; car il est évident qu'il ne peut y avoir d'ordonnée plus grande que AL' ni plus petite que AL, la tangente devant être parallele aux abscisses. Aussi, si l'on met dans l'équation de la courbe, au lieu de y une quantité plus petite que $b - \frac{1}{2}a$, qu'on mette, par exemple, $b - \frac{1}{2}a - q$, on verra, en résolvant l'équation, que les valeurs de x sont imaginaires. La même chose arrivera si on met au lieu de y, la quantité $b + \frac{1}{2}a + q$, plus grande que $b + \frac{1}{2}a$.

43. L'ordonnée ST' est la plus grande de toutes celles qui aboutissent à la partie concave $RT'R'$ de la circonférence. L'ordonnée ST est la plus petite de toutes celles qui aboutissent à la partie convexe ; & les ordonnées QR & $Q'R'$ sont, tout à la fois, les plus petites qui aboutissent à la partie concave, & les plus grandes qui aboutissent à la partie convexe.

44. Ainsi, la même méthode sert en

même temps, 1°. à déterminer les limites des abſciſſes & des ordonnées ; 2°. à déterminer dans quels cas la tangente devient parallele aux abſciſſes, ou aux ordonnées ; 3°. enfin, à déterminer les plus grandes & les plus petites abſciſſes ou ordonnées.

45. Or, de quelque maniere qu'une quantité ſoit exprimée algébriquement, on peut toujours regarder l'expreſſion algébrique qui la repréſente, comme étant celle de l'ordonnée d'une ligne courbe. Par exemple, ſi $\frac{x^2 \times (a-x)}{aa}$ eſt l'expreſſion d'une quantité que j'appelle y, auquel cas j'ai $y = \frac{x^2 (a-x)}{aa}$, je puis regarder cette équation, comme étant celle d'une ligne courbe dont x ſeroit l'abſciſſe, & y l'ordonnée. Alors ſi la quantité $\frac{x^2 \times (a-x)}{aa}$ peut, dans un certain cas, devenir plus grande ou plus petite que dans tout autre, (ce qu'on appelle être ſuſceptible d'un *maximum* ou d'un *minimum*), il eſt viſible qu'il faut ſuivre exactement la même méthode que ci-deſſus ; c'eſt-à-dire, différencier cette équation, & en ayant tiré la valeur de $\frac{dx}{dy}$, égaler à zéro le numérateur ou le dénominateur de cette valeur.

46. C'eſt à cela que ſe réduit la méthode

qu'on appelle de *maximis & minimis*, qui est une des plus utiles de l'analyse, & qui a pour objet de faire trouver, entre plusieurs quantités qui croissent ou décroissent suivant une même loi, quelle est la plus grande ou la plus petite, ou en général celle qui a certaines propriétés dans le plus haut degré à l'égard de toutes ses semblables. Nous allons en donner quelques exemples, pris dans la géométrie & dans le calcul; la méchanique nous en fournira par la suite, qui seront tout à la fois & plus curieux & plus utiles.

47. Proposons-nous d'abord de partager un nombre donné a en deux parties, telles que leur produit soit plus grand qu'en le partageant de toute autre manière. Nommons x, l'une de ces parties; l'autre sera $a-x$, & le produit sera $ax-xx$; supposons-le $=y$, nous aurons $y=ax-xx$; donc en différenciant, $dy = adx - 2xdx$, & par conséquent $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a-2x}$; si on égale le numérateur à zéro, on aura $1=0$, ce qui est absurde: par conséquent s'il y a un *maximum*, ce n'est qu'en égalant le dénominateur à zéro, qu'on le trouvera. Egalons donc le dénominateur à zéro; nous aurons $a-2x=0$, qui donne $x=\frac{1}{2}a$, & nous apprend que de quelque manière qu'on partage un nombre

en deux parties, le produit de ces deux parties sera le plus grand qu'il est possible, lorsqu'elles seront chacune la moitié de ce nombre.

48. Lorsque, comme dans cet exemple, on a l'expression algébrique de la quantité, on peut se dispenser de l'égaler à une nouvelle variable y; il n'y a qu'à la différencier tout simplement, & égaler à zéro le numérateur ou le dénominateur, lorsque cette différentielle est une fraction. Ainsi dans ce même exemple je différencierois simplement $ax - xx$, & égalant à zéro la différentielle $adx - 2xdx$, j'aurois $adx - 2xdx = 0$, d'où je tire également $x = \frac{1}{2}a$.

49. Proposons-nous une question plus générale. Qu'il s'agisse, par exemple, de partager un nombre connu a, en deux parties telles que le produit d'une puissance déterminée de l'une des parties, par la même ou une autre puissance de l'autre partie, soit le plus grand qu'il est possible. Représentons par x la premiere partie, & par m la puissance à laquelle elle doit être élevée; la seconde partie sera $a - x$; représentons par n la puissance à laquelle elle doit être élevée, alors le produit en question sera $x^m (a - x)^n$. Différencions ce produit, & égalons la différentielle à zéro, nous aurons $m x^{m-1}$

$dx(a-x)^n - nx^m.(a-x)^{n-1}dx=0$. Divisant tout par $x^{m-1}dx(a-x)^{n-1}$, nous aurons $m(a-x)-nx=0$, ou $ma-mx-nx=0$, qui donne $x=\frac{ma}{m+n}$. Supposons, par exemple, qu'il ait été question de partager le nombre a en deux parties, telles que le quarré de l'une, multiplié par le cube de la seconde, soit le plus grand qu'il est possible; alors $m=2$, $n=3$. On a donc $x=\frac{2a}{2+3}$ $=\frac{2}{5}a$; c'est-à-dire, que l'une des parties doit être les $\frac{2}{5}$ du nombre ou de la quantité proposée; & l'autre doit, par conséquent, en être les trois cinquiemes.

Ce que nous avons dit ci-dessus, à l'occasion de la figure 15, fait voir qu'une quantité peut devenir la plus grande de toutes ses semblables, en deux manieres différentes : lorsque, comme PM' elle a été d'abord en croissant pour diminuer ensuite, ou lorsque, comme $P''M''$ elle va en croissant pour s'arrêter brusquement en devenant $Q'R'$; mais dans ce dernier cas, elle est tout à la fois la plus grande de toutes les ordonnées qui aboutissent à la partie convexe, & la plus petites de celles qui aboutissent à la partie concave. Pareillement une quantité peut devenir la plus petite de toutes ses semblables, en en deux manieres différentes : lorsque, comme PM elle va d'abord en diminuant pour augmenter ensuite; ou lorsque, comme $P''M''$, elle va en diminuant pour s'arrêter brusquement, & alors elle est tout à la fois un *minimum* & un *maximum*; elle est un *minimum* à l'égard de la branche $M'T'M''$, & un *maximum* à l'égard de la branche MTM''.

50. Ainsi, pour distinguer si une quantité est un *maximum*, ou un *minimum*, ou l'un & l'autre, il faut, en supposant que a marque la valeur de x, qui convient au *maximum* ou *minimum*, substituer dans la quantité proposée au lieu de x, successivement $a+q$, a, & $a-q$. Si les deux résultats extrêmes sont réels & plus petits que celui du milieu, la quantité est un *maximum*; si, au contraire, les deux résultats extrêmes sont plus grands que celui du milieu, la quantité est un *minimum* : enfin, si des deux résultats extrêmes l'un est imaginaire & l'autre réel, la quantité est tout à la fois un *maximum* & un *minimum*.

51. Lorsque dans la détermination d'un *maximum* ou d'un *minimum*, la valeur que l'on trouve pour la variable, rend celle du *maximum* ou du *minimum* négative, on doit conclure que le *maximum* ou le *minimum* qu'elle indique, n'appartient point à la

question actuelle, mais qu'il appartient à une question où quelques unes des conditions seroient contraires. Par exemple, si l'on demandoit de partager la ligne AB (*Fig* 16) au point C, de maniere que le quarré de la distance AC au point A, étant divisé par la distance au point B, donne le plus petit quotient possible ; alors nommant a la ligne donnée AB, & x la partie AC ; la partie restante CB seroit $a-x$, & par conséquent le quotient seroit $\frac{x^2}{a-x}$; différencions donc cette quantité, ou $x^2(a-x)^{-1}$; nous aurons $2xdx(a-x)^{-1}+x^2dx(a-x)^{-2}=0$, ou $\frac{2xdx}{a-x}+\frac{x^2dx}{(a-x)^2}=0$, ou $2axdx-x^2dx=0$, ou $(2a-x)x=0$, qui donne ou $x=0$, ou $2a-x=0$; la 1re valeur indique un *minimum*, mais qui est évident sans le calcul. Quant à la seconde qui donne $x=2a$, si on substitue cette valeur dans $\frac{x^2}{a-x}$, celle-ci devient $\frac{4a^2}{-a}$ ou $-4a$. Le *minimum* n'appartient donc pas à la question actuelle. Mais si l'on fait attention à la valeur $x=2a$ que l'on trouve, on verra que le point C ne peut être entre A & B ; mais que la question aura une solution, s'il s'agit de le trouver sur le prolongement de AB, au delà de B par rapport à A. Or dans ce cas, si nous nommons AC' x; la diſtance BC' ne ſera plus $a-x$, mais $x-a$, & la quantité dont il s'agiſſoit, ſera $\frac{x^2}{x-a}$, laquelle étant différenciée & égalée à zéro, donne $\frac{2xdx}{x-a}-\frac{x^2dx}{(x-a)^2}=0$, ou après les réductions faites, $x^2dx-2axdx=0$, qui donne $x=2a$, comme ci-devant, mais cette quantité ſubſtituée dans $\frac{x^2}{x-a}$, la change en $4a$ Il y a donc un *minimum* pour ce cas.

Si l'on égale le dénominateur $x-a$ de la differentielle, à zéro, on a $x=a$, qui indique un *maximum*: & en effet, lorſque $x=a$, la quantité devient infinie. Mais il n'a pas moins le vrai caractere du *maximum*, car ſoit qu'on ſuppoſe x plus petit ou plus grand que a, on trouve une quantité plus petite qu'en ſuppoſant $x=a$.

52. Lorſque l'expreſſion d'une quantité qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, renferme quelque multiplicateur ou quelque diviſeur conſtant, on peut ſupprimer ce multiplicateur ou ce diviſeur, avant que de différencier; en effet ſuppoſons que $\frac{ay}{b}$ repréſente généralement une quantité qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, a & b étant des conſtantes; il faut donc que $\frac{ady}{b}=0$;

et puisque a & b ne sont pas zéro, il faut que $dy = 0$; la conclusion est donc la même que si y seul eût dû être un *maximum* ou un *minimum*, c'est-à-dire, la même qu'en supprimant les facteurs & les diviseurs constants. Cette remarque sert à simplifier les calculs, dans plusieurs cas.

53. Proposons-nous maintenant, de trouver entre toutes les lignes que l'on peut mener par un même point D donné dans l'angle connu ABC (*Fig.* 17), quelle est celle qui forme avec les côtés de cet angle, le plus petit triangle possible.

Menons par le point D, la ligne DG parallele au côté AB, & supposant EF une droite quelconque tirée par le point D, abaissons DK perpendiculaire sur BC, & du point E où EF rencontre A[illegible], abaissons EI aussi perpendiculaire sur BC. La ligne BG est censée connue, ainsi que la perpendiculaire DK; nommons donc $BG = a$, $DK = b$, & la base BF du triangle BEF, nommons-la x. On voit que depuis un certain [illegible] EF croîtra, & [illegible] Au contraire, si [illegible] diminue, on conçoit que le triangle diminuera, mais [illegible] un certain terme seulement; car si [illegible] presque égal à BG, la droite [illegible] seroit presque parallele à AB, puisqu'elle seroit prête à se confonmement grand. Il y a donc une certaine valeur de BF qui donne le plus petit triangle possible. Pour la trouver, cherchons l'expression générale du triangle BEF. Or les triangles semblables BEF, GDF donnent $GF : BF :: DF : EF$; & les triangles semblables DKF & ELF donnent $DF : EF :: DK : EL$; donc $GF : BF :: DK : EL$; c'est-à-dire, $x - a : x :: b : EL = \frac{bx}{x-a}$; donc la surface du triangle BEF, qui est $\frac{EL \times BF}{2}$, sera $\frac{bx}{x-a} \times \frac{x}{2}$ ou $\frac{\frac{1}{2} bxx}{x-a}$. Il faut donc qu'en différenciant cette quantité, le numérateur ou le dénominateur devienne zéro, ou bien, comme on peut (52) supprimer le facteur constant $\frac{1}{2} b$, il suffira de différencier $\frac{xx}{x-a}$; mais sans refaire ce calcul que nous avons déjà rencontré (51), nous conclurons de même, que $x = 2a$; donc si l'on prend $BF = 2a = 2BG$, la ligne FDE que l'on tirera par le point D, donnera le triangle FBE pour le plus petit triangle demandé.

54. Cherchons maintenant parmi tous les parallélipipedes de même surface & de même hauteur, quel est celui qui a la plus grande capacité.

Nommons h la hauteur, cc la surface du parallélipipede ; x & y les deux côtés du rectangle qui sert de base. La surface totale est composée de six rectangles, dont deux ont chacun h pour côté ou pour hauteur, & x pour base ; deux autres ont h pour hauteur, & y pour base ; enfin les deux derniers ont x pour base, & y pour hauteur ; ainsi la surface totale a pour expression $2hx + 2hy + 2xy$; c'est-à-dire, que l'on a $2hx + 2hy + 2xy = cc$. Quant à la capacité ou solidité, elle est hxy. Puis donc qu'elle doit être la plus grande de toutes celles de même surface, il faut que sa différentielle $hxdy + hydx$ soit $= 0$, ou, (ce qui revient au même) il faut que $xdy + ydx = 0$. Mais l'équation $2hx + 2hy + 2yx = cc$, qui exprime que la surface de tous ces parallélipipedes est constante ou la même, donne $2hdx + 2hdy + 2xdy + 2ydx = 0$. Substituant donc, dans cette équation, la valeur de dx, tirée de la premiere, on aura, après les réductions faites, $y = x$; la base doit donc être un quarré. Pour en connoître le côté, il faut mettre pour y sa valeur x dans l'équation $2hx + 2hy + 2xy = cc$, qui deviendra par-là, $4hx + 2x^2 = cc$, & qui étant résolue, donne $x = -h \pm \sqrt{hh + \frac{1}{2}cc}$, dont la racine $x = -h - \sqrt{hh + \frac{1}{2}cc}$, étant négative, ne peut servir à la question présente ; ainsi la valeur convenable de x, est $x = -h + \sqrt{hh + \frac{1}{2}cc}$.

55. Si l'on demande, à présent, quelle doit être la hauteur h, pour que le parallélipipede ait la plus grande solidité de tous ceux de même surface; on remarquera que puisque la hauteur étant h, la base doit être un quarré, cette solidité sera exprimée par hxx; il faut donc que la différentielle de hxx, en regardant h & x comme variables, soit $=0$; on a donc $2hxdx + xxdh = 0$, ou $2hdx + xdh = 0$, en divisant par x. Mais l'équation $4hx + 2x^2 = cc$, qui exprime, alors, que la surface est constante, donne, en différenciant, $4hdx + 4xdh + 4xdx = 0$; mettant donc, dans celle-ci, pour dh, sa valeur tirée de l'équation $2hdx + xdh = 0$, on aura, après les réductions faites, $h = x$; donc le parallélipipede cherché doit être un cube, puisque son côté, ou sa hauteur h, doit être égal au côté x du quarré qui sert de base. Pour trouver maintenant le côté de ce cube, il faut mettre pour h, sa valeur x dans l'équation $4hx + 2x^2 = cc$, qui deviendra $4x^2 + 2x^2 = cc$, ou $6x^2 = cc$, qui donne $x = \sqrt{\frac{cc}{6}}$. Donc, de tous les parallélipipedes de même surface, celui qui a la plus grande solidité, est le cube qui a pour côté une ligne égale à la racine quarrée de la sixieme partie de cette surface.

56. Cherchons, maintenant, entre tous les triangles de même contour & de même base, quel est celui qui a la plus grande surface.

Soit a la base AB, & c le contour du triangle ABC (*Fig.* 18). Abaissons la perpendiculaire CP, & nommons AP, x; CP, y; nous aurons $PB = a - x$, $AC = \sqrt{xx + yy}$ & $CB = \sqrt{\overline{a-x}^2 + yy}$. Donc le contour sera $\sqrt{xx + yy} + \sqrt{\overline{a-x}^2 + yy} + a$, & la surface sera $\frac{ay}{2}$; on aura donc $\sqrt{xx + yy} + \sqrt{\overline{a-x}^2 + yy} + a = c$, & il faudra que la différentielle de $\frac{ay}{2}$ soit $= 0$; c'est-à-dire, qu'on aura $\frac{a\,dy}{2} = 0$, & par conséquent $dy = 0$. Or l'équation qui exprime que le contour est constant, étant différenciée, donnera $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{xx + yy}} + \frac{-\overline{a-x}\,dx + y\,dy}{\sqrt{(a-x)^2 + yy}} = 0$, qui, à cause que $dy = 0$, se réduit à $\frac{x\,dx}{\sqrt{xx + yy}} - \frac{(a - x)\,dx}{\sqrt{(a - x)^2 + yy}} = 0$, ou divisant par dx, & chassant les fractions, $x\sqrt{(a-x)^2 + yy} = \overline{a - x}\,.\sqrt{xx + yy}$. Quarrant on aura $xx\,.\,\overline{a - x}^2 + xxyy = \overline{a - x}^2\,.\,xx + \overline{a-x}^2\,.\,yy$; faisant les opérations indiquées, supprimant de part & d'autre les termes égaux, & réduisant, nous aurons $xx = a - x$, ou $xx = aa - 2ax + xx$, qui donne $x = \frac{1}{2}a$, & nous fait voir que le triangle doit être isoscele. Ainsi il faut du milieu de AB, élever une perpendiculaire, & ayant décrit du point B comme centre & d'un rayon égal à la moitié de l'excès du contour c sur la base a, un arc qui coupe cette perpendiculaire en C, si l'on tire CB & CA, on aura le triangle qui a la plus grande surface de tous ceux de même contour & de même base.

57. Si l'on veut savoir maintenant, quel est, généralement, entre tous les triangles de même contour, celui qui a la plus grande surface, il faut remarquer que quelle que soit la base, on voit par la solution précédente, que x doit toujours en être la moitié; c'est-à-dire, que quel que soit a, on doit toujours avoir $x = \frac{1}{2}a$. Cela étant, l'équation qui exprime le contour, se réduira à $\sqrt{\frac{1}{4}aa + yy} + \sqrt{\frac{1}{4}aa + yy} + a = c$, ou $2\sqrt{\frac{1}{4}aa + yy} = c - a$; quarrant, on aura $aa + 4yy = cc - 2ac + aa$; qui donne $y = \sqrt{\frac{cc - 2ac}{4}}$. La surface du triangle qui est généralement $\frac{ay}{2}$, sera donc $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{cc - 2ac}{4}}$. Puis donc qu'elle doit être la plus grande de toutes celles de même contour, quelle que

ſoit d'ailleurs la baſe a, il faut égaler à zéro la différentielle de $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{cc-2ac}{4}}$ ou de $a\sqrt{cc-2ac}$, priſe en regardant a comme variable Nous aurons donc $d(a\sqrt{cc-2ac})$ ou $d(a(cc-2ac)^{\frac{1}{2}})$, c'eſt-à-dire, $da\,(cc-2ac)^{\frac{1}{2}} - a.c\,da(cc-2ac)^{-\frac{1}{2}} = 0$, ou $da\sqrt{cc-2ac} - \frac{cada}{\sqrt{cc-2ac}} = 0$, ou $da\,(cc-2ac) - cada = 0$, ou $ccda - 3cada = 0$, d'où l'on tire $a = \frac{c}{3}$; donc la baſe a doit être le tiers du contour : & puiſque nous avons vu d'ailleurs que le triangle devoit être iſoſcele, il s'enſuit donc qu'il doit être équilatéral. Donc de tous les triangles de même contour, le triangle équilatéral eſt celui qui a la plus grande ſurface.

58. Dans ces deux ſolutions, nous n'avons pas égalé le dénominateur à zéro; parce que, dans la premiere, cela nous auroit donné pour x une valeur imaginaire ; & dans la ſeconde, nous aurions trouvé $a = \frac{1}{2}c$, qui n'auroit point ſatisfait, non plus, à la queſtion ; puiſque ſi la baſe étoit la moitié du contour, les deux autres côtés ſe confondroient avec cette baſe, & le triangle ſeroit alors zéro. A l'avenir, lorſque le numérateur ou le dénominateur, égalé à zéro, ne nous conduira point à une ſolution admiſſible,

nous n'en ferons pas mention pour ne pas nous arrêter à des recherches inutiles.

59. Dans l'avant derniere queſtion nous ne ſommes pas parvenus à déterminer, entre tous les parallélipipedes de même ſurface, celui qui avoit la plus grande capacité, qu'après avoir conſidéré les parallélipipedes de même hauteur. Pareillement, dans la derniere queſtion nous avons déterminé entre tous les triangles de même contour, quel étoit celui qui avoit la plus grande ſurface; mais en commençant par réſoudre la queſtion pour les triangles de même baſe.

Il eſt ordinairement plus ſimple d'en uſer ainſi; c'eſt-à-dire, de réſoudre la queſtion en ne faiſant varier enſemble que le plus petit nombre poſſible de quantités, & faiſant varier enſuite & ſucceſſivement chacune des quantités qui ont été traitées comme conſtantes. Par exemple, ſi l'on demandoit de partager un nombre donné, en trois parties, de maniere que le produit de ces trois parties fût le plus grand qu'il eſt poſſible; en nommant x & y deux de ces parties, & a le nombre donné, la troiſieme ſeroit $a - x - y$, & le produit des trois parties ſeroit $xy\,(a - x - y)$, dont il faudroit égaler la différentielle à zéro. Mais au lieu de différencier en regardant x & y comme variables en même temps, je ne regarderai d'abord que x comme variable; j'aurai donc $aydx - 2xydx - y^2dx = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{1}{2}(a - y)$. Le produit $xy(a - x - y)$ ſe change donc en $\frac{1}{4}y\,(a - y)^2$. Je différencie maintenant, en faiſant varier y, & j'ai $\frac{1}{4}dy(a - y)^2 - \frac{2}{4}ydy(a-y)$ que j'égale pareillement à zéro, & j'ai $dy\,(a-y)^2 - 2ydy\,(a-y) = 0$, d'où je tire $y = \frac{1}{3}a$; donc x, & la troiſieme partie $a - x - y$, ſont chacune $\frac{1}{3}a$.

60. On peut auſſi faire varier enſemble, ſi l'on veut, toutes les quantités variables, puis raſſemblant tous les termes qui ſont multipliés par la différentielle d'une même variable, égaler leur ſomme à zéro, & faire la même choſe à l'égard de la différentielle de chaque variable. Ainſi, dans le dernier exemple, j'aurois $aydx + axdy - 2xydx - x^2dy - 2xydy - y^2dx = 0$, égalant ſéparément à zéro, la ſomme des termes affectés de dx, & celle des termes affectés de dy, j'ai $aydx - 2xydx - y^2dx = 0$, & $axdy - x^2dy - 2xydy = 0$; ou, en diviſant la premiere par ydx & la ſeconde par xdy, $a - 2x - y = 0$ & $a - x - 2y = 0$, équation dont il eſt facile de conclure $x = \frac{1}{3}a$, & $y = \frac{1}{3}a$, comme ci-deſſus.

La raiſon de ce procédé eſt facile à appercevoir, en remarquant qu'il n'y a ici d'autre condition à remplir, sinon que la différentielle totale soit zéro. Or, cette condition ne peut être remplie généralement, que de deux manieres; ou, en supposant que chacune des deux différentielles dx & dy, est égale à zéro, ce qui satisferoit en effet à l'équation, mais ne feroit rien connoître; ou bien, en supposant que la somme des termes qui multiplient dx, ainsi que celle des termes qui multiplient dy, sont chacune zéro; ce qui est précisément ce que nous avons prescrit.

61. Lorsque les conditions de la question sont exprimées par plusieurs équations, il faut avant d'appliquer cette regle à l'équation differentielle qui doit déterminer le *maximum* ou le *minimum*, tirer des autres équations différenciées, les valeurs des différentielles d'autant de variables qu'il y a d'équations outre celle là, & les introduire dans cette même équation; alors on applique la regle comme s'il n'y avoit eu que cette seule équation. Ainsi, dans l'exemple, ci-dessus, du plus grand parallélipipede, nous avions cette équation $2hx+2hy+2xy=cc$, & la condition que hxy devoit être un *maximum*. Si donc nous voulons regarder tout à la fois, h, x & y comme variables, l'équation $2hx+$&c. donnera en différenciant, $2hdx+2xdh+2hdy+2ydh+2xdy+2ydx=0$; & la condition du *maximum* donnera $hxdy+hydx+xydh=0$. De la premiere je tire $dh=$

$$\frac{-ydx-xdy-hdy-hdx}{x+y}$$

; substituant cette valeur dans la seconde, j'ai, après les réductions ordinaires, $hx^2dy+hy^2dx-xy^2dx-x^2ydy=0$. Je puis maintenant égaler à zéro, la somme des termes qui multiplient dx, & celles des termes qui multiplient dy. J'aurai $hy^2-xy^2=0$ ou $h=x$, & $hx^2-x^2y=0$, d'où en divisant tout, par le facteur commun x^2, on tire $h-y=0$, qui donne $h=y$; & puisque l'on a $h=x$, on a donc aussi $y=x$; les trois dimensions h, x, y, sont donc égales, ce qui s'accorde avec la premiere solution: & en mettant ces valeurs dans l'équation $2hx+2hx+2yx=cc$, on a $6h^2=cc$, qui donne $h=\sqrt{\frac{cc}{6}}$, comme dans cette même résolution.

62. Non-seulement on peut ne faire varier les quantités que successivement, ou les faire varier toutes à la fois, mais on peut encore prendre pour constantes telles fonctions que l'on voudra de ces quantités, pourvu que le nombre de ces nouvelles

conditions arbitraires, réuni à celui des conditions de la question, ne soit pas plus grand que le nombre des variables, x, y &c. qui entrent dans la question. Cette remarque peut être de la plus grande utilité dans plusieurs questions, principalement quand il y a des quantités radicales, en voici un exemple. Qu'il s'agisse de trouver entre tous les quadrilateres de même contour, quel est celui qui auroit la plus grande surface. Si des angles C & D (*Fig.* 19.) on abaisse les perpendiculaires DE & CF sur le côté AB, & que du point D on mene DK parallele à AB; alors nommant AE, s; DE, t; AF, u; CF, x & BF, y; à cause des triangles rectangles, on aura $DA = \sqrt{ss+tt}$, $DC = \sqrt{(s+u)^2 + (x-t)^2}$, $CB = \sqrt{xx+yy}$; donc si a marque le contour, on aura $\sqrt{ss+tt} + \sqrt{(s+u)^2 + (x-t)^2} + \sqrt{xx+yy} + u + y = a$. D'un autre côté, la surface $ABCD$, vaut le trapeze $DEFC$, moins le triangle DAE, plus le triangle CFB; c'est-à-dire, $(t+x)\left(\frac{s+u}{2}\right) - \frac{st}{2} + \frac{xy}{2}$. Cela posé, il faudroit donc différencier cette quantité & l'équation précédente. Mais les quantités radicales, rendroient la suite du calcul très-compliquée. Pour éviter ces difficultés, nous supposerons d'abord que les trois quantités radicales sont constantes, ce qui nous donnera $d(\sqrt{ss+tt}) = 0$, ou $\frac{sds+tdt}{\sqrt{ss+tt}}$, & par conséquent $sds + tdt = 0$; on trouvera de même, par la seconde quantité radicale, $(s+u)(ds+du) + (x-t)(dx-dt) = 0$; & par la troisieme, $xdx + ydy = 0$. Or, l'équation du contour étant différenciée dans cette même supposition, donne $du + dy = 0$, & la condition du *maximum* de la surface, donne $(s+u)(dt+dx) + (t+x)(ds+du) - tds - sdt + xdy + ydx = 0$, ou $udt + sdx + udx + tdu + xds + xdu + xdy + ydx = 0$. La premiere équation différentielle, donne $ds = -\frac{tdt}{s}$; la troisieme donne $dx = -\frac{ydy}{x}$; & la quatrieme donne $du = -dy$. Substituant dans la seconde & dans la cinquieme, on a, après les réductions faites $-(tdt + sdy)(u+s)x - (ydy + xdt)(x-t)s = 0$, & $suxdt - suydy - ssydy - tsxdy - x^2tdt - sy^2dy = 0$; si l'on tire de celle ci la valeur de dt, on verra que tous les termes du numérateur sont affectés de s, & qu'en substituant dans la précédente, tous les termes seront auſſi affectés de s on aura donc $s = o$; ce qui nous apprend que l'angle DAB doit être droit : cela poſé, l'equation du contour devient $t + \sqrt{uu + (x - t)^2} + \sqrt{xx + yy} + u + y = a$, & l'expreſſion de la ſurface devient $(t + x)\frac{u}{2} + \frac{xy}{2} = o$. Différencions donc en ne ſuppoſant plus que les deux radicaux conſtants. Nous aurons $udu + (x - t)(dx - dt) = o$; $xdx + ydy = o$, $dt + du + dy = o$ & $u(dt + dx) + (t + x)du + xdy + ydx = o$. La ſeconde de ces equations donne $dy = -\frac{xdx}{y}$; la troiſieme donne $dt = -du - dy$, ou $dt = \frac{xdx - ydu}{y}$, ces valeurs ſubſtituées dans la premiere & la quatrieme donnent $ydu + (x - t)(ydx - xdx + ydu) = o$, & $u(xdx - ydu + ydx) + (t + x)ydu - x^2dx + y^2dx = o$; or, ſi de l'une des deux on tire la valeur de dx, & qu'on la ſubſtitue dans l'autre, on aura une équation dont tous les termes ſeront multipliés par y, & qui par conſéquent donne $y = o$, & fait voir que l'angle CBA doit auſſi être droit. Cela étant, l'équation du contour devient $t + \sqrt{uu + (x - t)^2} + x + u = a$; & l'expreſſion de la ſurface devient $(t + x) \times \frac{u}{2}$. Différencions donc en ne ſuppoſant plus d'autre quantité conſtante que le radical. Nous aurons $udu + (x - t)(dx - dt) = o$, $dt + dx + du = o$, $u(dt + dx) + (t + x)du = o$; la ſeconde donne $dt = -dx - du$; ſubſtituant dans les deux autres on a $udu + (x - t)(2dx + du) = o$ & $-udu + (t + x)du = o$; or celle ci donne $du = o$; donc la précédente ſe réduit à $(x - t)2dx = o$ qui donne $x = t$. Cela poſé, l'équation du contour ſe réduit à $2t + 2u = a$, & celle de la ſurface, à tu; on a donc $dt + du = o$ & $tdu + udt = o$; la premiere donne $dt = -du$, ce qui change la ſeconde en $tdu - udu = o$; & par conſequent $t = u$; donc les lignes AB, AD, AC, CB, ſont toutes égales, & puiſque l'angle A doit être droit, le quadrilatere cherché doit être un quarré.

Au reſte, on pourroit trouver cette propriété plus facilement ; mais ce n'étoit point là notre objet principal ; il s'agiſſoit de faire voir comment la liberté de prendre telle ou telle quantité pour conſtante, peut dans bien des occaſions, donner les moyens de faciliter le calcul ; & cet exemple y étoit trèspropre, car sans cela le calcul seroit très composé. On peut appliquer des idées semblables, aux autres polygones, & on trouvera qu'en général de toutes les figures d'un même contour & d'un même nombre de côtés, celle qui a la plus grande surface est toujours le polygone régulier de ce même nombre de côtés; d'où il suit que de toutes les figures de même contour, le cercle est celle qui a la plus grande surface.

Des Points multiples.

63. Nous avons examiné ce qui arrivoit lorsque l'une des deux différentielles dx ou dy, ou (ce qui revient au même) lorsque le numérateur ou le dénominateur de la valeur de $\frac{dx}{dy}$ devenoit zéro, & nous avons vu que l'un de ces deux cas avoit toujours lieu lorsqu'il y avoit un *maximum* ou un *minimum*. Mais lorsque le numérateur & le dénominateur de la valeur de $\frac{dx}{dy}$ deviennent zéro en même temps, qu'arrive-t-il alors, & à quoi se réduit la valeur de $\frac{dx}{dy}$?

Pour répondre à ces questions, nous observerons d'abord que lorsqu'on a différencié l'équation d'une courbe, comme il n'y a plus que des termes multipliés par dx & des termes multipliés par dy, on peut en appellant A la somme des premiers, & B celle des seconds, représenter l'équation différentielle, par $Adx + Bdy = 0$. Cette équation donne $\frac{dx}{dy} = \frac{B}{A}$; or, pour que B & A deviennent zéro en même temps, il faut qu'ils aient un commun diviseur, qui devenant zéro lorsque x & y ont certaines valeurs, rend B & A égaux à zéro en même temps. Par exemple, dans la courbe qui a pour équation $y^2 = \frac{x(a-x)^2}{a}$, on a $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{(a-x)^2 - 2x(a-x)}$, ou, en mettant pour y, sa valeur, $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{2a(a-x)\sqrt{\frac{x}{a}}}{(a-x)^2 - 2x(a-x)}$ quantité qui devient $\frac{0}{0}$, lorsque $x = a$; mais on voit en même temps, que $a - x$ est diviseur commun du numérateur & du dénom-

ANEXO 1

ELEMENTOS DE EUCLIDES

THE THIRTEEN BOOKS OF EUCLID'S ELEMENTS

TRANSLATED FROM THE TEXT OF HEIBERG

WITH INTRODUCTION AND COMMENTARY

BY

SIR THOMAS L. HEATH,

K.C.B., K.C.V.O., F.R.S.,

SC.D. CAMB., HON. D.SC. OXFORD

HONORARY FELLOW (SOMETIME FELLOW) OF TRINITY COLLEGE CAMBRIDGE

SECOND EDITION

REVISED WITH ADDITIONS

VOLUME II

BOOKS III—IX

DOVER PUBLICATIONS, INC.

NEW YORK

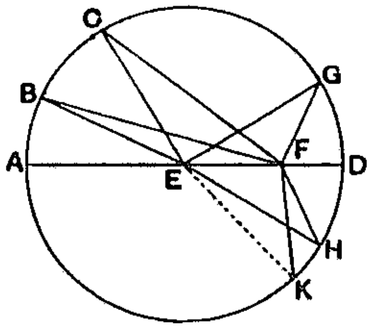
PROPOSITION 7.

If on the diameter of a circle a point be taken which is not the centre of the circle, and from the point straight lines fall upon the circle, that will be greatest on which the centre is, the remainder of the same diameter will be least, and of the rest the nearer to the straight line through the centre is always greater than the more remote, and only two equal straight lines will fall from the point on the circle, one on each side of the least straight line.

Let *ABCD* be a circle, and let *AD* be a diameter of it; on *AD* let a point *F* be taken which is not the centre of the circle, let *E* be the centre of the circle,

and from *F* let straight lines *FB*, *FC*, *FG* fall upon the circle *ABCD*;

I say that *FA* is greatest, *FD* is least, and of the rest *FB* is greater than *FC*, and *FC* than *FG*.



For let *BE*, *CE*, *GE* be joined.

Then, since in any triangle two sides are greater than the remaining one, [I. 20]

EB, *EF* are greater than *BF*.

But *AE* is equal to *BE*;

therefore *AF* is greater than *BF*.

Again, since *BE* is equal to *CE*, and *FE* is common,

the two sides *BE*, *EF* are equal to the two sides *CE*, *EF*.

But the angle *BEF* is also greater than the angle *CEF*;

therefore the base *BF* is greater than the base *CF*. [I. 24]

For the same reason

CF is also greater than *FG*.

Again, since *GF*, *FE* are greater than *EG*,

and *EG* is equal to *ED*,

GF, *FE* are greater than *ED*.

Let *EF* be subtracted from each;

therefore the remainder *GF* is greater than the remainder *FD*.

Therefore *FA* is greatest, *FD* is least, and *FB* is greater than *FC*, and *FC* than *FG*.

I say also that from the point F only two equal straight lines will fall on the circle $ABCD$, one on each side of the least FD.

For on the straight line EF, and at the point E on it, let the angle FEH be constructed equal to the angle GEF [I. 23], and let FH be joined.

Then, since GE is equal to EH, and EF is common,

the two sides GE, EF are equal to the two sides HE, EF;

and the angle GEF is equal to the angle HEF;

therefore the base FG is equal to the base FH. [I. 4]

I say again that another straight line equal to FG will not fall on the circle from the point F.

For, if possible, let FK so fall.

Then, since FK is equal to FG, and FH to FG,

FK is also equal to FH,

the nearer to the straight line through the centre being thus equal to the more remote: which is impossible.

Therefore another straight line equal to GF will not fall from the point F upon the circle;

therefore only one straight line will so fall.

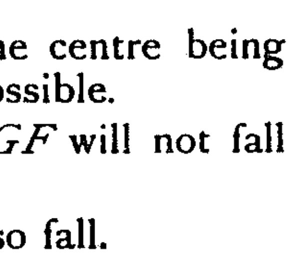
Therefore etc.

Q. E. D.

4. **of the same diameter.** I have inserted these words for clearness' sake. The text has simply ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή, "and the remaining (straight line) least."

7, 39. **one on each side.** The word "one" is not in the Greek, but is necessary to give the force of ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης, literally "on both sides," or "on each of the two sides, of the least."

De Morgan points out that there is an unproved assumption in this demonstration. We draw straight lines *from* F, as FB, FC, such that the angle DFB is greater than the angle DFC and then assume, with respect to the straight lines drawn *from the centre* E to B, C, that the angle DEB is greater than the angle DEC. This is most easily proved, I think, by means of the converse of part of the theorem about the lengths of different straight lines drawn to a given straight line from an external point which was mentioned above in the note on III. 2. This converse would be to the effect that, *If two unequal straight lines be drawn from a point to a given straight line which are not perpendicular to the straight line, the greater of the two is the further from the perpendicular from the point to the given straight line.* This can either be proved from its converse by *reductio ad absurdum*, or established directly by means of I. 47. Thus, in the accompanying figure, FB must cut EC in some point M, since the angle BFE is less than the angle CFE.



Therefore EM is less than EC, and therefore than EB.

Hence the point B in which FB meets the circle is further from the foot of the perpendicular from E on FB than M is;

therefore the angle BEF is greater than the angle CEF.

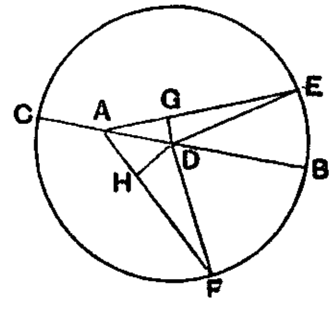
Another way of enunciating the first part of the proposition is that of Mr H. M. Taylor, viz. "Of all straight lines drawn to a circle from an internal point not the centre, the one which passes through the centre is the greatest, and the one which when produced passes through the centre is the least; and of any two others the one which *subtends the greater angle at the centre* is the greater." The substitution of the *angle subtended at the centre* as the criterion no doubt has the effect of avoiding the necessity of dealing with the unproved assumption in Euclid's proof referred to above, and the similar substitution in the enunciation of the first part of III. 8 has the effect of avoiding the necessity for dealing with like unproved assumptions in Euclid's proof, as well as the complication caused by the distinction in Euclid's enunciation between lines falling from an external point on the *convex circumference* and on the *concave circumference* of a circle respectively, terms which are not defined but taken as understood.

Mr Nixon (*Euclid Revised*) similarly substitutes as the criterion the angle subtended at the centre, but gives as his reason that the words "nearer" and "more remote" in Euclid's enunciation are scarcely clear enough without some definition of the sense in which they are used, Smith and Bryant make the substitution in III. 8, but follow Euclid in III. 7.

On the whole, I think that Euclid's plan of taking straight lines drawn from the point which is not the centre direct to the circumference and making greater or less angles *at that point* with the straight line containing it and the centre is the more instructive and useful of the two, since it is such lines drawn in any manner to the circle from the point which are immediately useful in the proofs of later propositions or in resolving difficulties connected with those proofs.

Heron again (an-Nairīzī, ed. Curtze, pp. 114—5) has a note on this proposition which is curious. He first of all says that Euclid proves that lines *nearer the centre* are greater than those more remote *from it*. This is a different view of the question from that taken in Euclid's proposition as we have it, in which the lines are not nearer to and more remote from the *centre* but from *the line through the centre*. Euclid takes lines inclined to the latter line at a greater or less angle; Heron introduces distance *from the centre* in the sense of Deff. 4, 5, i.e. in the sense of *the length of the perpendicular* drawn to the line from the centre, which Euclid does not use till III. 14, 15. Heron then observes that in Euclid's proposition the lines compared are all drawn on one side of the line through the centre, and sets himself to prove the same truth of lines on *opposite* sides which are more or less distant *from the centre*. The new point of view necessitates a quite different line of proof, anticipating the methods of later propositions.

The first case taken by Heron is that of two straight lines such that the perpendiculars from the centre on them fall on the lines themselves and not in either case on the line produced.



Let A be the given point, D the centre, and let AE be nearer the centre than AF, so that the perpendicular DG on AE is less than the perpendicular DH on AF.

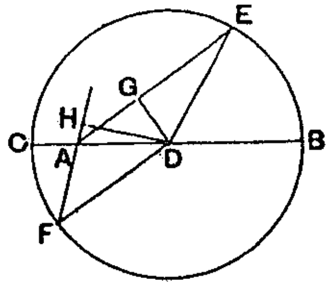
Then sqs. on DG, GE = sqs. on DH, HF,

and sqs. on DG, GA = sqs. on DH, HA.

But sq. on DG < sq. on DH.

Therefore sq. on $GE >$ sq. on HF,
and sq. on $GA >$ sq. on HA,
whence $GE > HF$,
$GA > HA$.

Therefore, by addition, $AE > AF$.

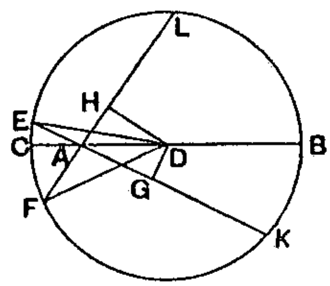


The other case taken by Heron is that where one perpendicular falls on the line produced, as in the annexed figure. In this case we prove in like manner that $GE > HF$,
and $GA > AH$.

Thus AE is greater than the sum of HF, AH, whence, *a fortiori*, AE is greater than the difference of HF, AH, i.e. than AF.

Heron does not give the third possible case, that, namely, where *both* perpendiculars fall on the lines produced. The fact is that, in this case, the foregoing method breaks down. Though AE be nearer to the centre than AF in the sense that DG is less than DH,

AE is not greater but *less* than AF.



Moreover this cannot be proved by the same method as before.

For, while we can prove that

$$GE > HF,$$
$$GA > AH,$$

we cannot make any inference as to the comparative length of AE, AF.

To judge by Heron's corresponding note to III. 8, he would, to prove this case, practically prove III. 35 first, i.e. prove that, if EA be produced to K and FA to L,

$$\text{rect. } FA, AL = \text{rect. } EA, AK,$$

from which he would infer that, since $AK > AL$ by the first case,

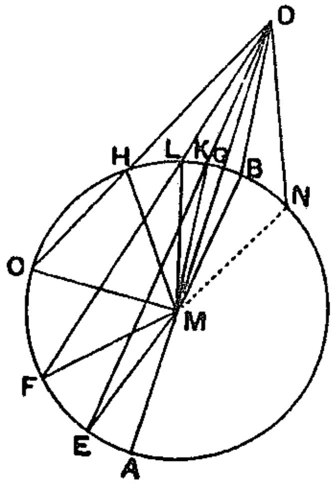
$$AE < AF.$$

An excellent moral can, I think, be drawn from the note of Heron. Having the appearance of supplementing, or giving an alternative for, Euclid's proposition, it cannot be said to do more than confuse the subject. Nor was it necessary to find a new proof for the case where the two lines which are compared are on *opposite* sides of the diameter, since Euclid shows that for each line from the point to the circumference on one side of the diameter there is another of the same length equally inclined to it on the other side.

Proposition 8.

If a point be taken outside a circle and from the point straight lines be drawn through to the circle, one of which is through the centre and the others are drawn at random, then, of the straight lines which fall on the concave circumference, that through the centre is greatest, while of the rest *the nearer to that through the centre is always greater than the more remote, but, of the straight lines falling on the convex circumference, that between the point and the diameter is least, while of the rest the nearer to the least is always less than the more remote, and only two equal straight lines will fall on the circle from the point, one on each side of the least.*

Let ABC be a circle, and let a point D be taken outside ABC; let there be drawn through from it straight lines DA, DE, DF, DC, and let DA be through the centre; I say that, of the straight lines falling on the concave circumference $AEFC$, the straight line DA through the centre is greatest,



while DE is greater than DF and DF than DC;

but, of the straight lines falling on the convex circumference $HLKG$, the straight line DG between the point and the diameter AG is least; and the nearer to the least DG is always less than the more remote, namely DK than DL, and DL than DH.

For let the centre of the circle ABC be taken [III. 1], and let it be M; let ME, MF, MC, MK, ML, MH be joined.

Then, since AM is equal to EM,

let MD be added to each;

therefore AD is equal to EM, MD.

But EM, MD are greater than ED; [I. 20]

therefore AD is also greater than ED.

Again, since ME is equal to MF,

and MD is common,

therefore EM, MD are equal to FM, MD;

and the angle EMD is greater than the angle FMD;

therefore the base ED is greater than the base FD. [I. 24]

Similarly we can prove that FD is greater than CD; therefore DA is greatest, while DE is greater than DF, and DF than DC.

Next, since MK, KD are greater than MD, [I. 20]
and MG is equal to MK,
therefore the remainder KD is greater than the remainder GD,

so that GD is less than KD.

And, since on MD, one of the sides of the triangle MLD, two straight lines MK, KD were constructed meeting within the triangle,
therefore MK, KD are less than ML, LD; [I. 21]
and MK is equal to ML;

therefore the remainder DK is less than the remainder DL.

Similarly we can prove that DL is also less than DH;

therefore DG is least, while DK is less than DL, and DL than DH.

I say also that only two equal straight lines will fall from the point D on the circle, one on each side of the least DG.

On the straight line MD, and at the point M on it,
let the angle DMB be constructed equal to the angle KMD, and let DB be joined.

Then, since MK is equal to MB,
and MD is common,

the two sides KM, MD are equal to the two sides BM, MD respectively;
and the angle KMD is equal to the angle BMD;

therefore the base DK is equal to the base DB. [I. 4]

I say that no other straight line equal to the straight line DK will fall on the circle from the point D.

For, if possible, let a straight line so fall, and let it be DN.

Then, since DK is equal to DN,
while DK is equal to DB,

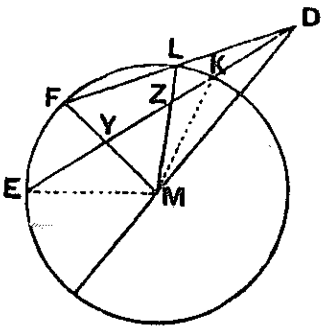
DB is also equal to DN,

that is, the nearer to the least DG equal to the more remote: which was proved impossible.

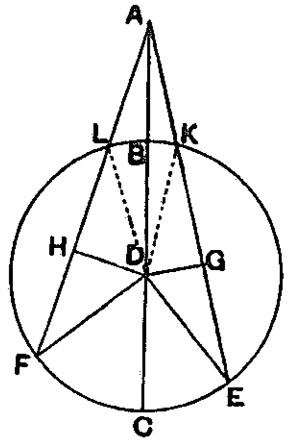
Therefore no more than two equal straight lines will fall on the circle ABC from the point D, one on each side of DG the least.

Therefore etc.

As De Morgan points out, there are here two assumptions similar to that tacitly made in the proof of III. 7, namely that K falls within the triangle DLM and E outside the triangle DFM. These facts can be proved in the same way as the assumption in III. 7. Let DE meet FM in Y and LM in Z. Then, as before, MZ is less than ML and therefore than MK. Therefore K lies further than Z from the foot of the perpendicular from M on DE. Similarly E lies further than Y from the foot of the same perpendicular.



Heron deals with lines on *opposite* sides of the diameter through the external point in a manner similar to that adopted in his previous note.



For the case where E, F are the *second* points in which AE, AF meet the circle the method answers well enough.

If AE is *nearer the centre* D than AF is,

sqs. on DG, GE = sqs. on DH, HF

and sqs. on DG, GA = sqs. on DH, HA,

whence, since $DG < DH$,

it follows that $GE > HF$,

and $AG > AH$,

so that, by addition, $AE > AF$.

But, if K, L be the points in which AE, AF *first* meet the circle, the method fails, and Heron is reduced to proving, in the first instance, the property usually deduced from III. 36. He argues thus:

AKD being an obtuse angle,

sq. on AD = sum of sqs. on AK, KD and twice rect. AK, KG. [II. 12]

ALD is also an obtuse angle, and it follows that

sum of sqs. on AK, KD and twice rect. AK, KG is equal to sum of sqs. on AL, LD and twice rect. AL, LH.

Therefore, the squares on KD, LD being equal,

sq on AK and twice rect. AK, KG = sq. on AL and twice rect. AL, LH,

or sq on AK and rect. AK, KE = sq. on AL and rect. AL, LF,

i.e. rect. AK, AE = rect. AL, AF.

But, by the first part, $AE > AF$.

Therefore $AK < AL$.

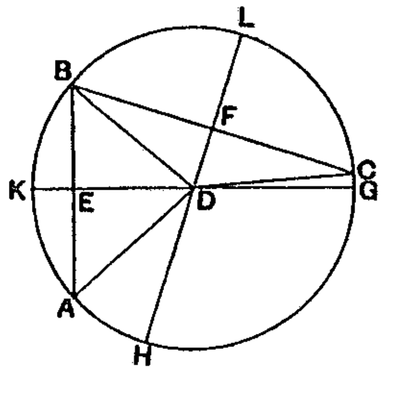
III. 7, 8 deal with the lengths of the several lines drawn to the circumference of a circle (1) from a point within it, (2) from a point outside it; but a similar proposition is true of straight lines drawn from a point on the circumference itself: *If any point be taken on the circumference of a circle, then, of all the straight lines which can be drawn from it to the circumference, the greatest is that in which the centre is; of any others that which is nearer to the straight line which passes through the centre is greater than one more remote; and from the same point there can be drawn to the circumference two straight lines, and only two, which are equal to one another, one on each side of the greatest line.*

The converses of III. 7, 8 and of the proposition just given are also true and can easily be proved by *reductio ad absurdum*. They could be employed to throw light on such questions as that of internal contact, and the relative position of the centres of circles so touching. This is clear when part of the converses is stated: thus (1) if from any point in the plane of a circle a number of straight lines be drawn to the circumference of the circle, and one of these is greater than any other, the centre of the circle must lie on that one, (2) if one of them is less than any other, then, (*a*) if the point is within the circle, the centre is on the minimum straight line produced *beyond the point*, (*b*) if the point is outside the circle, the centre is on the minimum straight line produced *beyond the point in which it meets the circle*.

PROPOSITION 9.

If a point be taken within a circle, and more than two equal straight lines fall from the point on the circle, the point taken is the centre of the circle.

Let ABC be a circle and D a point within it, and from D let more than two equal straight lines, namely DA, DB, DC, fall on the circle ABC;



I say that the point D is the centre of the circle ABC.

For let AB, BC be joined and bisected at the points E, F, and let ED, FD be joined and drawn through to the points G, K, H, L.

Then, since AE is equal to EB, and ED is common,

the two sides AE, ED are equal to the two sides BE, ED; and the base DA is equal to the base DB;

therefore the angle AED is equal to the angle BED. [I. 8]

Therefore each of the angles AED, BED is right; [I. Def. 10]

therefore GK cuts AB into two equal parts and at right angles.

And since, if in a circle a straight line cut a straight line into two equal parts and at right angles, the centre of the circle is on the cutting straight line, [III. 1, Por.]

the centre of the circle is on GK.

Therefore the squares on EF, FA are equal to the squares on EG, GC,

of which the square on EF is equal to the square on EG, for EF is equal to EG;

therefore the square on AF which remains is equal to the square on CG;

therefore AF is equal to CG.

And AB is double of AF, and CD double of CG;

therefore AB is equal to CD.

Therefore etc.

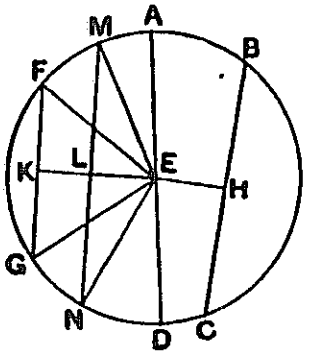
Q. E. D.

Heron (an-Nairīzī, pp. 125—7) has an elaborate addition to this proposition in which he proves, first by *reductio ad absurdum*, and then directly, that the centre of the circle falls between the two chords.

Proposition 15.

Of straight lines in a circle the diameter is greatest, and of the rest the nearer to the centre is always greater than the more remote.

Let $ABCD$ be a circle, let AD be its diameter and E the centre; and let BC be nearer to the diameter AD, and FG more remote;



I say that AD is greatest and BC greater than FG.

For from the centre E let EH, EK be drawn perpendicular to BC, FG.

Then, since BC is nearer to the centre and FG more remote, EK is greater than EH. [III. Def. 5]

Let EL be made equal to EH, through L let LM be drawn at right angles to EK and carried through to N, and let ME, EN, FE, EG be joined.

Then, since EH is equal to EL,

BC is also equal to MN. [III. 14]

Again, since AE is equal to EM, and ED to EN,

AD is equal to ME, EN.

But ME, EN are greater than MN, [I. 20]
and MN is equal to BC;

therefore AD is greater than BC.

And, since the two sides ME, EN are equal to the two sides FE, EG,

and the angle MEN greater than the angle FEG,
therefore the base MN is greater than the base FG. [I. 24]

But MN was proved equal to BC.

Therefore the diameter AD is greatest and BC greater than FG.

Therefore etc. Q. E. D.

1. **Of straight lines.** The Greek leaves these words to be understood.
5. **Nearer to the diameter AD.** As BC, FG are not in general parallel to AD, Euclid should have said "nearer to the centre."

It will be observed that Euclid's proof differs from that given in our text-books (which is Simson's) in that Euclid introduces another line MN, which is drawn so as to be equal to BC but at right angles to EK and therefore parallel to FG. Simson dispenses with MN and bases his proof on a similar proof by Theodosius (*Sphaerica* I. 6). He proves that the sum of the squares on EH, HB is equal to the sum of the squares on EK, KF; whence he infers that, since the square on EH is less than the square on EK, the square on BH is greater than the square on FK. It may be that Euclid would have regarded this as too complicated an inference to make without explanation or without an increase in the number of his axioms. But, on the other hand, Euclid himself assumes that the angle subtended at the centre by MN is greater than the angle subtended by FG, or, in other words, that M, N both fall outside the triangle FEG. This is a similar assumption to that made in III. 7, 8, as already noticed; and its truth is obvious because EM, EN, being radii of the circle, are greater than the distances from E to the points in which MN cuts EF, EG, and therefore the latter points are nearer than M, N are to L, the foot of the perpendicular from E to MN.

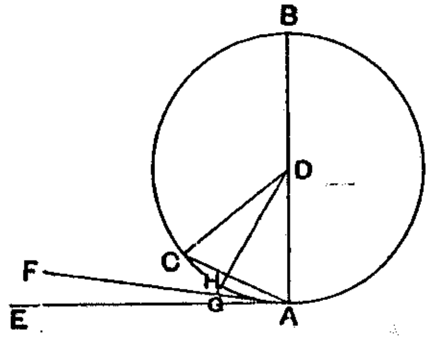
Simson adds the converse of the proposition, proving it in the same way as he proves the proposition itself.

Proposition 16.

The straight line drawn at right angles to the diameter of a circle from its extremity will fall outside the circle, and into the space between the straight line and the circumference another straight line cannot be interposed; further the angle of the semicircle is greater, and the remaining angle less, than any acute rectilineal angle.

Let ABC be a circle about D as centre and AB as diameter;

I say that the straight line drawn from A at right angles to AB from its extremity will fall outside the circle.



For suppose it does not, but, if possible, let it fall within as CA, and let DC be joined.

Since DA is equal to DC,

the angle DAC is also equal to the angle ACD. [I. 5]

But the angle DAC is right;

therefore the angle ACD is also right:

thus, in the triangle ACD, the two angles DAC, ACD are equal to two right angles: which is impossible. [I. 17]

Therefore the straight line drawn from the point A at right angles to BA will not fall within the circle.

Similarly we can prove that neither will it fall on the circumference;

therefore it will fall outside.

Let it fall as AE;

I say next that into the space between the straight line AE and the circumference CHA another straight line cannot be interposed.

For, if possible, let another straight line be so interposed, as FA, and let DG be drawn from the point D perpendicular to FA.

Then, since the angle AGD is right,

and the angle DAG is less than a right angle,

AD is greater than DG. [I. 19]

But DA is equal to DH;

therefore DH is greater than DG, the less than the greater: which is impossible.

Therefore another straight line cannot be interposed into the space between the straight line and the circumference.

I say further that the angle of the semicircle contained by the straight line BA and the circumference CHA is greater than any acute rectilineal angle,

and the remaining angle contained by the circumference CHA and the straight line AE is less than any acute rectilineal angle.

For, if there is any rectilineal angle greater than the angle contained by the straight line BA and the circumference

CHA, and any rectilineal angle less than the angle contained by the circumference *CHA* and the straight line *AE*, then into the space between the circumference and the straight line *AE* a straight line will be interposed such as will make an angle contained by straight lines which is greater than the angle contained by the straight line *BA* and the circumference *CHA*, and another angle contained by straight lines which is less than the angle contained by the circumference *CHA* and the straight line *AE*.

But such a straight line cannot be interposed;

therefore there will not be any acute angle contained by straight lines which is greater than the angle contained by the straight line *BA* and the circumference *CHA*, nor yet any acute angle contained by straight lines which is less than the angle contained by the circumference *CHA* and the straight line *AE*.—

PORISM. From this it is manifest that the straight line drawn at right angles to the diameter of a circle from its extremity touches the circle.

Q. E. D.

4. **cannot be interposed**, literally "will not fall in between" (οὐ παρεμπεσεῖται).

This proposition is historically interesting because of the controversies to which the last part of it gave rise from the 13th to the 17th centuries. History was here repeating itself, for it is certain that, in ancient Greece, both before and after Euclid's time, there had been a great deal of the same sort of contention about the nature of the "angle of a semicircle" and the "remaining angle" between the circumference of the semicircle and the tangent at its extremity. As we have seen (note on I. Def. 8), the latter angle had a recognised name, κερατοειδὴς γωνία, *horn-like* or *cornicular* angle; though this term does not appear in Euclid, it is often used by Proclus, evidently as a term well understood. While it is from Proclus that we get the best idea of the ancient controversies on this subject, we may, I think, infer their prevalence in Euclid's time from this solitary appearance of the two "angles" in the *Elements*. Along with the definition of the angle *of* a segment, it seems to show that, although these angles are only mentioned to be dropped again immediately, and are of no use in elementary geometry, or even at all, Euclid thought that an allusion to them would be expected of him; it is as if he merely meant to guard himself against appearing to ignore a subject which the geometers of his time regarded with interest. If this conjecture is right, the mention of these angles would correspond to the insertion of definitions of which he makes no use, e.g. those of a rhombus and a rhomboid.

Proclus has no hesitation in speaking of the "angle of a semicircle" and the "horn-like angle" as true *angles*. Thus he says that "angles are contained by a straight line and a circumference in two ways; for they are either contained by a straight line and a convex circumference, like that of the semicircle, or by a straight line and a concave circumference, like the κερατοειδής" (p. 127, 11—14). "There are *mixed* lines, as spirals, and angles, as the angle of a semicircle and the κερατοειδής" (p. 104, 16—18). The difficulty which the ancients felt arose from the very fact which Euclid embodies in this proposition. Since an angle can be divided by a line, it would seem to be a magnitude; "but if it is a magnitude, and all homogeneous magnitudes which are finite have a ratio to one another, then all homogeneous angles, or rather all those on surfaces, will have a ratio to one another, so that the *cornicular* will also have a ratio to the rectilineal. But things which have a ratio to one another can, if multiplied, exceed one another. Therefore the *cornicular* angle will also sometime exceed the rectilineal; which is impossible, for it is proved that the former is less than any rectilineal angle" (Proclus, p. 121, 24—122, 6). The nature of contact between straight lines and circles was also involved in the question, and that this was the subject of controversy before Euclid's time is clear from the title of a work attributed to Democritus (fl. 420—400 B.C.) περὶ διαφορῆς γνώμονος ἢ περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρης, *On a difference in a gnomon or on contact of a circle and a sphere.* There is, however, another reading of the first words of this title as given by Diogenes Laertius (IX. 47), namely περὶ διαφορῆς γνώμης. *On a difference of opinion*, etc. May it not be that neither reading is correct, but that the words should be περὶ διαφορῆς γωνίης ἢ περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρης, *On a difference in an angle or on contact with a circle and a sphere?* There would, of course, hardly be any "angle" in connexion with the sphere; but I do not think that this constitutes any difficulty, because the sphere might easily be tacked on as a kindred subject to the circle. A curiously similar collocation of words appears in a passage of Proclus, though this may be an accident. He says (p. 50, 4) πῶς δὲ γωνιῶν διαφορὰς λέγομεν καὶ αὐξήσεις αὐτῶν ... and then, in the next line but one, πῶς δὲ τὰς ἁφὰς τῶν κύκλων ἢ τῶν εὐθειῶν, "In what sense do we speak of *differences of angles and of increases of them* ... and in what sense of the *contacts* (or meetings) *of circles* or of straight lines?" I cannot help thinking that this subject of *cornicular* angles would have had a fascination for Democritus as being akin to the question of infinitesimals, and very much of the same character as the other question which Plutarch (*On Common Notions*, XXXIX. 3) says that he raised, namely that of the relation between the base of a cone and a section of it by a plane parallel to the base and apparently, to judge by the context, infinitely near to it: "if a cone were cut by a plane parallel to its base, what must we think of the surfaces of the sections, that they are equal or unequal? For, if they are unequal, they will make the cone irregular, as having many indentations like steps, and unevennesses; but, if they are equal, the sections will be equal, and the cone will appear to have the property of the cylinder, as being made up of equal and not unequal circles, which is the height of absurdity."

The contributions by Democritus to such investigations are further attested by a passage in the *Method* of Archimedes discovered by Heiberg in 1906 (*Archimedes*, ed. Heiberg, Vol. II. 1913, p. 430; T. L. Heath, *The* Method *of Archimedes*, 1912, p. 13), which says that, though Eudoxus was the first to discover the scientific proof of the propositions (attributed to him) that the cone and the pyramid are one-third of the cylinder and prism respectively which have the same base and equal height, they were first *stated*, without proof, by Democritus.

A full history of the later controversies about the cornicular "angle" cannot be given here; more on the subject will be found in Camerer's Euclid (Excursus IV. on III. 16) or in Cantor's *Geschichte der Mathematik*.

Vol. II. (see *Contingenzwinkel* in the index). But the following short note about the attitude of certain well-known mathematicians to the question will perhaps not be out of place. Johannes Campanus, who edited Euclid in the 13th century, inferred from III. 16 that there was a flaw in the principle that *the transition from the less to the greater, or vice versâ, takes place through all intermediate quantities and therefore through the equal.* If a diameter of a circle, he says, be moved about its extremity until it takes the position of the tangent to that circle, then, as long as it cuts the circle, it makes an acute angle *less* than the "angle of a semicircle"; but the moment it ceases to cut, it makes a right angle *greater* than the same "angle of a semicircle." The rectilineal angle is never, during the transition, *equal* to the "angle of a semicircle." There is therefore an apparent inconsistency with x. 1, and Campanus could only observe (as he does on that proposition), in explanation of the paradox, that "these are not angles in the same sense (univoce), for the curved and the straight are not things of the same kind without qualification (simpliciter)." The argument assumes, of course, that the right angle *is* greater than the "angle of a semicircle."

Very similar is the statement of the paradox by Cardano (1501—1576), who observed that *a quantity may continually increase without limit, and another diminish without limit; and yet the first, however increased, may be less than the second, however diminished.* The first quantity is of course the *angle of contact*, as he calls it, which may be "increased" indefinitely by drawing smaller and smaller circles touching the same straight line at the same point, but will always be less than any acute rectilineal angle however small.

We next come to the French geometer, Peletier (Peletarius), who edited the *Elements* in 1557, and whose views on this subject seem to mark a great advance. Peletier's opinions and arguments are most easily accessible in the account of them given by Clavius (Christoph Klau [?], 1537—1612) in the 1607 edition of his Euclid. The violence of the controversy between the two will be understood from the fact that the arguments and counter-arguments (which sometimes run into other matters than the particular question at issue) cover, in that book, 26 pages of small print. Peletier held that the "angle of contact" was not an angle at all, that the "contact of two circles," i.e. the "angle" between the circumferences of two circles touching one another internally or externally, is not a *quantity*, and that the "contact of a straight line with a circle" is not a *quantity* either; that angles contained by a diameter and a circumference whether inside or outside the circle are *right angles* and equal to rectilineal right angles, and that angles contained by a diameter and the circumference in *all* circles are *equal.* The proof which Peletier gave of the latter proposition in a letter to Cardano is sufficiently ingenious. If a greater and a less semicircle be placed with their diameters terminating at a common point and lying in a straight line, then (1) the *angle of* the larger obviously cannot be *less* than the *angle of* the smaller. Neither (2) can the former be *greater* than the latter; for, if it were, we could obtain another *angle of* a semicircle greater still by drawing a still larger semicircle, and so on, until we should ultimately have an *angle of* a semicircle greater than a right angle: which is impossible. Hence the *angles of* semicircles must all be *equal*, and the differences between them *nothing*. Having satisfied himself that all *angles of contact* are *not*-angles, *not*-quantities, and therefore *nothings*, Peletier holds the difficulty about x. 1 to be at an end. He adds the interesting remark that the essence of an angle is in *cutting*, not contact, and that a tangent is not *inclined* to the circle at the point of contact but is, as it were, *immersed* in it at that point, just as much as if the circle did not diverge from it on either side.

The reply of Clavius need not detain us. He argues, evidently appealing to the eye, that the angle of contact can be *divided* by the arc of a circle greater than the given one, that the angles of two semicircles of different sizes cannot be equal, since they do not coincide if they are applied to one another, that there is nothing to prevent *angles of contact* from being *quantities*, it being only necessary, in view of x. 1, to admit that they are not of the same kind as rectilineal angles; lastly that, if the angle of contact had been a *nothing*, Euclid would not have given himself so much trouble to prove that it is less than any acute angle. (The word is *desudasset*, which is certainly an exaggeration as applied to what is little more than an *obiter dictum* in III. 16.)

Vieta (1540—1603) ranged himself on the side of Peletier, maintaining that the *angle of contact* is no angle; only he uses a new method of proof. The circle, he says, may be regarded as a plane figure with an infinite number of sides and angles; but *a straight line touching a straight line, however short it may be, will coincide with that straight line and will not make an angle.* Never before, says Cantor (II_1, p. 540), had it been so plainly declared what exactly was to be understood by *contact*.

Galileo Galilei (1564—1642) seems to have held the same view as Vieta and to have supported it by a very similar argument derived from the comparison of the circle and an inscribed polygon with an infinite number of sides.

The last writer on the question who must be mentioned is John Wallis (1616—1703). He published in 1656 a paper entitled *De angulo contactus et semicirculi tractatus* in which he also maintained that the so-called angle was not a true angle, and was not a *quantity*. Vincent Leotaud (1595—1672) took up the cudgels for Clavius in his *Cyclomathia* which appeared in 1663. This brought a reply from Wallis in a letter to Leotaud dated 17 February, 1667, but not apparently published till it appeared in *A defense of the treatise of the angle of contact* which, with a separate title-page, and date 1684, was included in the English edition of his Algebra dated 1685. The essence of Wallis' position may be put as follows. According to Euclid's definition, a plane angle is an *inclination* of two lines; therefore two lines forming an angle must *incline* to one another, and, if two lines meet without being *inclined* to one another at the point of meeting (which is the case when a circumference is touched by a straight line), the lines do not form an *angle*. The "angle of contact" is therefore no angle, because *at the point of contact* the straight line is not inclined to the circle but lies on it ἀκλινῶς, or is coincident with it. Again, as a point is not a line but a *beginning* of a line, and a line is not a surface but a *beginning* of a surface, so an angle is not the distance between two lines, but their initial tendency towards separation: *Angulus (seu gradus divaricationis) Distantia non est sed Inceptivus distantiae.* How far lines, which at their point of meeting do not form an angle, separate from one another as they pass on depends on the *degree of curvature* (gradus curvitatis), and it is the latter which has to be compared in the case of two lines so meeting. The arc of a smaller circle is more curved as having as much curvature in a lesser length, and is therefore curved in a greater degree. Thus what Clavius called *angulus contactus* becomes with Wallis *gradus curvitatis*, the use of which expression shows that curvature and curvature can be compared according to one and the same standard. A straight line has the least possible curvature; but of the "angle" made by it with a curve which it touches we cannot say that it is greater or less than the "angle" which a second curve touching the same straight line at the same point makes with the first curve; for in both cases there is no true angle at all (cf. Cantor III_1, p. 24).

The words usually given as a part of the corollary "and that a straight line touches a circle at one point only, since in fact the straight line meeting it in two points was proved to fall within it" are omitted by Heiberg as being an undoubted addition of Theon's. It was Simson who added the further remark that "it is evident that there can be but one straight line which touches the circle at the same point."

Proposition 17.

From a given point to draw a straight line touching a given circle.

Let A be the given point, and BCD the given circle; thus it is required to draw from the point A a straight line touching the circle BCD.

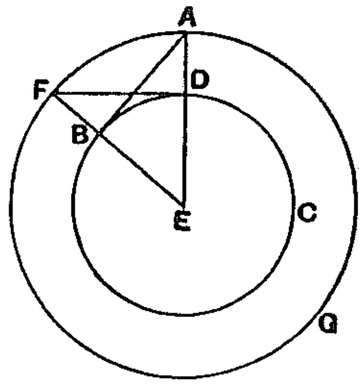
For let the centre E of the circle be taken; [III. 1]

let AE be joined, and with centre E and distance EA let the circle AFG be described;

from D let DF be drawn at right angles to EA,

and let EF, AB be joined;

I say that AB has been drawn from the point A touching the circle BCD.



For, since E is the centre of the circles BCD, AFG,

EA is equal to EF, and ED to EB;

therefore the two sides AE, EB are equal to the two sides FE, ED:

and they contain a common angle, the angle at E;

therefore the base DF is equal to the base AB,

and the triangle DEF is equal to the triangle BEA,

and the remaining angles to the remaining angles; [I. 4]

therefore the angle EDF is equal to the angle EBA.

But the angle EDF is right;

therefore the angle EBA is also right.

Now EB is a radius;

and the straight line drawn at right angles to the diameter of a circle, from its extremity, touches the circle; [III. 16, Por.]

therefore AB touches the circle BCD.

Therefore from the given point A the straight line AB has been drawn touching the circle BCD.

Therefore AE is equal to AK [V. 9], the less to the greater: which is impossible.

Therefore $ABCD$ cannot but be about the same diameter with AF;

therefore the parallelogram $ABCD$ is about the same diameter with the parallelogram AF.

Therefore etc.

Q. E. D.

"For suppose it is not, but, if possible, let AHC be the diameter." What is meant is "For, if AFC is not the diameter of the parallelogram AC, let AHC be its diameter." The Greek text has ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΑΘΓ; but clearly αὐτῶν is wrong, as we cannot assume that one straight line is the diameter of both parallelograms, which is just what we have to prove. F and V omit the αὐτῶν, and Heiberg prefers this correction to substituting αὐτοῦ after Peyrard. I have inserted "< of $ABCD$ >" to make the meaning clear.

If the straight line AHC does not pass through F, it must meet either GF or GF produced in some point H. The reading in the text "and let GF be *produced and carried through to* H" (καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Θ) corresponds to the supposition that H is on GF produced. The words were left out by Theon, evidently because in the figure of the MSS. the letters E, Z and K, Θ were interchanged. Heiberg therefore, following August, has preferred to retain the words and to correct the figure, as well as the passage in the text where AE, AK were interchanged to be in accord with the MS. figure.

It is of course possible to prove the proposition directly, as is done by Dr Lachlan. Let AF, AC be the diagonals, and let us make no assumption as to how they fall.

Then, since EF is parallel to AG and therefore to BC,

the angles AEF, ABC are equal.

And, since the parallelograms are similar,

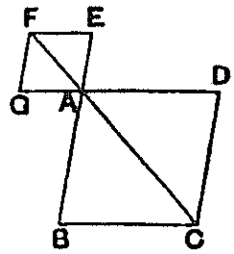
$$AE : EF = AB : BC. \qquad \text{[VI. Def. 1]}$$

Hence the triangles AEF, ABC are similar, [VI. 6]

and therefore the angle FAE is equal to the angle CAB.

Therefore AF falls on AC.

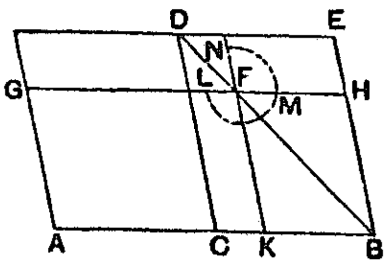
The proposition is equally true if the parallelogram which is similar and similarly situated to the given parallelogram is not "taken away" from it, but is so placed that it is entirely outside the other, while two sides form an angle vertically opposite to an angle of the other. In this case the diameters are not "the same," in the words of the enunciation, but are in a straight line with one another. This extension of the proposition is, as will be seen, necessary for obtaining, according to the method adopted by Euclid in his solution of the problem in VI. 28, the second solution of that problem.



Proposition 27.

Of all the parallelograms applied to the same straight line and deficient by parallelogrammic figures similar and similarly situated to that described on the half of the straight line, that parallelogram is greatest which is applied to the half of the straight line and is similar to the defect.

Let AB be a straight line and let it be bisected at C; let there be applied to the straight line AB the parallelogram AD deficient by the parallelogrammic figure DB described on the half of AB, that is, CB;



I say that, of all the parallelograms applied to AB and deficient by parallelogrammic figures similar and similarly situated to DB, AD is greatest.

For let there be applied to the straight line AB the parallelogram AF deficient by the parallelogrammic figure FB similar and similarly situated to DB;

I say that AD is greater than AF.

For, since the parallelogram DB is similar to the parallelogram FB,

they are about the same diameter. [VI. 26]

Let their diameter DB be drawn, and let the figure be described.

Then, since CF is equal to FE, [I. 43]
and FB is common,

therefore the whole CH is equal to the whole KE.

But CH is equal to CG, since AC is also equal to CB. [I. 36]

Therefore GC is also equal to EK.

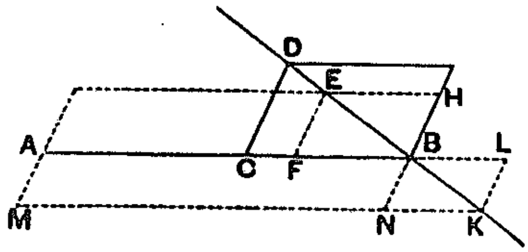
Let CF be added to each;

therefore the whole AF is equal to the gnomon LMN;

so that the parallelogram DB, that is, AD, is greater than the parallelogram AF.

Therefore etc.

We have already (note on I. 44) seen the significance, in Greek geometry, of the theory of "the application of areas, their exceeding and their falling-short." In I. 44 it was a question of "applying to a given straight line (exactly, without 'excess' or 'defect') a parallelogram equal to a given rectilineal figure, in a given angle." Here, in VI. 27—29, it is a question of parallelograms applied to a straight line but "*deficient* (or *exceeding*) *by parallelograms similar and similarly situated to a given parallelogram.*" Apart from size, it is easy to construct any number of parallelograms "deficient" or "exceeding" in the manner described. Given the straight line AB to which the parallelogram has to be applied, we describe on the base CB, where C is on AB, or on BA produced beyond A, any parallelogram "similarly situated" and either equal or similar to the given parallelogram (Euclid takes the similar and similarly situated parallelogram on half the line), draw the diagonal BD, take on it (produced if necessary) any points as E, K, draw EF, or KL, parallel to CD to meet AB or AB produced and complete the parallelograms, as AH, ML.



If the point E is taken on BD or BD produced beyond D, it must be so taken that EF meets AB between A and B. Otherwise the parallelogram AE would not be applied to AB itself, as it is required to be.

The parallelograms BD, BE, being about the same diameter, are similar [VI. 24], and BE is the defect of the parallelogram AE relatively to AB. AE is then a parallelogram applied to AB but deficient by a parallelogram similar and similarly situated to BD.

If K is on DB produced, the parallelogram BK is similar to BD, but it is the *excess* of the parallelogram AK relatively to the base AB. AK is a parallelogram applied to AB but exceeding by a parallelogram similar and similarly situated to BD.

Thus it is seen that BD produced both ways is the *locus* of points, such as E or K, which determine, with the direction of CD, the position of A, and the direction of AB, parallelograms applied to AB and *deficient* or *exceeding* by parallelograms similar and similarly situated to the given parallelogram.

The importance of VI. 27—29 from a historical point of view cannot be overrated. They give the geometrical equivalent of the algebraical solution of the most general form of quadratic equation when that equation has a real and positive root. It will also enable us to find a real *negative* root of a quadratic equation; for such an equation can, by altering the sign of x, be turned into another with a real *positive* root, when the geometrical method again becomes applicable. It will also, as we shall see, enable us to represent *both* roots when both are real and positive, and therefore to represent both roots when both are real but either positive or negative.

The method of these propositions was constantly used by the Greek geometers in the solution of problems, and they constitute the foundation of Book X. of the *Elements* and of Apollonius' treatment of the conic sections. Simson's observation on the subject is entirely justified. He says namely on VI. 28, 29: "These two problems, to the first of which the 27th Prop. is necessary, are the most general and useful of all in the Elements, and are most frequently made use of by the ancient geometers in the solution of other problems; and therefore are very ignorantly left out by Tacquet and

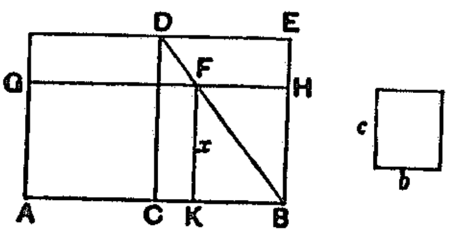
Dechales in their editions of the Elements, who pretend that they are scarce of any use."

It is strange that, with this observation before him, even Todhunter should have written as follows. "We have omitted in the sixth Book Propositions 27, 28, 29 and the first solution which Euclid gives of Proposition 30, as they appear now to be never required, and have been condemned as useless by various modern commentators; see Austin, Walker and Lardner."

VI. 27 contains the διορισμός, the condition for a real solution, of the problem contained in the proposition following it. The maximum of all the parallelograms having the given property which can be applied to a given straight line is that which is described upon half the line (τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφόμενον). This corresponds to the condition that an equation of the form

$$ax - px^2 = A$$

may have a real root. The correctness of the result may be seen by taking the case in which the parallelograms are rectangles, which enables us to leave out of account the *sine of the angle* of the parallelograms without any real loss of generality. Suppose the sides of the rectangle to which the *defect* is to be similar to be as b to c, b corresponding to the side of the defect which lies along AB. Suppose that $AKFG$ is any parallelogram applied to AB having the given property, that $AB = a$, and that $FK = x$. Then



$$KB = \frac{b}{c}x, \text{ and therefore } AK = a - \frac{b}{c}x.$$

Hence $\left(a - \frac{b}{c}x\right)x = S$, where S is the area of the rectangle $AKFG$.

Thus, given the equation

$$ax - \frac{b}{c}x^2 = S,$$

where S is undetermined, VI. 27 tells us that, if x is to have a real value, S cannot be greater than the rectangle CE.

Now $CB = \frac{a}{2}$, and therefore $CD = \frac{c}{b}\cdot\frac{a}{2}$;

whence $$S \not> \frac{c}{b}\cdot\frac{a^2}{4},$$

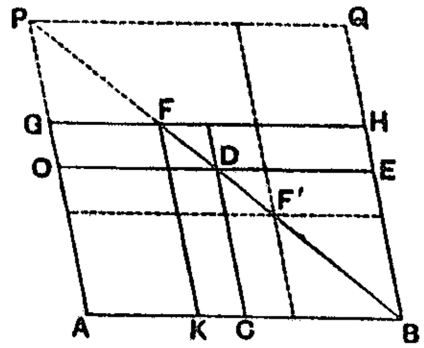
which is just the same result as we obtain by the algebraical method.

In the particular case where the *defect* of the parallelogram is to be a *square*, the condition becomes the statement of the fact that, *if a straight line be divided into two parts, the rectangle contained by the parts cannot exceed the square on half the line.*

Now suppose that, instead of taking F on BD as in the figure of the proposition, we take F on BD produced beyond D but so that DF is less than BD.

Complete the figure, as shown, after the manner of the construction in the proposition.

Then the parallelogram $FKBH$ is similar to the given parallelogram to which the defect is to be similar. Hence the parallelogram $GAKF$ is also a parallelogram applied to AB and satisfying the given condition.



We can now prove that $GAKF$ is less than CE or AD.

Let ED produced meet AG in O.

Now, since BF is the diagonal of the parallelogram KH, the complements KD, DH are equal.

But

$DH = DG$, and DG is greater than OF.

Therefore $KD > OF$.

Add OK to each;

and AD, or CE, $> AF$.

This other "case" of the proposition is found in all the MSS., but Heiberg relegates it to the Appendix as being very obviously interpolated. The reasons for this course are that it is not in Euclid's manner to give a separate demonstration of such a "case"; it is rather his habit to give one case only and to leave the student to satisfy himself about any others (cf. I. 7). Internal evidence is also against the genuineness of the separate proof. It is put after the *conclusion* of the proposition instead of before it, and, if Euclid had intended to discuss two cases, he would have distinguished them at the beginning of the proposition, as it was his invariable practice to do. Moreover the second "case" is the less worth giving because it can be so easily reduced to the first. For suppose F' to be taken on BD so that $FD = F'D$. Produce BF to meet AG produced in P. Complete the parallelogram $BAPQ$, and draw through F' straight lines parallel to and meeting its opposite sides.

Then the complement $F'Q$ is equal to the complement AF'.

And it is at once seen that AF, $F'Q$ are equal and similar. Hence the solution of the problem represented by AF or $F'Q$ gives a parallelogram of the same size as AF' arrived at as in the first "case."

It is worth noting that the actual difference between the parallelogram AF and the maximum area AD that it can possibly have is represented in the figure. The difference is the small parallelogram DF.

Proposition 28.

To a given straight line to apply a parallelogram equal to a given rectilineal figure and deficient by a parallelogrammic figure similar to a given one: thus the given rectilineal figure must not be greater than the parallelogram described on the half of the straight line and similar to the defect.

Let AB be the given straight line, C the given rectilineal figure to which the figure to be applied to AB is required to be equal, not being greater than the parallelogram described on the half of AB and similar to the defect, and D the parallelogram to which the defect is required to be similar;

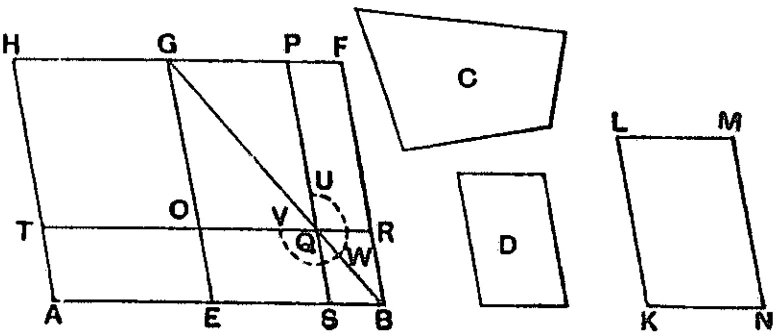
thus it is required to apply to the given straight line *AB* a parallelogram equal to the given rectilineal figure *C* and deficient by a parallelogrammic figure which is similar to *D*.

Let *AB* be bisected at the point *E*, and on *EB* let *EBFG* be described similar and similarly situated to *D*; [VI. 18]

let the parallelogram *AG* be completed.

If then *AG* is equal to *C*, that which was enjoined will have been done;

for there has been applied to the given straight line *AB* the parallelogram *AG* equal to the given rectilineal figure *C* and deficient by a parallelogrammic figure *GB* which is similar to *D*.



But, if not, let *HE* be greater than *C*.

Now *HE* is equal to *GB*;

therefore *GB* is also greater than *C*.

Let *KLMN* be constructed at once equal to the excess by which *GB* is greater than *C* and similar and similarly situated to *D*. [VI. 25]

But *D* is similar to *GB*;

therefore *KM* is also similar to *GB*. [VI. 21]

Let, then, *KL* correspond to *GE*, and *LM* to *GF*.

Now, since *GB* is equal to *C*, *KM*,

therefore *GB* is greater than *KM*;

therefore also *GE* is greater than *KL*, and *GF* than *LM*.

Let *GO* be made equal to *KL*, and *GP* equal to *LM*; and let the parallelogram *OGPQ* be completed;

therefore it is equal and similar to *KM*.

Therefore *GQ* is also similar to *GB*; [VI. 21]

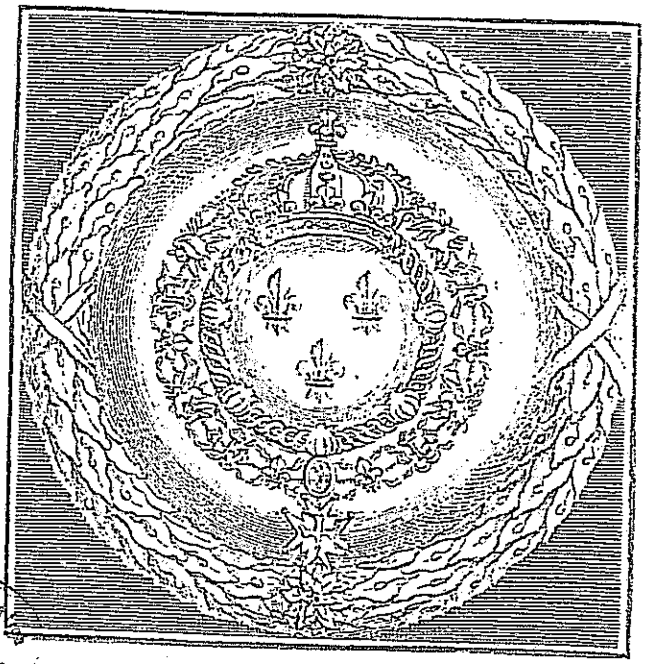
therefore *GQ* is about the same diameter with *GB*. [VI. 26]

ANEXO 3

ANALYSE DES INFINIMENT PETITS DE L'HOPITAL

ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,

Pour l'intelligence des lignes courbes.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DC. XCVI.

ſant toûjours, ſa différence ſera négative. Or toute quantité qui croît ou diminuë continüellement, ne peut devenir de poſitive négative, qu'elle ne paſſe par l'infini ou par le zero; ſçavoir par le zero lorſqu'elle va d'abord en diminüant, & par l'infini lorſqu'elle va d'abord en augmentant. D'où il ſuit que la différence d'une quantité qui exprime un *plus grand* ou un *moindre*, doit être égale à zero ou à l'infini. Or la nature de la courbe *MDM* étant
Sect. 1. ou 2. donnée, on trouvera* une valeur de *Rm*, laquelle étant égalée d'abord à zero, & enſuite à l'infini, ſervira à découvrir la valeur cherchée de *AE* dans l'une ou l'autre de ces ſuppoſitions.

REMARQUE.

G. 31. 32. 47. LA tangente en *D* eſt parallele à l'axe *AB* lorſque la différence *Rm* devient nulle dans ce point; mais lorſ-
G. 33. 34. qu'elle devient infinie, la tangente ſe confond avec l'appliquée *ED*. D'où l'on voit que la raiſon de *mR* à *RM*, qui exprime celle de l'appliquée à la ſoutangente, eſt nulle ou infinie ſous le point *D*.

On conçoit aiſément qu'une quantité, qui diminuë continüellement, ne peut devenir de poſitive négative ſans paſſer par le zero; mais on ne voit pas avec la même évidence que lorſqu'elle augmente, elle doive paſſer par l'infini. C'eſt-pourquoy pour aider l'imagination, ſoient en-
G. 31. 32. tenduës des tangentes aux points *M*, *D*, *M*; il eſt clair dans les courbes où la tangente en *D* eſt parallele à l'axe *AB*, que la ſoutangente *PT* augmente continüellement à meſure que les points *M*, *P* approchent des points *D*, *E*; & que le point *M* tombant en *D*, elle devient infinie; & qu'en-
Art. 10. fin lorſque *AP* ſurpaſſe *AE*, la ſoutangente *PT* devient* négative de poſitive qu'elle étoit, ou au contraire.

EXEMPLE I.

G. 35. 48. SUPPOSONS que $x^3 + y^3 = axy$ ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$) exprime la nature de la courbe *MDM*. On aura en prenant les différences $3xxdx + 3yydy = axdy + aydx$,

& $dy = \frac{aydx - 3xxdx}{3yy - ax} = 0$ lorſque le point P tombe ſur le point cherché E, d'où l'on tire $y = \frac{3xx}{a}$; & ſubſtituant cette valeur à la place de y dans l'équation $x^3 + y^3 = axy$, on trouve pour AE une valeur $x = \frac{1}{3} a\sqrt[3]{2}$ telle que l'appliquée ED ſera plus grande que toutes ſes ſemblables PM.

EXEMPLE II.

49. SOIT $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}$, l'équation qui exprime la nature de la courbe MDM. On aura en prenant les différences, $dy = -\frac{2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ que j'égale d'abord à zero; mais parce que cette ſuppoſition me donne $-2dx\sqrt[3]{a} = 0$ qui ne peut faire connoître la valeur de AE, j'égale enſuite $\frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ à l'infini, ce qui me donne $3\sqrt[3]{a-x} = 0$, d'où l'on tire $x = a$, qui eſt la valeur cherchée de AE. FIG. 33.

EXEMPLE III.

50. SOIT une demi-roulette accourcie AMF, dont la baſe BF eſt moindre que la demi-circonférence ANB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il faut déterminer le point E ſur le diametre AB, en ſorte que l'appliquée ED ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible. FIG. 36.

Ayant mené à diſcretion l'appliquée PM qui coupe le demi-cercle en N, on concevra à l'ordinaire aux points M, N, les petits triangles MRm, NSn, & nommant les indéterminées AP, x; PN, z; l'arc AN, u; & les données ANB, a; BF, b; CA ou CN, c; l'on aura par la propriété de la roulette $ANB\ (a) . BF\ (b) :: AN\ (u) . NM = \frac{bu}{a}$. Donc $PM = z + \frac{bu}{a}$, & ſa différence $Rm = \frac{adz + bdu}{a} = 0$ lorſque le point P tombe au point cherché E. Or les triangles réctangles NSn, NPC ſont ſemblables; car ſi l'on ôte des angles droits CNn, PNS l'angle commun CNS, les reſtes SNn, PNC ſeront égaux. Et partant $CN\ (c) . CP$

$\frac{xx}{x-a}=y$, dans laquelle ſi l'on ſuppoſe $x=a$, l'appliquée PM qui devient BC ſera $\frac{aa}{o}$, c'eſt-à-dire infinie; & ſuppoſant x infinie, l'on aura $y=x$, c'eſt-à-dire que l'appliquée ſera auſſi infinie.

Si $m=1$, & $n=-2$, l'on aura $AE=-a$; d'où il ſuit que l'on doit énoncer le problême alors en cette ſorte.

Prolonger la droite donnée AB du côté de A en un point E, en ſorte que la quantité $\frac{AE \times \overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}$ ſoit plus grande que tout autre quantité ſemblable $\frac{AP \times \overline{AB}^2}{\overline{BP}^2}$. FIG. 38.

EXEMPLE V.

52. LA ligne droite AB étant diviſée en trois parties AC, CF, FB, il faut couper ſa partie du milieu CF au point E, en ſorte que le rapport du réctangle $AE \times EB$ au réctangle $CE \times EF$ ſoit moindre que tout autre rapport formé de la même maniére. FIG. 39.

Ayant nommé les données AC, a; CF, b; CB, c; & l'inconnuë CE, x; l'on aura $AE=a+x$, $EB=c-x$, $EF=b-x$, & partant le rapport de $AE \times EB$ à $CE \times EF$ ſera $\frac{ac+cx-ax-xx}{bx-xx}$ qui doit être *un moindre*. C'eſt-pourquoy ſi l'on imagine une ligne courbe MDM, telle que la relation de l'appliquée PM (y) à la coupée CP (x) ſoit exprimée par l'équation $y=\frac{aac+acx-aax-axx}{bx-xx}$, la queſtion ſe réduit à trouver pour x une valeur CE telle que l'appliquée ED ſoit la moindre de toutes ſes ſemblables PM. On formera donc (en prenant les différences, & diviſant enſuite par adx) l'égalité $cxx-axx-bxx+2acx-abc=o$, dont l'une des racines réſout la queſtion.

Si $c=a+b$, l'on aura $x=\frac{1}{2}b$.

EXEMPLE VI.

53. ENTRE tous les Cones qui peuvent être inſcrits

$(c-x)$ :: Nn (du). Sn $(dz) = \frac{cdu - xdu}{c}$. Donc en mettant cette valeur à la place de dz dans $adz + bdu = 0$, on trouvera $\frac{acdu - axdu + bcdu}{c} = 0$, d'où l'on tirera x (qui est en ce cas $AE) = c + \frac{bc}{a}$.

Il est donc évident que si l'on prend CE du côté de B quatriéme proportionnelle à la demi-circonférence ANB, à la base BF, & au rayon CB, le point E sera celuy qu'on cherche.

EXEMPLE IV.

51. COUPER la ligne donnée AB en un point E, en sorte que le produit du quarré de l'une des parties AE par l'autre EB, soit le plus grand de tous les autres produits formés de la même maniere.

Ayant nommé l'inconnuë AE, x; & la donnée AB, a; on aura $\overline{AE}^2 \times EB = axx - x^3$, qui doit être un *plus grand*. C'est-pourquoy on imaginera une ligne courbe MDM, telle que la relation de l'appliquée MP (y) à la coupée AP (x) soit exprimée par l'équation $y = \frac{axx - x^3}{aa}$, & on cherchera un point E tel que l'appliquée ED soit la plus grande de toutes ses semblables PM; ce qui donne $dy = \frac{2axdx - 3xxdx}{aa} = 0$, d'où l'on tire AE $(x) = \frac{2}{3}a$.

Si l'on veut en général que $x^m \times \overline{a-x}^n$ soit un *plus grand* (m & n peuvent marquer tels nombres qu'on voudra), il faudra que la difference de ce produit soit égale à zero ou à l'infini, ce qui donne $mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - n\overline{a-x}^{n-1} dx \times x^m = 0$, d'où en divisant par $x^{m-1} \times \overline{a-x}^{n-1} dx$, l'on tire $am - mx - nx = 0$, & AE $(x) = \frac{m}{m+n}a$.

Si $m = 2$, & $n = -1$, l'on aura $AE = 2a$, & il faudra alors énoncer le probléme ainsi.

Prolonger la ligne donnée AB du côté de B en un point E, en sorte que la quantité $\frac{\overline{AE}^2}{BE}$ soit *un moindre*, & non pas un *plus grand*; car l'équation à la courbe MDM sera dans une ſphére, déterminer celuy qui a la plus grande ſurface convexe.

40. La queſtion ſe réduit à déterminer ſur le diametre AB du demi-cercle AFB le point E, en ſorte qu'ayant mené la perpendiculaire EF, & joint AF, le réctangle $AF \times FE$ ſoit le plus grand de tous ſes ſemblables $AN \times NP$. Car ſi l'on conçoit que le demi-cercle AFB faſſe une révolution entiére autour du diametre AB, il eſt clair qu'il décrira une ſphére, & que les triangles réctangles AEF, APN décriront des cones inſcrits dans cette ſphére, dont les ſurfaces convexes décrites par les cordes AE, AN, ſeront entr'elles comme les réctangles $AF \times FE$, $AN \times NP$.

Soit donc l'inconnuë $AE = x$, la donnée $AB = a$, on aura par la proprieté du cercle $AF = \sqrt{ax}$, $EF = \sqrt{ax - xx}$; & partant $AF \times FE = \sqrt{aaxx - ax^3}$ qui doit être un *plus grand*. C'eſt-pourquoy on imaginera une ligne courbe MDM telle que la relation de l'appliquée PM (y) à la coupée AP (x) ſoit exprimée par l'équation $\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y$; & l'on cherchera le point E, en ſorte que l'appliquée ED ſoit plus grande que toutes ſes ſemblables PM. On aura donc en prenant la différence $\frac{2axdx - 3xxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = 0$, d'où l'on tire $AE\,(x) = \frac{2}{3}a$.

EXEMPLE VII.

54. On demande entre tous les Parallélépipedes égaux à un cube donné a^3, & qui ont pour un de leurs côtés la droite donnée b, celuy qui a la moindre ſuperficie.

Nommant x un des deux côtés que l'on cherche, l'autre ſera $\frac{a^3}{bx}$; & prenant les plans alternatifs des trois côtés b, x, $\frac{a^3}{bx}$ du parallélépipede, leur ſomme ſçavoir $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$ ſera la moitié de ſa ſuperficie qui doit être *un moindre*. C'eſt-pourquoy concevant à l'ordinaire une ligne courbe qui ait pour équation $\frac{bx}{a} + \frac{aa}{x} + \frac{aa}{b} = y$, l'on trouvera en prenant la différence $\frac{bdx}{a} - \frac{aadx}{xx} = 0$, d'où l'on tire $xx = \frac{a^3}{b}$, & $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$; de ſorte que les trois côtés du parallélépipede qui ſatisfait à la queſtion, ſeront le premier b, le ſecond $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, & le troiſiéme $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$. D'où l'on voit que les deux côtés que l'on cherchoit, ſont égaux entr'eux.

EXEMPLE VIII.

55. On demande preſentement entre tous les Parallélépipedes qui ſont égaux à un cube donné a^3, celuy qui a la moindre ſuperficie.

Nommant x un des côtés inconnus, il eſt clair par l'éxemple précédent, que les deux autres côtés ſeront chacun $\sqrt{\frac{a^3}{x}}$; & partant la ſomme des plans alternatifs qui eſt la moitié de la ſuperficie, ſera $\frac{a^3}{x} + 2\sqrt{a^3x}$ qui doit être *un moindre*. C'eſt-pourquoy ſa différence $-\frac{a^3dx}{xx} + \frac{a^3dx}{\sqrt{a^3x}} = 0$, d'où l'on tire $x = a$; & par-conſéquent les deux autres côtés ſeront auſſi chacun $= a$; de ſorte que le cube même donné ſatisfait à la queſtion.

EXEMPLE IX.

56. La ligne AEB étant donnée de poſition ſur un plan avec deux points fixes C, F; & ayant mené à un de ſes points quelconques P deux droites CP (u), PF (z); ſoit donnée une quantité compoſée de ces indéterminées u & z, & de telles autres droites données a, b, &c. qu'on voudra. On demande quelle doit être la poſition des droites CE, EF, afin que la quantité donnée, qui en eſt compoſée, ſoit plus grande ou moindre que cette même quantité lorſqu'elle eſt compoſée des droites CP, PF. FIG. 41.

Suppoſons que les lignes CE, EF ayent la poſition requiſe; & ayant joint CF, concevons une ligne courbe DM telle qu'ayant mené à diſcrétion PQM perpendiculaire ſur CF, l'appliqué QM exprime la quantité donnée: il eſt clair que le point P tombant au point E, l'appliquée QM qui devient OD, doit être la moindre ou la plus grande de toutes ses semblables. Il faudra donc que sa différence soit alors égale à zero ou à l'infini : c'est-pourquoy si la quantité donnée est par exemple $au + zz$, l'on aura $adu + 2zdz = 0$, & par-conséquent $du. - dz :: 2z. a$. D'où l'on voit déja que dz doit être négative par rapport à du; c'est-à-dire que la position des droites CE, EF doit être telle que u croissant, z diminuë.

Maintenant si l'on mene EG perpendiculaire à la ligne AEB, & d'un de ses points quelconques G les perpendiculaires GL, GI sur CE, EF; & qu'ayant tiré par le point e pris infiniment prés de E, les droites CKe, FeH, on décrive des centres C, F les petits arcs de cercle EK, EH : on formera les triangles réctangles ELG & EKe, EIG & EHe, qui seront semblables entr'eux ; car si l'on ôte des angles droits GEe, LEK le même angle LEe, les restes LEG, KEe seront égaux ; on prouvera de même que les angles IEG, HEe seront égaux. On aura donc $GL. GI :: Ke\,(du). He\,(-dz) :: 2z. a$. D'où il suit que la position des droites CE, EF doit être telle qu'ayant mené la perpendiculaire EG sur la ligne AEB; le sinus GL de l'angle GEC soit au sinus GI de l'angle GEF, comme les quantités qui multiplient dz sont à celles qui multiplient du. Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE.

57. Si l'on veut à présent que la droite CE soit donnée de position & de grandeur, que la droite EF le soit de grandeur seulement, & qu'il faille trouver sa position ; il est clair que l'angle GEC étant donné, son sinus GL le sera aussi, & par-conséquent le sinus GI de l'angle cherché GEF. Donc si l'on décrit un cercle du diametre EG, & que l'on porte la valeur de GI sur sa circonférence de G en I; la droite EF qui passe par le point I aura la position requise.

Soit $au + bz$ la quantité donnée ; on trouvera $GI = \frac{a \times GL}{b}$; d'où l'on voit que quelque longueur qu'on donne à *EC* & à *EF*, la poſition de cette derniere ſera toûjours la même, puiſqu'elles n'entrent point dans la valeur de *GI*, qui par-conſéquent ne change point. Si $a = b$, il eſt clair que la poſition de *EF* doit être ſur *CE* prolongée du côté de *E*; puiſque $GL = GI$, lorſque les points *C*, *F* tombent de part & d'autre de la ligne *AEB*: mais lorſqu'ils tombent du même côté, l'angle *FEG* doit être pris égal à l'angle *CEG*. FIG. 42.

EXEMPLE X.

58. LE cercle *AEB* étant donné de poſition avec les points *C*, *F* hors de ce cercle; trouver ſur ſa circonférence le point *E* tel que la ſomme des droites *CE*, *EF* ſoit la moindre qu'il eſt poſſible. FIG. 42.

Suppoſant que le point *E* ſoit celuy que l'on cherche, & menant par le centre *O* la ligne *OEG*, il eſt clair qu'elle ſera perpendiculaire ſur la circonférence *AEB*; & partant * que les angles *FEG*, *CEG* ſeront égaux entr'eux. Si donc l'on mene *EH* en ſorte que l'angle *EHO* ſoit égal à l'angle *CEO*, & de même *EK* en ſorte que l'angle *EKO* ſoit égal à l'angle *FEO*, & les paralleles *ED*, *EL* à *OF*, *OC*; on formera les triangles ſemblables *OCE* & *OEH*, *OFE* & *OEK*, *HDE* & *KLE*; & en nommant les connuës *OE* ou *OA* ou *OB*, a; *OC*, b; *OF*, c; & les inconnuës *OD* ou *LE*, x; *DE* ou *OL*, y; l'on aura $OH = \frac{aa}{b}$, $OK = \frac{aa}{c}$, & HD $(x - \frac{aa}{b}) \cdot DE\ (y) :: KL\ (y - \frac{aa}{c}) \cdot LE\ (x)$. Donc $xx - \frac{aax}{b} = yy - \frac{aay}{c}$, qui eſt une équation à une hyperbole que l'on conſtruira facilement, & qui coupera le cercle au point cherché *E*. * *Art.* 57.

EXEMPLE XI.

59. UN voyageur partant du lieu *C* pour aller au lieu *F*, doit traverſer deux campagnes ſéparées par la ligne droite *AEB*. On ſuppoſe qu'il parcourt dans la campagne du côté de *C* l'eſpace a dans le tems c, & dans l'autre du FIG. 43.

côté de *F* l'espace *b* dans le même tems *c*: on demande par quel point *E* de la droite *AEB* il doit passer, afin qu'il employe le moins de tems qu'il est possible pour parvenir de *C* en *F*. Si l'on fait $a. CE (u) :: c. \frac{cu}{a}$. Et $b. EF (z) :: c. \frac{cz}{b}$. il est clair que $\frac{cu}{a}$ exprime le tems que le voyageur employe à parcourir la droite *CE*, & de même que $\frac{cz}{b}$ exprime celuy qu'il employe à parcourir *EF*; de sorte que $\frac{cu}{a} + \frac{cz}{b}$ doit être un *moindre*. D'où il suit

*Art. 56. * qu'ayant mené *EG* perpendiculaire sur la ligne *AB*; le sinus de l'angle *GEC* doit être au sinus de l'angle *GEF*, comme *a* est à *b*.

Cela posé, si l'on décrit du point cherché *E* comme centre de l'intervalle *EC* le cercle *CGH*, & qu'on mene sur la droite *AEB* les perpendiculaires *CA, HD, FB*, & sur *CE, EF* les perpendiculaires *GL, GI*; l'on aura $a.b :: GL.GI$. Or $GL = AE$, & $GI = ED$, parce que les triangles réctangles *GEL* & *ECA*, *GEI* & *EHD* sont égaux & semblables entr'eux, comme il est facile à prouver. C'est-pourquoy si l'on nomme l'inconnuë *AE*, *x*; on trouvera $ED = \frac{bx}{a}$: & nommant les connuës *AB*, *f*; *AC*, *g*; *BF*, *h*; les triangles semblables *EBF*, *EDH* donneront $EB (f-x). BF (h) :: ED \left(\frac{bx}{a}\right). DH = \frac{bhx}{af-ax}$. Mais à cause des triangles réctangles *EDH*, *EAC*, qui ont leurs hypotenuses *EH*, *EC* égales, l'on aura $\overline{ED}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AC}^2$, c'est-à-dire en termes analytiques, $\frac{bbxx}{aa} + \frac{bbhhxx}{aaff - 2aafx + aaxx} = xx + gg$: De sorte que ôtant les fractions, & ordonnant ensuite l'égalité, il viendra

$$\begin{array}{llllll} aax^4 & -2aafx^3 & +aaffxx & -2aafggx & +aaffgg & =0. \\ -bb & +2bbf & +aagg & & & \\ & & -bbff & & & \\ & & -bbhh & & & \end{array}$$

On peut encore trouver cette équation de la maniére qui suit, sans avoir recours à l'exemple 9.

Ayant nommé comme auparavant les connuës *AB*, f; *AC*, g; *BF*, b; & l'inconnuë *AE*, x; on fera a. *CE* $(\sqrt{gg+xx}) :: c. \frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}$ = au tems que le voyageur employe à parcourir la droite *CE*. Et de même b. *EF* $(\sqrt{ff-2fx+xx+bb}) :: c. \frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+bb}}{b}$ = au tems que le voyageur employe à parcourir la droite *EF*. Ce qui fera $\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a} + \frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+bb}}{b}$ = à un *moindre*; & partant sa différence $\frac{cxdx}{a\sqrt{gg+xx}} + \frac{cxdx-cfdx}{b\sqrt{ff-2fx+xx+bb}} = o$; d'où l'on tire, en divisant par cdx & en ôtant les incommensurables, la même égalité que ci-devant, dont l'une des racines fournira pour *AE* la valeur qu'on cherche.

EXEMPLE XII.

60. SOIT une poulie *F* qui pend librement au bout d'une corde *CF* attachée en *C*, avec un plomb *D* suspendu par la corde *DFB* qui passe au dessus de la poulie *F*, & qui est attachée en *B*, en sorte que les points *C*, *B* sont situés dans la même ligne horizontale *CB*. On suppose que la poulie & les cordes n'ayent aucune pesanteur; & l'on demande en quel endroit le plomb *D* ou la poulie *F* doit s'arrêter. FIG. 44.

Il est clair par les principes de la Mécanique que le plomb *D* descendra le plus bas qu'il luy sera possible, au dessous de l'horizontale *CB*; d'où il suit que la ligne à plomb *DFE* doit être un *plus grand*. C'est-pourquoy nommant les données *CF*, a; *DFB*, b; *CB*, c; & l'inconnuë *CE*, x; l'on aura $EF = \sqrt{aa-xx}$, $FB = \sqrt{aa+cc-2cx}$, & $DFE = b - \sqrt{aa+cc-2cx} + \sqrt{aa-xx}$ qui doit être un *plus grand*; & partant sa différence $\frac{cdx}{\sqrt{aa+cc-2cx}} - \frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}} = o$, d'où l'on tire $2cx^3 - 2ccxx - aaxx + aacc = o$, &

divisant par $x - c$, il vient $2cxx - aax - aac = 0$, dont l'une des racines fournit pour CE une valeur telle que la perpendiculaire ED passe par la poulie F & le plomb D lorsqu'ils sont en repos.

On pourroit encore résoudre cette question d'une autre maniére que voicy.

Nommant EF, y; BF, z; l'on aura $b - z + y =$ à un *plus grand*; & partant $dy = dz$. Or il est clair que la poulie F décrit le cercle CFA autour du point C comme centre; & partant si du point f pris infiniment prés de F, l'on mene fR parallele à CB, & fS perpendiculaire sur BF, l'on aura $FR = dy$, & $FS = dz$. Elles seront donc égales entr'elles; & par-conséquent les petits triangles réctangles FRf, FSf, qui ont de plus l'hypotenuse Ff commune, seront égaux & semblables; d'où l'on voit que l'angle RFf est égal à l'angle SFf, c'est-à-dire que le point F doit être tellement situé dans la circonférence FA, que les angles faits par les droites EF, FB sur les tangentes en F soient égaux entr'eux: ou bien (ce qui revient au même) que les angles BFC, DFC soient égaux.

Cela posé, si l'on mene FH, ensorte que l'angle FHC soit égal à l'angle CFB ou CFD; les triangles CBF, CFH seront semblables; comme aussi les triangles réctangles ECF, EFH, puisque l'angle CFE est égal à l'angle FHE, étant l'un & l'autre le complément à deux droits, des angles égaux FHC, CFD; & par-conséquent on aura $CH = \frac{aa}{c}$, & $HE\ (x - \frac{aa}{c})$. $EF\ (y) :: EF\ (y) . EC\ (x)$. Donc $xx - \frac{aax}{c} = yy = aa - xx$ par la proprieté du cercle, d'où l'on tire la même égalité que ci-devant.

EXEMPLE XIII.

61. L'ÉLÉVATION du pole étant donnée, trouver le jour du plus petit crépuscule.

Soit C le centre de la sphére; $APTOBHQ$ le méridien; $HDdO$ l'horizon; $QEeT$ le cercle crépusculaire parallele à l'horizon; *AMNB* l'équateur; *FEDG* la portion du parallale à l'équateur, que décrit le Soleil le jour du plus petit crépuſcule, renfermée entre les plans de l'horizon & du cercle crépuſculaire; *P* le pole auſtral; *PEM*, *PDN* des quarts de cercles de déclinaiſon. Larc *HQ* ou *OT* du méridien compris entre l'horizon & le cercle crépuſculaire, & l'arc *OP* de l'élévation du pole ſont donnés; & par-conſéquent leurs ſinus droits *CI* ou *FL* ou *QX*, & *OV*. L'on cherche le ſinus *CK* de l'arc *EM* ou *DN* de la déclinaiſon du Soleil lorſqu'il décrit le parallele *ED*.

S'imaginant une autre portion *fedg* d'un parallele à l'équateur, infiniment proche de *FEDG*, avec les quarts de cercles *Pem*, *Pdn*; il eſt clair que le temps que le Soleil employe à parcourir l'arc *ED*, devant être un *moindre*, la différence de l'arc *MN* qui en eſt la meſure, & qui devient *mn* lorſque *ED* devient *ed*, doit être nulle; d'où il ſuit que les petits arcs *Mm*, *Nn*, & par-conſéquent le petits arcs *Re*, *Sd* ſeront égaux entr'eux. Or les arcs *RE*, *SD* étant renfermés entre les mêmes paralleles *ED*, *ed*, ſont auſſi égaux, & les angles en *S* & en *R* ſont droits. Donc les petits triangles réctangles *ERe*, *DSd* (que l'on conſidére comme réctilignes * à cauſe de l'infinie petiteſſe de leurs côtés, ſeront égaux & ſemblables; & par-conſéquent les hypotenuſes *Ee*, *Dd* ſeront auſſi égales entr'elles. *Art. 3.

Cela poſé, les droites *DG*, *EF*, *dg*, *ef* communes ſections des plans *FEDG*, *fedg* paralleles à l'équateur, avec l'horizon & le cercle crépuſculaire, ſeront perpendiculaires ſur les diametres *HO*, *QT*, puiſque les plans de tous ces cercles ſont perpendiculaires chacun ſur le plan du méridien; & les petites droites *Gg*, *Ff* ſeront égales entr'elles, puiſque les droites *FG*, *fg* ſont paralleles. Donc $\sqrt{\overline{Dd}^2 - \overline{Gg}^2}$ ou $DG - dg = \sqrt{\overline{Ee}^2 - \overline{Ff}^2}$ ou $fe - FE$. Or il eſt clair par ce que l'on a démontré dans l'article 50. que ſi l'on mene à diſcrétion dans un demi-cercle deux appliquées infiniment proches, le petit arc qu'elles renferment, ſera à leur différence, comme le rayon eſt à la coupée depuis le centre; ce qui donne ici (à cauſe des cercles HDO, QET) $CO.CG :: Dd$ ou $Ee.DG - dg$ ou $fe - FE :: IQ.IF :: CO + IQ$ ou $OX.CG + IF$ ou GL. Mais à cauſe des triangles réctangles ſemblables CVO, CKG, FLG, l'on aura $CO.CG :: OV.GK$. Et $GK.GL :: CK.FL$ ou QX. Donc $OV.CK :: OX.XQ :: XQ.XH$ par la proprieté du cercle: c'eſt-à-dire que ſi l'on prend QX pour le rayon ou ſinus total dans le triangle réctangle QXH, dont l'angle HQX eſt de 9 degrés, parce que les Aſtronomes font l'arc HQ de 18 degrés, l'on aura comme le ſinus total eſt à la tangente de 9 degrés, de même le ſinus de l'élévation du pole eſt au ſinus de la déclinaiſon auſtrale du Soleil dans le temps du plus petit crépuſcule. D'où il ſuit que ſi l'on ôte 0.8002875 du logarithme du ſinus de l'élévation du pole; le reſte ſera le logarithme du ſinus cherché. Ce qu'il falloit trouver.

ANEXO 2

LA COLLECTION MATHEMATIQUE DE PAPPUS

PAPPUS D'ALEXANDRIE

LA COLLECTION MATHÉMATIQUE

ŒUVRE TRADUITE POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS

AVEC UNE INTRODUCTION ET DES NOTES

PAR

PAUL VER EECKE
INGÉNIEUR DES MINES
INSPECTEUR GÉNÉRAL HONORAIRE DU TRAVAIL
COMMANDEUR DE L'ORDRE DE LÉOPOLD

TOME PREMIER

Ouvrage publié sous les auspices de la Fondation Universitaire de Belgique

DESCLÉE DE BROUWER ET Cie

PARIS (VIIe)
76bis, RUE DES SAINTS-PÈRES

BRUGES
22, QUAI AUX BOIS

1933

construire un triangle au moyen des droites ΑΓ, Ε, Ζ (1). Que soit construit le triangle ΑΓΔ .... (2).

V.

PROPOSITION 5. — Parmi les triangles isopérimètres et de même base, le triangle isocèle est le plus grand, et celui qui approche plus l'isocèle (3) est continuellement plus grand.

En effet, soient, sur la base ΒΓ, des triangles isopérimètres : le triangle isocèle ΑΒΓ et le triangle ΒΔΓ qui approche plus l'isocèle que le triangle ΒΕΓ (car ils peuvent être construits en vertu de ce que l'on a démontré tantôt) (4) ; je dis que le triangle ΑΒΓ est le plus grand et que le triangle ΒΔΓ est plus grand que le triangle ΒΕΓ.

Prolongeons la droite ΒΑ ; posons la droite ΑΖ égale à la droite ΓΑ et menons les droites de jonction ΖΔ, ΔΑ. Dès lors, puisque les droites ΖΔ, ΒΔ (5) sont plus grandes que la droite ΒΖ, elles sont donc aussi plus grandes que les droites ΒΑ, ΑΓ (car la droite ΑΓ est égale à la droite ΑΖ). Mais, les droites ΒΑ, ΑΓ sont égales aux droites ΒΔ, ΔΓ ; donc, les droites ΒΔ, ΔΖ sont aussi plus grandes que les droites ΒΔ, ΔΓ. Si on retranche de part et d'autre la droite ΒΔ, la droite restante ΖΔ est plus grande que la droite ΔΓ. Or, les deux droites ΖΑ, ΑΔ sont respectivement égales aux deux droites ΓΑ, ΑΔ, et la base ΖΔ est plus grande

1. EUCLIDE, liv. I, prop. 22 : « Avec trois droites qui sont égales à trois droites données, construire un triangle ; il faut que deux de ces trois droites, de quelque manière qu'elles soient prises, soient plus grandes que la troisième, parce que deux côtés d'un triangle, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisième ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 37.

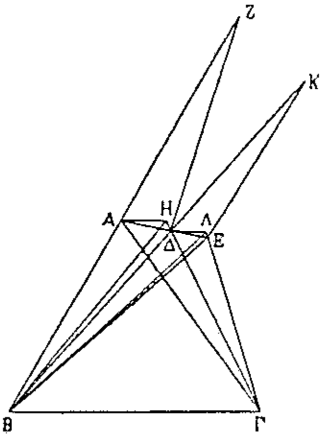
2. La fin de la proposition se perd dans une lacune (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 318, l. 18). Il manque donc la conclusion disant que deux droites ont ainsi été établies sur la droite ΑΓ, dont l'une est égale à la droite Ε, et dont la somme est égale à la somme ΑΒ + ΒΓ.

Le passage lacuneux est suivi d'une phrase que Hultsch place entre crochets pour marquer qu'il s'agit d'une extrapolation : « et il est clair que si les droites Ε, Ζ sont égales, le triangle ΑΓΔ sera isocèle ; et si elles sont inégales, la plus grande d'entre elles sera égale à la droite ΓΔ » (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 318, ll. 18-20).

3. ἰσοσκελέστερον, littéralement : plus isocèle, c'est-à-dire se rapprochant plus de la figure isocèle.

4. Voir proposition 4.

5. C'est-à-dire la somme des droites ΖΔ, ΔΒ.



que la base ΔΓ ; donc, l'angle compris sous les droites ZA, AΔ est plus grand que celui compris sous les droites ΔA, AΓ ; donc, l'angle compris sous ZA, AΓ est plus grand que le double de l'angle compris sous ΔA, AΓ. Mais, il est le double de l'angle compris sous AB, BΓ, c'est-à-dire de l'angle compris sous AΓ, ΓB (car le triangle est isocèle) ; donc, l'angle compris sous AΓ, ΓB est aussi plus grand que l'angle compris sous ΔA, AΓ. Posons l'angle compris sous les droites ΓA, AH égal à cet angle compris sous les droites AΓ, ΓB ; il s'ensuit que la droite AH est parallèle à la droite BΓ à cause des angles alternes égaux. Dès lors, prolongeant la droite ΓΔ jusqu'au point H, et menant la droite de jonction BH, il est clair que le triangle ABΓ est plus grand que le triangle BΔΓ, car le triangle BAΓ équivaut au triangle BHΓ [1].

Derechef, prolongeons la droite BΔ jusqu'au point K ; posons la droite ΔK égale à la droite ΔΓ, et menons les droites de jonction KE, ΔE. Puisque les droites BE, EK sont plus grandes que la droite BK, c'est-à-dire que les droites BΔ, ΔΓ, c'est-à-dire que les droites BE, EΓ, si l'on retranche de part et d'autre la droite BE, la droite restante EK est plus grande que la droite EΓ. Or, les deux droites KΔ, ΔE sont respectivement égales aux deux droites ΓΔ, ΔE, et la base KE est plus grande que la base EΓ ; donc, l'angle compris sous les droites KΔ, ΔE est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΓΔ, ΔE ; donc, l'angle compris sous KΔ, ΔΓ est plus grand que le double de l'angle compris sous ΓΔ, ΔE. Or, ce même angle compris sous KΔ, ΔΓ est plus petit

1. En notations usuelles, on a : $Z\Delta + \Delta B > BZ$. Or, on a par construction : $AZ = A\Gamma$; donc : $Z\Delta + \Delta B > BA + A\Gamma$. Or, les triangles isopérimètres $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ donnent : $BA + A\Gamma = \Delta B + \Delta\Gamma$; donc : $Z\Delta + \Delta B > \Delta B + \Delta\Gamma$ ou : $Z\Delta > \Delta\Gamma$. Considérant les triangles $ZA\Delta$, $\Gamma A\Delta$ dans lesquels $ZA = A\Gamma$, on a : $\widehat{ZA\Delta} > \widehat{\Delta A\Gamma}$, d'où : $\widehat{ZA\Gamma} > 2\widehat{\Delta A\Gamma}$. Or, le triangle $AB\Gamma$ est isocèle ; donc: $\widehat{ZA\Gamma} = 2\widehat{AB\Gamma} = 2\widehat{A\Gamma B}$; donc: $\widehat{A\Gamma B} > \widehat{\Delta A\Gamma}$. Construisons $\widehat{\Gamma AH} = \widehat{A\Gamma B}$, d'où parallélisme des droites AH, $B\Gamma$, d'où : triangle $BA\Gamma$ = triangle $BH\Gamma$; donc triangle $BA\Gamma$ > triangle $B\Delta\Gamma$.

que le double de l'angle compris sous ΔΓ, ΓΒ (car l'angle compris sous ΔΓ, ΓΒ est plus grand que celui qui est compris sous ΔΒ, ΒΓ, parce que les angles compris sous ΑΒ, ΒΓ et sous ΑΓ, ΓΒ sont égaux) ; donc, l'angle compris sous ΔΓ, ΓΒ est plus grand que celui qui est compris sous ΓΔ, ΔΕ. Établissons, sur la droite ΔΓ et au point Δ, un angle compris sous les droites ΓΔ, ΔΛ égal à l'angle compris sous les droites ΔΓ, ΓΒ. Or, il est clair que la droite ΔΛ, parallèle à la droite ΒΓ à cause des angles alternes, sera située entre les droites ΔΕ, ΔΚ ; donc, si la droite ΓΕ est prolongée jusqu'à la parallèle ΔΛ qu'elle rencontre au point Λ, et si on mène la droite de jonction ΒΛ, le triangle ΒΓΔ sera équivalent au triangle ΒΛΓ (1) ; en sorte que le triangle ΑΒΓ est plus grand que le triangle ΒΕΓ qui est plus petit que le triangle ΒΔΓ (2).

VI.

Proposition 6. — Soient, au contraire, deux triangles rectangles semblables ΑΒΓ, ΔΕΖ ayant les angles Γ, Ζ égaux ; je dis que le carré des droites ΑΓ, ΔΖ constituant une seule droite équivaut aux carrés des droites ΒΓ, ΕΖ constituant une seule droite et des droites ΑΒ, ΔΕ constituant une seule droite.

En effet, prolongeons la droite ΕΖ jusqu'au point Η ; posons la droite ΕΗ égale à la droite ΒΓ ; que la droite menée par le point Η, parallèlement à la droite ΔΕ, rencontre au point Κ la droite ΔΖ prolongée, et menons la droite ΔΘ parallèle à la droite ΖΗ. Dès lors, puisque la droite ΔΘ est égale à la droite ΗΕ dans un parallélogramme, c'est-à-dire égale à la droite ΒΓ ; que l'angle compris sous les droites ΚΔ, ΔΘ est égal à l'angle Ζ,

1. Le texte présente ici l'interpolation : « étant sur la même base ΒΓ, et les droites ΒΓ, ΔΛ étant parallèles » (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 322, l. 4).

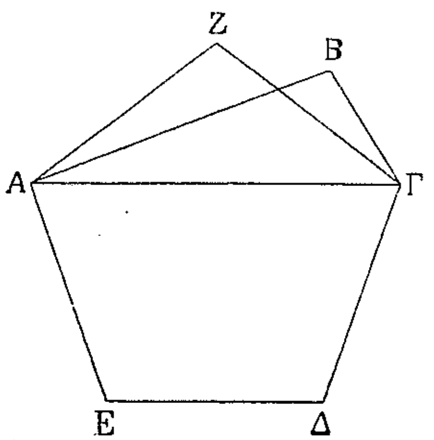
2. On a : $\mathrm{BE} + \mathrm{EK} > \mathrm{BK}$. Posons : $\Delta\mathrm{K} = \Delta\Gamma$; donc : $\mathrm{BE} + \mathrm{EK} > \mathrm{B}\Delta + \Delta\Gamma$. Or, les triangles isopérimètres ΒΔΓ, ΒΕΓ donnent : $\mathrm{B}\Delta + \Delta\Gamma = \mathrm{BE} + \mathrm{E}\Gamma$; donc : $\mathrm{BE} + \mathrm{EK} > \mathrm{BE} + \mathrm{E}\Gamma$ ou, comme le texte : $\mathrm{EK} > \mathrm{E}\Gamma$. Considérant les triangles ΚΔΕ, ΓΔΕ dans lesquels $\mathrm{K}\Delta = \Gamma\Delta$, on a : $\widehat{\mathrm{K}\Delta\mathrm{E}} > \widehat{\Gamma\Delta\mathrm{E}}$, d'où : $\widehat{\mathrm{K}\Delta\Gamma} > 2\widehat{\Gamma\Delta\mathrm{E}}$. Mais, $\widehat{\mathrm{K}\Delta\Gamma} = \widehat{\Delta\Gamma\mathrm{B}} + \widehat{\Delta\mathrm{B}\Gamma}$ et $\widehat{\Delta\mathrm{B}\Gamma} < \widehat{\mathrm{AB}\Gamma} = \widehat{\mathrm{A}\Gamma\mathrm{B}} < \widehat{\Delta\Gamma\mathrm{B}}$, d'où : $\widehat{\mathrm{K}\Delta\Gamma} < 2\widehat{\Delta\Gamma\mathrm{B}}$; donc, comme le texte : $\widehat{\Delta\Gamma\mathrm{B}} > \widehat{\Gamma\Delta\mathrm{E}}$. Construisons $\widehat{\Gamma\Delta\Lambda} = \widehat{\Delta\Gamma\mathrm{B}}$, d'où parallélisme des droites ΔΛ, ΒΓ, d'où : triangle $\mathrm{B}\Delta\Gamma =$ triangle $\mathrm{B}\Lambda\Gamma$, donc : triangle $\mathrm{B}\Delta\Gamma >$ triangle $\mathrm{BE}\Gamma$.

IX.

PROPOSITION 10. — Ces choses étant exposées au préalable, nous allons démontrer ce qui a été proposé plus haut (1), notamment que, parmi les figures rectilignes ayant même périmètre et même nombre de côtés, la plus grande est celle qui est équilatérale et équiangle (2).

Soit ΑΒΓΔΕ le plus grand des plurilatères (3) ayant même périmètre et même nombre de côtés que lui ; je dis qu'il est équilatéral.

En effet, qu'il ne le soit pas ; mais que les droites ΑΒ, ΒΓ soient, si possible, inégales, et menons la droite de jonction ΑΓ sur laquelle soit établi le triangle isocèle ΑΖΓ, de manière que la somme des droites ΑΖ, ΖΓ soit égale à la somme des droites ΑΒ, ΒΓ, conformément à la quatrième proposition (4). Dès lors, puisque nous avons démontré, avant les trois dernières propositions (5), que le triangle isocèle est le plus grand des triangles isopérimètres établis sur une même base, il s'ensuit que le triangle ΑΖΓ est plus grand que le triangle ΑΒΓ. Ajoutons de part et d'autre le quadrilatère ΑΓΔΕ ; on aura une aire ΖΓΔΕΑ plus grande que l'aire la plus grande ΑΒΓΔΕ (6), de même péri-



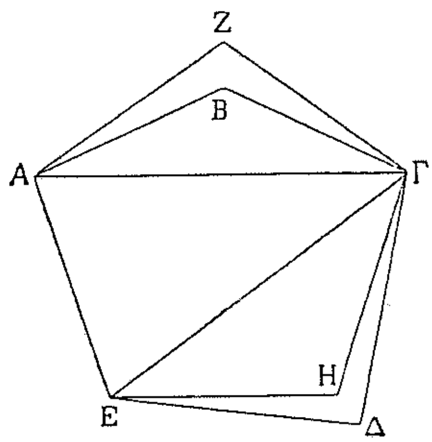
1. Voir l'alinéa qui précède la proposition 4.
2. Cette proposition est démontrée dans l'opuscule de Zénodore, où elle constitue la proposition 11 (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III : *Supplementa in Pappi Alexandrini Collectione, Zenodori de figuris isometris*, pp. 1206-1207). Pappus reproduit la démonstration de Zénodore dans la même forme, mais d'une manière un peu plus explicite.
3. Pappus emploie le mot πολύπλευρον, plurilatère, lorsque la figure rectiligne plane est considérée au point de vue de ses côtés ; tandis qu'il réserve le mot πολύγωνον, polygone, pour le cas où cette figure est considérée spécialement au point de vue de ses angles ou de ses sommets.
4. Voir proposition 4.
5. Voir proposition 5.
6. Par hypothèse.

mètre qu'elle et ayant même nombre de côtés ; ce qui est impossible. En conséquence, ΑΒΓΔΕ est équilatéral. Et il est clair que le plurilatère plus équilatéral (1) est continuellement plus grand ; car, ainsi qu'on l'a démontré trois propositions plus haut (2), le triangle plus isocèle est aussi continuellement plus grand.

X.

Au reste, je dis que le plurilatère ΑΒΓΔΕ est aussi équiangle.

En effet, qu'il ne le soit pas ; mais que l'angle Β soit plus grand que l'angle Δ, s'il se peut. Dès lors, la droite ΑΓ est aussi plus grande que la droite ΓΕ (car la somme des droites ΑΒ, ΒΓ est égale à la somme des droites ΓΔ, ΔΕ) (3). Établissons, sur les droites inégales ΑΓ, ΓΕ, les triangles semblables isocèles ΑΖΓ, ΓΗΕ, ayant la somme des côtés ΑΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΕ égale à la somme des côtés ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, comme nous l'avons montré dans la proposition qui précède d'une celle-ci (4). En conséquence, la somme des triangles établis ΑΖΓ, ΓΗΕ sera plus grande que celle des triangles primitifs ΑΒΓ, ΓΔΕ ; car cela a été également démontré deux propositions plus haut (5). Et si l'on ajoute de part et d'autre le triangle ΑΓΕ, il se présentera de même ce qui ne peut avoir lieu ; car le plurilatère ΑΖΓΗΕ sera plus grand que le plus grand plurilatère ΑΒΓΔΕ (6) ayant même périmètre que lui. En conséquence, le plurilatère ΑΒΓΔΕ est équiangle. [Mais il est aussi équilatéral] (7) ; donc, parmi les figures rectilignes iso-



1. ἰσοπλευρότερον, (figure plurilatère) dont les côtés tendent le plus vers l'égalité.
2. Voir proposition 5.
3. Par hypothèse.
4. Voir proposition 8.
5. Voir proposition 7.
6. Par hypothèse.
7. Reconstitution proposée par Hultsch (Cf. *loc. cit.* vol. III, *appendix*, p. 1240).

périmètres et de même nombre de côtés, la plus grande est équilatérale et équiangle.

Et il est évident que le cercle est la plus grande des figures isopérimètres, puisque nous avons démontré (1) qu'il est plus grand qu'une figure ordonnée (2), c'est-à-dire équilatérale et équiangle.

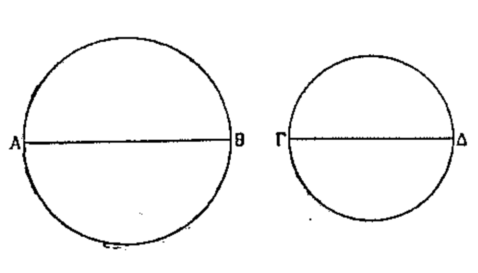
XI.

D'ailleurs, ceci rentre également dans les mêmes considérations que nous venons de faire : le demi-cercle est le plus grand des segments de cercle qui ont le même arc. Nous allons le démontrer en exposant d'abord les choses que l'on adopte à cet effet.

Proposition 11. — Les circonférences de cercles sont entre elles comme les diamètres (3).

Soient deux cercles AB, ΓΔ et leurs diamètres AB, ΓΔ ; je dis que la droite AB est à la droite ΓΔ comme la circonférence du cercle AB est à la circonférence du cercle ΓΔ.

En effet, puisque le carré de la droite AB est au carré de la droite ΓΔ comme le cercle AB est au cercle ΓΔ (4), mais, que le rectangle compris sous la droite AB et la circonférence du cercle est le quadruple du cercle AB, et que le rectangle compris sous la droite ΓΔ et la circonférence du cercle ΓΔ est le quadruple du cercle ΓΔ (car cela a été démontré précédemment) (5), il s'ensuit que le carré de la droite AB est au



carré de la droite ΓΔ comme le rectangle compris sous la droite AB et la circonférence du cercle AB est au rectangle compris sous

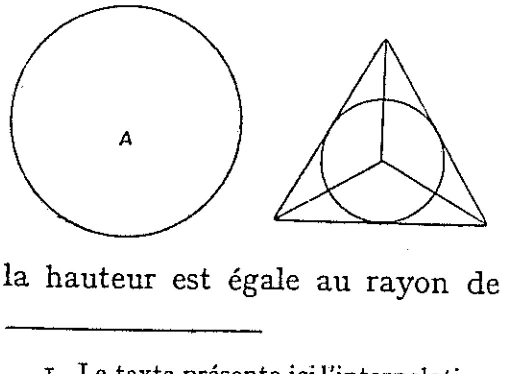
1. Voir proposition 6.
2. C'est-à-dire régulière.
3. La même proposition, énoncée en termes peu différents, sera de nouveau démontrée au livre VIII, prop. 22.
4. Euclide, liv. XII, prop. 2, énoncée p. 181, n. 1.
5. Voir proposition 3, p. 243.

Nous négligerons pour le moment ces treize figures (1) comprises sous les polygones inégaux et dissemblables parce qu'elles sont moins régulières, et il convient de comparer avec la sphère les cinq figures que nous avons nommées ; car celles-ci étant comprises sous des plans égaux et semblables, elles sont les seules à avoir des angles solides égaux et sont, par cela-même, plus régulières que les autres. D'ailleurs, il a été démontré par Euclide (2) et par d'autres qu'il est impossible de trouver d'autres figures en dehors de ces cinq qui soient comprises sous des polygones équilatéraux et semblables.

Nous allons donc comparer ces derniers polyèdres avec la sphère.

PROPOSITION 18. — Soit une sphère dont on a le centre, et soit l'une des cinq figures que nous avons dites, ayant sa surface totale équivalente à celle de la sphère ; je dis que la sphère est plus grande.

En effet, imaginons une sphère inscrite dans le polyèdre de manière à être tangente aux plans qui l'entourent ; il s'ensuit que la surface du polyèdre est plus grande que la surface de la sphère inscrite, car elle l'entoure. Mais, la surface du polyèdre équivaut à la surface de la sphère A ; en sorte que la surface de la sphère A est aussi plus grande que la surface de la sphère inscrite dans le polyèdre, et le rayon de la sphère A est donc aussi plus grand que le rayon de la sphère inscrite. Or, la surface de la sphère A équivaut à la surface du polyèdre ; donc, le cône dont la base est un cercle équivalent à la surface de la sphère A [et dont la hauteur est égale au rayon de la sphère A] (3) est plus grand



1. Le texte présente ici l'interpolation : ἤτοι ἀνομοιογώνια ὄντα ἢ (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 358, l. 19).
2. EUCLIDE, *Eléments*, liv. XIII.
3. Lacune comblée par Eisenmann dans son édition première du texte grec de la seconde partie du livre V de Pappus, établie d'après un manuscrit de Paris (codex Parisinus 2368) et intitulée : *Pappi Alexandrini collectiones mathematicae nunc primum graece edidit Herm. Jos. Eisenmann. Libri quinti pars altera.* Parisiis, 1824.

que la pyramide dont la base est le rectiligne (1) équivalent à la surface du polyèdre, et dont la hauteur est le rayon de la sphère inscrite dans le polyèdre. Mais, ce cône équivaut à la sphère A (car cela est manifeste en vertu des choses démontrées par Archimède dans le livre *De la Sphère et du Cylindre* (2) et des autres lemmes que nous avons rangés ci-dessous) (3) ; tandis que cette pyramide équivaut au polyèdre (4) ; par conséquent, la sphère A est plus grande que le polyèdre proposé.

XX.

Au reste ces cinq figures présentent encore entre elles une certaine conformité que nous examinerons ultérieurement (5). On démontrera, en effet, que si on leur suppose des surfaces équivalentes, celle qui a plus de bases est continuellement plus grande. Ainsi, l'icosaèdre sera plus grand que le dodécaèdre et le dodécaèdre plus grand que l'octaèdre et, pareillement, l'octaèdre sera plus grand que le cube et le cube plus grand que la pyramide. Ces solides sont d'ailleurs affectés de la même manière que les polygones plans ; car, de même qu'on a démontré que, lorsque ces derniers ont même périmètre, celui qui a plus d'angles est continuellement plus grand (6) et que le cercle est le plus grand de tous (7), on démontrera maintenant que la sphère est plus grande que les polyèdres.

---

1. εὐθύγραμμον (sous-entendu σχῆμα, figure), c'est-à-dire la figure plane délimitée par des lignes droites, ou le rectiligne.
2. ARCHIMÈDE, *De la Sphère et du Cylindre*, liv. I, prop. 33 : « L'aire de toute sphère est quadruple du plus grand de ses cercles », et prop. 34 : « Toute sphère est quadruple du cône ayant le plus grand cercle de la sphère comme base et le rayon de la sphère comme hauteur ». Voir : *Œuvres complètes d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, pp. 63-69.
3. Voir les vingt-trois lemmes constituant les propositions 20 à 36 qui vont suivre.
4. EUCLIDE, liv. XII, prop. 6 : « Les pyramides qui ont la même hauteur et qui ont des polygones pour bases, sont entre elles comme leurs bases ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 143.
5. Les propriétés de conformité ou de comparaison (σύγκρισιν) des cinq polyèdres réguliers feront l'objet de la troisième partie du livre V, à partir de la proposition 38.
6. Voir proposition 1.
7. Voir proposition 2.

PROPOSITION 57. — Il résulte clairement des propositions démontrées ci-dessus que, parmi les cinq figures qu'on appelle aussi polyèdres, celle qui est plus polyédrique [1] est continuellement plus grande, et l'on reconnaîtra de la manière suivante, qu'en dehors de ces cinq figures, il est impossible d'en trouver d'autres qui soient comprises sous des polygones équilatéraux égaux et semblables [2].

Tout angle solide doit être constitué par trois angles plans [3] au moins ; et si les angles qui comprennent l'angle solide sont au nombre de trois ou plus, ils sont toujours plus petits que quatre angles droits [4]. En conséquence, un angle solide ne peut pas être compris sous des angles d'hexagone ou sous ceux d'une autre figure rectiligne plus polygonale (car trois de ces angles qui pourraient au moins le comprendre ne sont pas plus petits que quatre angles droits) ; tandis qu'il peut être compris sous trois angles seulement du pentagone, comme cela se présente pour le dodécaèdre. Derechef, quatre angles ou plus du carré ne peuvent pas comprendre un angle solide (car ils ne sont pas plus petits que quatre angles droits) ; tandis que trois de ces angles comprennent l'angle du cube. Enfin, de la même façon, six angles ou plus du triangle équilatéral ne sont pas plus petits que quatre angles droits et, par là même, ils ne comprendront pas un angle solide ; tandis que cinq, quatre et trois de ces angles pourront le comprendre, et l'angle de l'icosaèdre sera compris sous cinq de ces

---

ou : 12 pyramides de base ΦϚΤ et de hauteur ΥΩ $>$ 8 pyramides de base ΣΡΠ et de hauteur ΧΨ ou : volume dodécaèdre $>$ volume octaèdre.

1. πολυεδρότερον, la (figure) qui a des bases plus nombreuses.

2. Cette proposition doit être rapprochée de la proposition 18 du livre XIII d'Euclide : « Exposer les côtés des cinq figures, et les comparer entre eux. » (Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 289), et Scolie : « Je dis aussi, qu'excepté les cinq figures dont nous venons de parler ; on ne peut pas construire une autre figure qui soit contenue sous des figures équilatérales et équiangles ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 298.

3. EUCLIDE, liv. XI, déf. 11 : « Un angle solide est l'inclinaison mutuelle de plus de deux lignes qui se rencontrent et qui ne sont pas dans une même surface. Autrement : Un angle solide est celui qui est compris par plus de deux angles plans qui ne sont pas dans une même surface et qui sont construits en un seul point. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 3.

4. EUCLIDE, liv. XI, prop. 21 : « Tout angle solide est compris sous des angles, plans qui sont plus petits que quatre angles droits ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 43.

angles, celui de l'octaèdre sous quatre, et celui de la pyramide sous trois. Il résulte donc manifestement de ce que nous venons de dire, qu'à l'exception de ces derniers angles solides, il n'y en a pas d'autre qui soit constitué par des angles égaux d'un même polygone ; en sorte qu'en dehors des cinq polyèdres dont nous venons de parler, il n'est pas possible d'en trouver un autre qui soit contenu sous des polygones égaux et semblables.

FIN DU I^er VOLUME

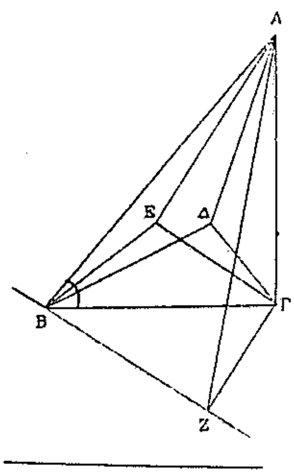
Imprimé par Desclée De Brouwer et Cie, Bruges (Belgique) — 7063

équivaut aux carrés des droites AB, BΔ, ΓΔ. Or, les carrés des droites AB, BΔ valent le carré de la droite AΔ ; donc, le carré de la droite AΓ équivaut aux carrés des droites AΔ, ΔΓ. En conséquence, l'angle compris sous les droites AΔ, ΔΓ est droit (1) ; donc, la droite AΔ est perpendiculaire sur la droite ΓΔ ; ce qu'il fallait démontrer.

XLIII.

PROPOSITION 44. — D'un point élevé A, menons sur le plan sous-jacent une droite AB non perpendiculaire à ce plan, et menons du point A une perpendiculaire à ce plan ; qu'elle le rencontre au point Γ, et menons la droite de jonction ΓB. Je dis que l'angle compris sous les droites AB, BΓ est le plus petit de tous ceux qui sont compris sous la droite AB et quelqu'une des droites menées du point B dans le plan sous-jacent ; que l'angle plus rapproché de cet angle est continuellement plus petit que celui qui en est plus éloigné, et que deux angles égaux ne s'établissent que de part et d'autre de cet angle.

En effet, menons une droite quelconque BΔ dans le plan sous-jacent ; menons du point Γ la droite ΓΔ perpendiculaire sur



cette droite, et menons la droite de jonction AΔ. La droite AΔ est donc perpendiculaire sur la droite BΔ en raison de ce qui a été démontré précédemment (2). Et puisque l'angle compris sous les droites AΓ, ΓΔ est droit, la droite ΔA est plus grande que la droite AΓ ; par conséquent, le rapport de la droite BA à la droite AΓ est plus grand que celui de la droite BA à la droite AΔ. Et les angles compris sous les droites BΓ, BA et sous les droites BΔ, ΔA sont droits ; donc, l'angle compris sous les

1. Le triangle rectangle ABΓ donne : $\overline{A\Gamma}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{B\Gamma}^2$, et le triangle BΔΓ, rectangle par construction, donne : $\overline{B\Gamma}^2 = \overline{B\Delta}^2 + \overline{\Delta\Gamma}^2$; donc, $\overline{A\Gamma}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{B\Delta}^2 + \overline{\Delta\Gamma}^2$. Or (EUCLIDE, liv. XI, déf. 3, énoncée p. 382, n. 4), on a : $\overline{AB}^2 + \overline{B\Delta}^2 = \overline{A\Delta}^2$; donc, $\overline{A\Gamma}^2 = \overline{A\Delta}^2 + \overline{\Delta\Gamma}^2$, d'où le triangle AΔΓ est rectangle en Δ.

2. Voir proposition 43, p. 437.

droites ΒΑ, ΑΓ est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΒΑ, ΑΔ en vertu de ce qui a été démontré dans l'avant-dernier lemme (1) ; en sorte que l'angle restant compris sous ΑΒ, ΒΓ est plus petit que l'angle compris sous ΑΒ, ΒΔ. On démontrera pareillement que l'angle compris sous ΑΒ, ΒΓ est plus petit que tous les autres (2) ; donc, l'angle compris sous ΑΒ, ΒΓ est le plus petit.

Je dis aussi que l'angle plus rapproché de cet angle est continuellement plus petit que celui qui en est plus éloigné.

En effet, menons une droite ΒΕ dans le plan sous-jacent (3) ; menons du point Γ la perpendiculaire ΓΕ sur cette droite, et menons la droite de jonction ΑΕ. La droite ΑΕ est donc aussi perpendiculaire sur la droite ΒΕ. (4) Et puisque l'angle droit compris sous les droites ΒΔ, ΔΓ est égal à l'angle droit compris sous les droites ΓΕ, ΕΒ ; mais que l'angle compris sous les droites ΒΓ, ΓΔ est aussi plus grand que l'angle compris sous les droites ΒΓ, ΓΕ, il s'ensuit que le rapport de la droite ΕΓ à la droite ΓΒ est plus grand que celui de la droite ΔΓ à la droite ΓΒ ; donc, à fortiori, la droite ΕΓ est plus grande que la droite ΓΔ (5). Et la droite ΓΑ est à angles droits sur chacune des droites ΓΔ, ΓΕ ; donc, la droite ΕΑ est aussi plus grande que la droite ΑΔ ; donc, le rapport de la droite ΒΑ à la droite ΑΔ est plus grand que son rapport à la droite ΑΕ (6). Et les angles situés aux points Δ, Ε sont

---

1. Les triangles rectangles ΒΓΑ, ΒΔΑ donnent (prop. 42) : $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} > \widehat{\mathrm{BA\Delta}}$. Or, $\widehat{\mathrm{AB\Gamma}} = 1$ angle droit $- \widehat{\mathrm{BA\Gamma}}$ et $\widehat{\mathrm{AB\Delta}} = 1$ angle droit $- \widehat{\mathrm{BA\Delta}}$; donc : angle ΑΒΓ $<$ angle ΑΒΔ.

2. Sous-entendu : τῶν περιεχομένων ὑπό τε τῆς ΑΒ καὶ ἑκάστης τῶν ἀπὸ τοῦ Β σημείου διαγομένων εὐθειῶν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, qui sont compris sous (la droite) ΑΒ et quelqu'une des droites menées du (point) Β dans le plan sous-jacent.

3. C'est-à-dire une droite ΒΕ telle que l'on ait : angle ΕΒΓ $>$ angle ΔΒΓ.

4. Voir proposition 43, p. 437.

5. On a par construction : $\widehat{\Gamma\mathrm{BE}} > \widehat{\Gamma\mathrm{B}\Delta}$. Or, les triangles ΒΕΓ, ΒΔΓ sont droits en Ε et Δ ; donc : $\widehat{\mathrm{B}\Gamma\Delta} > \widehat{\mathrm{B}\Gamma\mathrm{E}}$. Dès lors, la réciproque de la proposition 42 (voir p. 437, n. 1) donne : $\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\Gamma\Delta} > \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{B}\Gamma} > \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{B}\Gamma}$, d'où (Euclide, liv. V, prop. 10, énoncée p. 36, n. 1) : ΓΕ $>$ ΓΔ.

6. Les triangles rectangles ΑΓΕ, ΑΓΔ donnent : $\overline{\Gamma\mathrm{E}}^2 = \overline{\mathrm{EA}}^2 - \overline{\mathrm{A}\Gamma}^2$ et $\overline{\Gamma\Delta}^2 = \overline{\mathrm{A}\Delta}^2 - \overline{\mathrm{A}\Gamma}^2$, d'où en présence de la dernière inégalité de la note précédente : $\overline{\mathrm{EA}}^2 - \overline{\mathrm{A}\Gamma}^2 > \overline{\mathrm{A}\Delta}^2 - \overline{\mathrm{A}\Gamma}^2$, d'où : ΕΑ $>$ ΑΔ, d'où (Euclide, liv. V, prop. 8, énoncée p. 36, n. 6) : $\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{A}\Delta} > \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{EA}}$.

droits ; donc, l'angle compris sous les droites BA, AΔ est plus grand que celui qui est compris sous les droites BA, AE. En conséquence, l'angle compris sous les droites AB, BΔ est plus petit que l'angle compris sous les droites AB, BE (1). On démontrerait pareillement que l'angle plus rapproché de l'angle compris sous les droites AB, BΓ est continuellement plus petit que celui qui en est plus éloigné.

Enfin, je dis que deux angles égaux ne s'établissent que de chaque côté de l'angle.

Établissons sur la droite ΓB, en son point B, dans le plan sous-jacent, un angle compris sous les droites ΓB, BZ égal à l'angle compris sous les droites ΔB, BΓ ; menons du point Γ la perpendiculaire ΓZ sur la droite BZ, et menons la droite de jonction AZ. Puisque l'angle compris sous les droites ΓB, BΔ est égal à celui qui est compris sous les droites ΓB, BZ ; que l'angle droit compris sous les droites ΓΔ, ΔB est égal à l'angle droit compris sous les droites ΓZ, ZB, et que la droite ΓB est le côté commun des triangles, il s'ensuit que la droite BΔ est égale à la droite BZ et la droite ΓΔ égale à la droite ΓZ (2). Et la droite AΓ est perpendiculaire sur chacune des droites ΔΓ, ΓZ (3) ; donc, la droite AΔ est aussi égale à la droite AZ. Dès lors, puisque la droite ΔB est égale à la droite BZ ; que la droite BA est commune et que la base ΔA est égale à la base AZ, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites AB, BΔ est égal à l'angle compris sous les droites AB, BZ (4). On démontrera pareillement qu'il ne s'établit pas un autre angle égal à celui qui est compris sous les droites AB, BΔ.

L'angle compris sous les droites AB, BΓ est donc le plus petit ; l'angle qui en est plus rapproché est continuellement plus petit que celui qui en est plus éloigné, et deux angles égaux ne s'établissent que de part et d'autre de cet angle.

1. Voir proposition 42, p. 436.
2. EUCLIDE, liv. I, prop. 26, énoncée p. 284, n. 1.
3. EUCLIDE, liv. XI, déf. 3, énoncée p. 328, n. 4.
4. EUCLIDE, liv. I, prop. 8 : « Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont la base égale à la base, les angles compris par les côtés égaux seront égaux ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 18.

la droite EZ est donnée [1] ; donc, la droite EZ résout le problème.

Je dis maintenant que cette droite est la seule [2]. En effet, menons transversalement une autre droite BΛ [3]. Dès lors, si la droite BΛ satisfait aussi au problème, la droite NΛ sera égale à la droite EZ. Or, la droite ZB est plus grande que la droite NB [4] ; donc, la droite entière BΛ sera plus petite que la droite BE ; ce qui est absurde, car elle est plus grande. En conséquence, la droite BΛ ne satisfait pas au problème ; donc, la droite BE est unique.

Au reste, pour reconnaître encore laquelle de ces droites est la plus grande, on démontre les choses de la manière suivante : Puisque la droite ΛB est plus grande que la droite BE et la droite BZ plus grande que la droite BN, il s'ensuit que la droite restante NΛ est plus grande que la droite ZE. Et il est clair que la droite qui est plus rapprochée du point Γ est continuellement plus petite que celle qui en est plus éloignée [5].

LEMME UTILE POUR LA DÉTERMINATION [6] DU NEUVIÈME PROBLÈME, TEL QU'ON LE TROUVE CHEZ LES ANCIENS.

IX.

PROPOSITION 73. — Soit la droite BA égale à la droite AΓ, et coupons la droite BΓ en deux parties égales au point Δ ; je dis que la droite BΓ est la plus petite de toutes les droites menées par le point Δ.

En effet, menons une autre droite EZ, et prolongeons la

1. On a (lemme VII, ou proposition 71) : $\overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{EZ}^2 = \overline{H\Delta}^2$, d'où, en présence de la relation de construction : $\overline{\Delta H}^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 + \Theta^2$, on a : $\Theta = EZ$. Or, Θ est donné ; donc, EZ est donné.

2. C'est-à-dire que la droite EZ seule satisfait au problème.

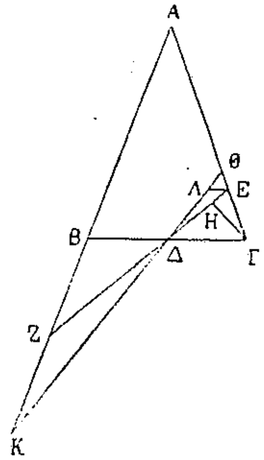
3. C'est-à-dire menons une droite BΛ inclinée vers le point B, située au-dessous du point E.

4. L'angle en Δ est droit ; donc, l'angle BNZ est obtus, d'où (EUCLIDE, liv. I, prop. 19, énoncée p. 434, n. 7) on a : $ZB > BN$.

5. Ce qui se rapporte au cas où une droite inclinée vers B est menée au-dessus du point E, c'est-à-dire entre les points Γ et E.

6. C'est-à-dire utile pour la détermination ou discussion des conditions de possibilité.

droite AB jusqu'au point Z ; je dis que la droite EZ est plus grande que la droite ΓB. Puisque l'angle compris sous les droites AB, BΓ, c'est-à-dire l'angle Γ, est plus grand que l'angle compris sous les droites BZ, ZE, il est possible de retrancher de l'angle Γ un angle égal à l'angle compris sous les droites BZ, ZE. Que l'angle compris sous les droites ΔΓ, ΓH soit égal à ce dernier angle. Dès lors, la droite ΓΔ est à la droite ΔH comme la droite ZΔ est à la droite ΔB. Or, la droite ZΔ est plus grande que la droite ΔB ; donc, la droite ΓΔ est aussi plus grande que la droite ΔH. En conséquence, puisque la droite ZΔ est plus grande que la droite ΔB, c'est-à-dire la droite ΔΓ, mais que la droite ΔΓ est plus grande que la droite ΔH, [il s'ensuit que la droite ZΔ est la plus grande et que la droite ΔH est la plus petite] (1). Dès lors, puisque les quatre droites ZΔ, ΔB, ΔΓ, ΔH sont en proportion, que la droite ZΔ est la plus grande et la droite ΔH la plus petite, il s'ensuit que la droite ZH est plus grande que la droite BΓ ; de sorte que la droite BΓ, plus petite que la droite ZH, est, à fortiori, plus petite que la droite EZ (2). On démontrera pareillement que la droite BΓ est plus petite que toutes les droites menées par le point Δ. En conséquence, la droite BΓ est la plus petite de toutes les droites menées par le point Δ. Je dis maintenant que celle qui en est plus rapprochée est plus petite que celle qui en est plus éloignée.



En effet, menons transversalement une autre droite ΘK, et établissons l'angle compris sous les droites ΔE, EΛ égal à l'angle K (car cela est possible). Dès lors, la droite KΔ est de nouveau plus

1. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 307, l. 31).

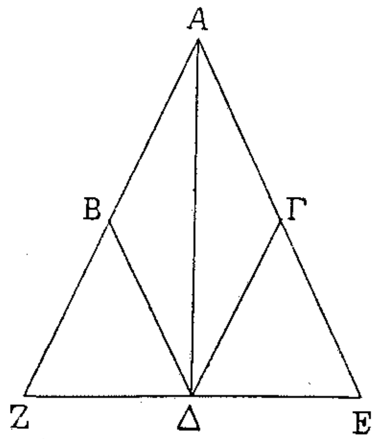
2. On a par construction : $\widehat{\Delta\Gamma H} = \widehat{BZE}$, d'où similitude des triangles ΔHΓ, ΔBZ, d'où : $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta H} = \frac{Z\Delta}{\Delta B}$. Or, $Z\Delta > \Delta B$; donc : $\Gamma\Delta > \Delta H$. Or, on a par construction : $\Delta B = \Gamma\Delta$; donc, comme le texte : $Z\Delta > \Gamma\Delta > \Delta H$. Dès lors, (Euclide, liv. V, prop. 25 : « Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande et la plus petite sont plus grandes que les deux autres ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 287), on a : $Z\Delta + \Delta H > \Delta B + \Gamma\Delta$ ou, comme le texte : $ZH > B\Gamma$, d'où, à fortiori : $B\Gamma < ZE$.

grande que la droite ZΔ et la droite EΔ plus grande que la droite ΔΛ ; en sorte que la droite entière KΛ est plus grande que la droite EZ. En conséquence, la droite ΘK est, à fortiori, plus grande que la droite EZ ; en sorte que la droite ZE est plus petite que la droite ΘK. Dès lors, la droite BΓ est plus petite que toutes les droites menées par le point Δ, et celle qui en est plus rapprochée est plus petite que celle qui en est plus éloignée (1).

X.

PROPOSITION 74. — Cela étant ainsi, la détermination est manifeste.

En effet, si nous exposons le rhombe ABΓΔ et si, menant la droite de jonction AΔ, nous lui menons la perpendiculaire EZ rencontrant les droites AΓ, AB aux points E, Z, il nous faut déterminer si cette droite est la plus grande ou la plus petite de toutes les droites qui sont menées par le point Δ. Et puisque la droite AΔ est la diagonale, que la droite EZ est perpendiculaire sur la droite AΔ, on a obtenu le triangle isocèle EAZ ayant la droite EA égale à la droite AZ. En conséquence, en raison du lemme précédent, la droite EZ est plus petite que toutes les droites menées par le point Δ, et celle qui en est plus rapprochée est continuellement plus petite que celle qui en est plus éloignée.



LEMMES SUR LE SECOND LIVRE DES INCLINAISONS.

I.

PROPOSITION 75. — Soit le demi-cercle décrit sur la droite AB ; menons transversalement une droite quelconque ΔE, et menons-lui

1. Même raisonnement que dans la note précédente.

ANEXO 6

COURS DE CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL DE SERRET

COURS
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET INTÉGRAL,

PAR J.-A. SERRET,
MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES.

DEUXIÈME ÉDITION.

TOME PREMIER.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1879

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES MAXIMA ET MINIMA.

Des maxima et des minima des fonctions d'une seule variable.

137. Soient $f(x)$ une fonction de la variable x et x_0 une valeur particulière de x. Si l'on peut assigner une quantité positive ε, aussi petite d'ailleurs que l'on voudra, telle que l'on ait

$$f(x_0+h) < f(x_0)$$

pour toutes les valeurs de h comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, on dit que la fonction $f(x)$ passe par un *maximum* quand x atteint la valeur x_0, et $f(x_0)$ est dite une valeur *maxima* de $f(x)$.

Pareillement, si l'on a

$$f(x_0+h) > f(x_0)$$

pour toutes les valeurs de h comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, on dit que la fonction $f(x)$ passe par un *minimum* quand x atteint la valeur x_0, et $f(x_0)$ est une valeur *minima* de $f(x)$.

Lorsqu'on fait croître x, la fonction $f(x)$ croît ou décroît, selon que la dérivée $f'(x)$ est positive ou négative; il en résulte que la fonction $f(x)$ ne peut cesser de décroître pour croître, ou de croître pour décroître, que quand $f'(x)$ change de signe; alors cette dérivée s'annule, à moins qu'elle ne devienne discontinue. Ainsi les valeurs de x qui répondent aux maxima et aux minima de $f(x)$

sont comprises parmi celles qui annulent la dérivée $f'(x)$ ou qui la rendent discontinue. On voit aussi qu'une fonction peut avoir plusieurs maxima et plusieurs minima qui se succèdent alternativement, du moins tant que $f(x)$ reste finie.

138. Exemples. — 1° Considérons en premier lieu la fonction

$$f(x) = x(a-x),$$

on a ici

$$f'(x) = a - 2x;$$

la dérivée $f'(x)$ s'annule pour $x = \frac{a}{2}$ et elle passe du positif au négatif quand x croît de $\frac{a}{2} - \varepsilon$ à $\frac{a}{2} + \varepsilon$; donc la fonction $f(x)$ va d'abord en croissant et elle décroît ensuite; par conséquent, elle passe par un maximum quand x devient égale à $\frac{a}{2}$; la valeur maxima de la fonction est $\frac{a^2}{4}$.

2° Considérons en second lieu la fonction

$$f(x) = (x-a)^{\frac{2}{3}} + b;$$

on a

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-a)^{-\frac{1}{3}}.$$

La dérivée $f'(x)$ ne s'annule que pour $x = \infty$; mais elle devient discontinue en passant par l'infini, pour $x = a$, et il est évident que cette valeur a répond à un minimum de la fonction $f(x)$.

139. La formule de Taylor conduit au résultat qui précède, et elle permet en outre de le compléter. Nous supposerons ici que les dérivées que nous aurons à considérer restent continues entre des limites voisines des valeurs qui répondent aux maxima et aux minima; les cas de discontinuité doivent être examinés à part, dans chaque question particulière.

Nous désignons par R_n, comme nous l'avons fait dans le Chapitre précédent, le reste de la série de Taylor correspondant au terme de rang n, et nous rappellerons qu'on peut toujours supposer l'accroissement h de la variable x assez petit en valeur absolue pour que la valeur absolue du reste soit moindre que celle du dernier terme, quand celui-ci ne se réduit pas à zéro (109).

Cela posé, soit $f(x)$ la fonction donnée, on a

$$(1) \qquad f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0)+R_2;$$

donc, si $f'(x_0)$ n'est pas nulle, la différence

$$f(x_0+h)-f(x_0)$$

changera de signe avec h, et la valeur $f(x_0)$ ne sera ni un maximum ni un minimum. Supposons donc

$$f'(x_0)=0;$$

alors on aura, par la formule de Taylor,

$$(2) \qquad f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)+R_3,$$

et le premier membre aura le signe de $f''(x_0)$ pour toutes les valeurs de h comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, ε étant suffisamment petit; donc $f(x_0)$ sera une valeur maxima ou une valeur minima, suivant que l'on aura

$$f''(x_0)<0 \quad \text{ou} \quad f''(x_0)>0.$$

Mais si l'on a

$$f''(x_0)=0,$$

la formule (2) ne nous apprend plus rien.

Supposons généralement que l'on ait

$$f'(x_0)=0,\quad f''(x_0)=0,\quad \ldots,\quad f^{(n-1)}(x_0),$$

et que la $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}(x)$ ne s'annule pas pour $x=x_0$. Alors la formule de Taylor donnera

$$(3)\qquad f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x_0)+R_{n+1}.$$

Cette formule (3) nous montre que, si n est impair, la différence $f(x_0+h)-f(x_0)$ changera de signe avec h, et, par conséquent, il n'y aura ni maximum ni minimum pour $x=x_0$. Au contraire, si n est impair, la même différence conservera le signe de $f^{(n)}(x_0)$ quand h passera du négatif au positif, et, dans ce cas, $f(x_0)$ sera maximum ou minimum suivant que l'on aura

$$f^{(n)}(x_0)<0 \quad\text{ou}\quad f^{(n)}(x_0)>0.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Pour que la fonction $f(x)$ ait une valeur maxima ou minima répondant à la valeur x_0 de x, il faut et il suffit que la première des dérivées de $f(x)$ qui ne s'annulent pas pour $x=x_0$ soit d'ordre pair. Alors, il y a maximum ou minimum, suivant que la valeur de cette dérivée pour $x=x_0$ est négative ou positive.

Application à quelques exemples.

140. Exemple I. — *Trouver le minimum de la fonction x^x.*

Posant

$$y=x^x,\quad \text{d'où}\quad \log y = x\log x,$$

il vient, en différentiant,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\log x+1,$$

puis, en différentiant de nouveau,

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x}.$$

La condition commune du maximun et du minimum est $\frac{dy}{dx} = 0$, ou

$$\log x + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1}{e};$$

on a ensuite, pour cette valeur de x,

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = e,$$

et, puisque $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positive, la valeur $\frac{1}{e}$ répond à un minimum; il est évident qu'il n'y a pas ici de maximum. L'expression précédente de $\frac{dy}{dx}$ montre que cette dérivée s'annule pour $x = \frac{1}{e}$ en passant du négatif au positif, en sorte qu'il n'était pas nécessaire de former l'expression de $\frac{d^2y}{dx^2}$ pour conclure l'existence du minimum.

141. Exemple II. — *Trouver les valeurs maxima et minima de la fonction $x^m(a-x)^n$, dans laquelle a désigne une constante positive donnée, et où m et n sont des entiers positifs.*

Posant

$$y = x^m(a-x)^n,$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma - (m+n)x].$$

On voit que, x croissant, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ s'annule pour $x = \frac{ma}{m+n}$ en passant du positif au négatif; donc la fonction y devient maxima pour

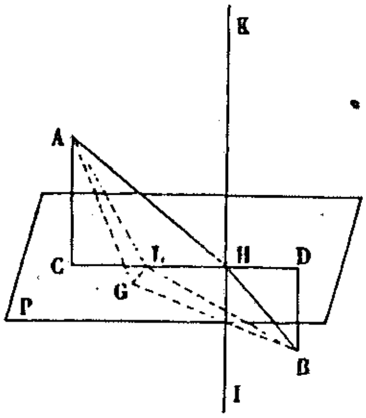
$$x = \frac{ma}{m+n}, \quad a - x = \frac{na}{m+n},$$

ce qui donne

$$\frac{x}{m} = \frac{a-x}{n}.$$

La dérivée $\frac{dy}{dx}$ s'annule aussi pour $x=0$ si m est >1, et pour $x=a$ si n est >1. Mais, en s'annulant, elle ne change de signe que si l'exposant m ou n est pair; elle passe alors du négatif au positif. La fonction y est donc minima pour $x=0$, quand m est pair, et pour $x=a$, quand n est pair.

142. Exemple III (Problème de Fermat). — *Deux milieux étant séparés par un plan* P, *on demande le chemin que doit suivre un mobile pour aller, dans le temps le plus court, d'un point donné* A *du premier milieu à un point donné* B *du second. Le mobile se meut dans le premier milieu avec la vitesse constante* u, *et dans le second milieu avec la vitesse constante* v.



Le chemin demandé se compose de deux lignes droites, puisque l'espace parcouru par le mobile, dans l'un ou l'autre milieu, est proportionnel au temps employé. En outre, ce chemin est situé dans le plan ACDB mené perpendiculairement au plan P par les points donnés A et B et qui coupe celui-ci suivant la ligne CD; en effet, considérons la ligne brisée AGB, située hors du plan ACDB, et du point G où elle rencontre le plan P, abaissons GL perpendiculaire sur CD, les droites AL et LB seront respectivement moindres que AG et GB; par conséquent, le temps pour suivre le chemin ALB sera moindre que le temps nécessaire pour aller de A en B par le chemin AGB.

Cela posé, désignons par a et b les perpendiculaires AC, BD abaissées des points A et B sur le plan P, par c la distance CD et par x la distance du point C à un point quelconque H de CD; on aura

$$AH = \sqrt{x^2 + a^2}, \quad BH = \sqrt{(c - x)^2 + b^2};$$

donc le temps t que le mobile emploiera pour aller de A en B, par le chemin AHB, sera

$$(1) \qquad t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}}{v};$$

telle est la fonction de x dont on demande le minimum. Il est évident que la question ne comporte pas de maximum.

En égalant à zéro la dérivée de la fonction t, il vient

$$(2) \qquad \frac{1}{u}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v}\frac{c - x}{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}} = 0,$$

ou, en faisant disparaître les radicaux,

$$(v^2 - u^2)x^2(c - x)^2 + b^2 v^2 x^2 - a^2 u^2 (c - x)^2 = 0;$$

ainsi l'inconnue x dépend d'une équation du quatrième degré. Mais, sans résoudre cette équation, on peut obtenir comme il suit la propriété géométrique qui caractérise la ligne demandée. A cet effet, menons la ligne KI perpendiculaire en H au plan P; désignons par i l'angle AHK et par r l'angle IHB, on aura

$$\sin r = \frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{BH}} = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}};$$

$$\sin i = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AH}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

et, par conséquent, l'équation (2), qui exprime la condition du minimum, deviendra

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u}{v}.$$

Il résulte de là que le sinus de l'angle d'*incidence* i est au sinus de l'angle de *réfraction* r dans le rapport des vitesses u et v avec lesquelles le mobile peut se mouvoir dans le premier et dans le second milieu, respectivement.

143. Exemple IV. — *Trouver les maxima et les minima de la distance d'un point donné à une courbe donnée.*

Désignons par x_0 et y_0 les coordonnées du point donné relatives à deux axes rectangulaires; par x et y les coordonnées de la courbe donnée. L'ordonnée y est une fonction donnée de x, et le carré de la distance du point (x_0, y_0) au point (x, y) est

$$V = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2; \tag{1}$$

il s'agit d'avoir les valeurs maxima et minima de la fonction de x représentée par V.

On a

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{dV}{dx} = (x-x_0) + (y-y_0)\dfrac{dy}{dx}, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2V}{dx^2} = \left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right) + (y-y_0)\dfrac{d^2y}{dx^2}. \end{cases} \tag{2}$$

La condition $\frac{dV}{dx} = 0$ du maximum ou du minimum est ici

$$(3) \qquad (x - x_0) + (y - y_0)\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou

$$\frac{y - y_0}{x - x_0}\frac{dy}{dx} = -1.$$

$\frac{y - y_0}{x - x_0}$ est le coefficient d'inclinaison de la droite qui joint le point donné M_0 au point demandé M de la courbe donnée, $\frac{dy}{dx}$ est le coefficient d'inclinaison de la tangente en M à la même courbe. Donc l'équation précédente exprime que la droite qui joint le point donné au point cherché est *normale* à la courbe.

Soit M l'un des points ainsi déterminés par l'équation (3); ce point répondra à un minimum ou à un maximum, suivant que $\frac{d^2V}{dx^2}$ sera positive ou négative. Mais, si $\frac{d^2V}{dx^2}$ est nulle, il faudra recourir aux dérivées des ordres supérieurs pour décider s'il y a maximum ou minimum, ou s'il n'y a ni l'un ni l'autre. Ce dernier cas se présentera en particulier si, $\frac{d^2V}{dx^2}$ étant nulle pour le point M, la valeur de $\frac{d^3V}{dx^3}$ est différente de zéro.

La droite M_0M ayant été menée, supposons que le point donné M_0 prenne toutes les positions possibles sur cette normale, il y aura une position M' du point M_0 pour laquelle la dérivée $\frac{d^2V}{dx^2}$ sera nulle; par conséquent, si l'on nomme x', y' les coordonnées de M' on aura

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - y')\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

et la deuxième équation (2) pourra alors se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2} = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\left(\frac{y_0 - y'}{y - y'}\right).$$

Cela montre que la valeur de M_0M sera un minimum ou un maximum, suivant que $y_0 - y'$ et $y - y'$ seront de même signe ou de signes contraires. En d'autres termes, il y aura minimum quand le point donné M_0 sera situé entre M' et M, maximum dans le cas contraire. Le point M' est, comme on le verra plus loin, ce qu'on nomme le *centre de courbure* de la courbe donnée au point M.

144. Supposons que la courbe donnée soit un cercle ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

on a, en différentiant cette équation,

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0, \quad \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) + y\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Alors l'équation (3) du numéro précédent devient

$$\frac{y}{y_0} - \frac{x}{x_0} = 0;$$

elle représente la droite qui joint le point donné au centre du cercle, et elle coupe la circonférence en deux points, dont l'un répond à un minimum, l'autre à un maximum. Effectivement le point désigné par M' est ici le centre du cercle donné, et l'on a

$$\frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{R^2y_0}{y^3},$$

d'où il suit que $\frac{d^2V}{dx^2}$ est positif ou négatif, suivant que y_0 et y sont de même signe ou de signes contraires.

ANEXO 5

COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE STURM

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR CH. STURM,
Membre de l'Institut;

REVU ET CORRIGÉ

PAR E. PROUHET,
Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.

7e ÉDITION, SUIVIE DE LA

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. H. LAURENT.

TOME PREMIER.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1884

QUATORZIÈME LEÇON.

MAXIMUM ET MINIMUM DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

Maximums et minimums des fonctions d'une *seule* variable indépendante. — Applications. — Maximums et minimums d'une fonction implicite.

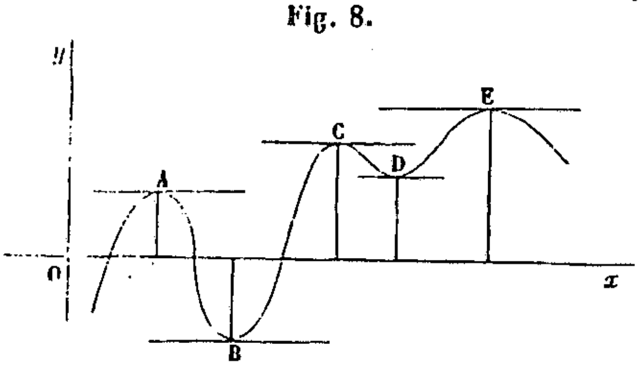
MAXIMUMS ET MINIMUMS DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE INDÉPENDANTE.

182. Soit $f(x)$ une fonction d'une seule variable x. Si, en faisant croître x, la fonction prend une valeur réelle qui surpasse celles qui la précèdent et celles qui la suivent immédiatement, cette valeur de la fonction est dite un *maximum*. On appelle *minimum* une valeur moindre que les valeurs voisines.

Si $f(x)$ devient un maximum pour $x = a$, la différence $f(a+h) - f(a)$ sera *négative*, quel que soit le signe de h, pourvu qu'on prenne h suffisamment petit. Cette différence serait *positive* si $f(a)$ était un minimum.

183. Une fonction peut avoir plusieurs valeurs maximums et minimums, lesquelles doivent se succéder alternativement. Un maximum peut être moindre qu'un minimum. Un maximum négatif devient un minimum quand on fait abstraction de son signe, et de même un minimum négatif pris positivement devient un maximum.

Fig. 8.



Ces diverses conséquences de la définition sont rendues manifestes par l'inspection de la courbe sinueuse ABCDE. Soit $y = f(x)$ l'équation de cette courbe; les valeurs maximums et minimums de $f(x)$ sont évidemment les ordonnées des points A, B, etc., où la tangente est parallèle à l'axe des x. On voit que l'ordonnée du point A, qui est un maximum, est moindre que l'ordonnée du point D, qui est un mimimum, et que l'ordonnée du point B, qui est un maximum en valeur absolue, est un minimum quand on la prend avec son signe.

184. On sait que la fonction $f(x)$ croît continuellement lorsqu'en faisant croître x, dans un certain intervalle, la dérivée $f'(x)$ reste constamment positive, et que $f(x)$ décroît au contraire quand la dérivée est négative. La fonction $f(x)$ ne devient donc ni *maximum* ni *minimum* tant que, x croissant, la fonction dérivée conserve le même signe. Mais si la dérivée change de signe lorsque x atteint et dépasse une certaine valeur a, alors la fonction $f(x)$ deviendra, pour cette valeur, un *maximum* si la dérivée passe *du positif au négatif*, ou un *minimum* si la dérivée passe *du négatif au positif*. Cette dérivée ne peut d'ailleurs changer de signe qu'en s'évanouissant, ou bien encore en devenant discontinue ou infinie. Ainsi, les valeurs de x qui rendent $f(x)$ maximum ou minimum sont uniquement celles pour lesquelles $f'(x)$ devient nulle, infinie ou discontinue en changeant de signe.

185. Ordinairement le maximum et le minimum répondent à des valeurs de x pour lesquelles la fonction dérivée change de signe en s'évanouissant et en restant finie et continue. Dans ce cas, on peut établir les conditions du maximum et celles du minimum à l'aide de la série de Taylor. On a d'abord

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\mathrm{R}.$$

Si $f'(x)$ n'est pas nulle, la différence $f(x+h)-f(x)$ a le même signe que $hf'(x)$. Cette différence change donc de signe avec h; donc $f(x)$ n'est, dans ce cas, ni maximum ni minimum.

Mais si $f'(x)$ est nulle et si $f''(x)$ ne l'est pas, on a

$$f(x+h)-f(x)=\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\mathrm{R};$$

alors, quel que soit le signe de h, $f(x+h)-f(x)$ a le même signe que $f''(x)$. Donc, si $f''(x)$ est positive pour la valeur de x que l'on considère et qui annule $f'(x)$, $f(x)$ est un minimum, et si $f''(x)$ est négative, $f(x)$ est un maximum.

Mais si $f''(x)$ est nulle, on aura

$$f(x+h)-f(x)=\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\mathrm{R};$$

et si $f'''(x)$ n'est pas nulle, $f(x+h)-f(x)$ changera de signe avec h : $f(x)$ ne sera ni maximum ni minimum.

Si $f'''(x)=0$, on aura

$$f(x+h)-f(x)=\frac{h^4}{1.2.3.4}f^{\mathrm{iv}}(x)+\mathrm{R},$$

et $f(x)$ sera un minimum ou un maximum selon que $f^{\mathrm{iv}}(x)$ sera positive ou négative pour la valeur de x qui annule $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, et ainsi de suite.

186. En général, *quand une valeur de x annule quelques-unes des dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$, ..., si la première dérivée qu'elle n'annule pas est d'ordre pair, la fonction $f(x)$ est un minimum ou un maximum, selon que cette dérivée est positive ou négative; mais il n'y a ni maximum ni minimum si la première dérivée qui ne s'annule pas est d'ordre impair.*

Cette règle s'accorde avec celle que nous avons donnée plus haut (n° 184); car si, par exemple, les trois premières dérivées s'annulent, on aura, en appliquant la série de Taylor à la dérivée,

$$f'(x+h)=\frac{h^3}{1.2.3}f^{\mathrm{iv}}(x)+\mathrm{R}',$$

et l'on voit bien que $f'(x)$ changera de signe avec h. Il est clair que $f'(x)$ ne changerait pas de signe avec h si la première dérivée qui ne s'annule pas était d'ordre impair.

APPLICATIONS.

187. 1° *Minimum de x^x*. Comme il revient au même de faire la recherche du minimum sur le logarithme népérien de cette expression, posons

$$f(x) = \mathrm{l}.x^x = x\,\mathrm{l}x;$$

on aura

$$f'(x) = 1 + \mathrm{l}x \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Or si l'on fait

$$1 + \mathrm{l}x = 0,$$

on a

$$\mathrm{l}x = -1, \quad \text{d'où} \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

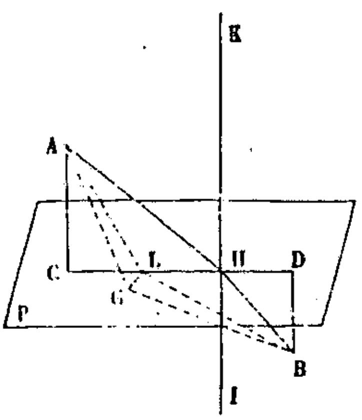
Comme

$$f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0,$$

on en conclut que x^x est minimum pour $x = \frac{1}{e}$.

2° *On donne deux points A et B, situés dans deux milieux différents, séparés par une surface plane P. Un mobile se meut dans le premier milieu avec une vitesse uniforme u, et dans le second milieu avec une vitesse uniforme v; on demande le chemin AHB que ce mobile doit suivre pour se rendre de A en B dans le temps le plus court.*

Fig 9.



Il est clair d'abord que ce chemin doit être composé de lignes droites. Je dis ensuite que la ligne brisée qui résout le problème doit être dans le plan ABCD, conduit par les perpendiculaires AC, BD au plan P. En effet, supposons que cette ligne soit AGB et qu'elle rencontre le plan P au point G non situé dans le plan ABCD. Menons GL perpendiculaire à CD, et joignons AL et BL. Les triangles AGL et BGL étant rectangles en L, on a $AL < AG$ et $BL < BG$; par suite, le mobile ira plus rapidement du point A au point B en suivant le chemin ALB qu'en suivant le chemin AGB.

Cherchons donc, dans le plan ABCD, perpendiculaire au plan P, la ligne AHB, qui est parcourue par le mobile dans le moindre temps possible. Soient

$$AC = a, \quad BD = b, \quad CD = c \quad \text{et} \quad CH = x;$$

le temps que le mobile emploie pour aller de A en H est $\frac{AH}{u} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u}$, et celui qu'il met pour aller de H en B est $\frac{BH}{v} = \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v}$; par suite, la fonction qu'il s'agit de rendre un minimum est

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v}.$$

Posons donc

$$f'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0,$$

ou bien

$$\frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}.$$

Si l'on voulait tirer de cette équation la valeur de x, il faudrait en élever les deux membres au carré, et l'on aurait ensuite à résoudre une équation du quatrième degré. Mais comme

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin CAH = \sin AHK,$$

$$\frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = \sin HBD = \sin BHI,$$

on voit que, dans le cas du minimum [la fonction $f(x)$ n'a pas évidemment de maximum], on a

$$\frac{\sin \mathrm{AHK}}{u} = \frac{\sin \mathrm{BHI}}{v} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin \mathrm{AHK}}{\sin \mathrm{BHI}} = \frac{u}{v}.$$

Dans la théorie de la lumière, la quantité $\frac{u}{v}$, rapport des vitesses de la lumière dans les deux milieux, est l'indice de la réfraction de la lumière, au passage du premier milieu dans le second.

3° $$f(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x}.$$
On a

$$f'(x) = e^x - 2\sin x - e^{-x},$$
$$f''(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x}.$$

Si l'on égale $f'(x)$ à 0, on a $x = 0$, valeur qui, substituée dans $f(x)$, donne $f(0) = 4$.

Pour savoir si c'est un maximum ou un minimum, substituons 0 à la place de x dans $f''(x)$. Comme $f''(0) = 0$, il faut aller plus loin. Or

$$f'''(x) = e^x + 2\sin x - e^{-x} \quad \text{et} \quad f^{\text{iv}}(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x},$$

d'où l'on tire

$$f'''(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{\text{iv}}(0) = 4;$$

donc $f(0) = 4$ est un minimum de $f(x)$.

4° *Trouver la distance minimum d'un point donné* $\mathrm{M}(a, b)$ *à une courbe dont on connaît l'équation*

(1) $$y = f(x).$$

Joignons MK, K étant un point quelconque de la courbe. On aura

$$\overline{\mathrm{MK}}^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

En égalant à zéro la différentielle de cette expression, nous aurons

$$(x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} = 0,$$

équation qui revient à

$$(2) \qquad \frac{y-b}{x-a}\cdot\frac{dy}{dx}+1=0.$$

Or cette relation entre $\frac{dy}{dx}$, coefficient angulaire de la tangente à la courbe donnée au point (x, y), et $\frac{y-b}{x-a}$, coefficient angulaire de la droite MK, montre que ces deux droites sont perpendiculaires entre elles. Donc la droite minimum doit couper la courbe donnée à angle droit.

Si la distance MK était susceptible d'un maximum, on le trouverait encore par la résolution des équations (1) et (2).

Considérons en particulier le cercle dont l'équation est

$$x^2+y^2=r^2.$$

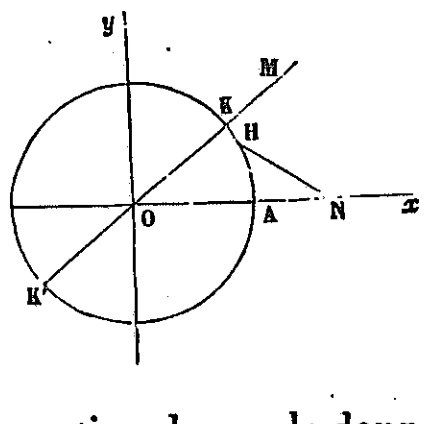
On aura $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, et la relation (2) deviendra

$$1-\frac{y-b}{x-a}\cdot\frac{x}{y}=0,$$

ou bien, après réduction,

$$y=\frac{b}{a}x.$$

Fig. 10.



Ainsi, pour déterminer x et y, nous aurons les deux équations

$$x^2+y^2=r^2,$$
$$y=\frac{b}{a}x,$$

qui, prises simultanément, représentent les points d'intersection du cercle donné avec la droite MO. Alors KM sera la distance minimum, et K'M la distance maximum, comme on le verra facilement en considérant les dérivées suivantes.

Mais il se présente ici une singularité que l'on peut cependant expliquer par la définition même des maximums et des minimums.

Supposons que le point donné soit le point N situé sur l'axe des abscisses à une distance a du centre. Le carré de la distance NH sera représenté par l'expression

$$y^2 + (x - a)^2,$$

ou bien par

$$r^2 - 2ax + a^2.$$

Or la dérivée de cette expression est une quantité constante $(-2a)$ qui, par conséquent, ne peut être égalée à zéro. Ainsi, quoiqu'il existe une distance minimum qui est NA, on ne l'obtient pas par notre procédé. Cela vient de ce que, d'après la définition, une fonction est minimum pour une certaine valeur de la variable, lorsqu'elle augmente pour des valeurs plus grandes et plus petites de cette variable. Or, si NH est considérée comme une fonction de x, NA n'est plus un minimum dans le sens que nous venons de dire, puisque cette fonction, réelle pour des valeurs de x moindres que r, devient imaginaire pour des valeurs plus grandes.

5°
$$f(x) = x^m (b - x)^n.$$

Cette fonction est nulle pour $x = 0$ et pour $x = b$. Il est clair qu'entre les deux valeurs 0 et b, il y en aura au moins une pour laquelle elle sera maximum; en prenant la dérivée, on aura

$$\begin{aligned} f'(x) &= mx^{m-1}(b - x)^n - nx^m(b - x)^{n-1} \\ &= x^{m-1}(b - x)^{n-1}(mb - mx - nx). \end{aligned}$$

Il faudra donc poser

$$x^{m-1}(b - x)^{n-1}[mb - (m + n)x] = 0,$$

ce qui donne les trois valeurs

$$x = \frac{mb}{m+n}, \quad x = b, \quad x = 0.$$

A la première correspond un maximum, car la dérivée passe évidemment du positif au négatif quand x dépasse la valeur $\frac{mb}{m+n}$.

Si m est pair, à la valeur o correspondra une valeur minimum de la fonction, mais dans ce cas seulement. En effet, pour des valeurs positives ou négatives très-voisines de zéro, les facteurs de la dérivée, $(b-x)^{n-1}$ et $mb-(m+n)x$, sont toujours positifs, tandis que le facteur x^{m-1} passe du négatif au positif, puisque m est pair : la fonction sera un minimum dans ce cas. Mais si m est impair, aucun des facteurs de la dérivée ne changera de signe, et il n'y aura ni maximum ni minimum.

On verra de même qu'à la valeur b il correspondra un minimum si n est pair, mais qu'il n'y aura ni maximum ni minimum si n est impair.

MAXIMUMS ET MINIMUMS DES FONCTIONS IMPLICITES D'UNE SEULE VARIABLE INDÉPENDANTE.

188. Soit

$$y^2 - 2mxy + x^2 = a$$

une équation qui détermine y en fonction de x. On peut trouver les maximums et les minimums de y sans la résoudre. En effet, la différentiation de cette équation donne

$$(y - mx)\frac{dy}{dx} - my + x = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx}.$$

Comme les valeurs de x qui répondent à des maximums ou à des minimums de y doivent satisfaire à la condition

$$\frac{dy}{dx}=0,$$

on aura ces valeurs en résolvant les deux équations

$$y^2-2mxy+x^2=a, \quad x-my=0.$$

189. Supposons, pour plus de généralité, que l'on ait trois équations entre quatre inconnues :

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x,\ y,\ z,\ u)=0, \\ \varphi(x,\ y,\ z,\ u)=0, \\ \psi(x,\ y,\ z,\ u)=0. \end{cases}$$

L'une quelconque des variables, x par exemple, étant prise pour variable indépendante, les trois autres seront des fonctions de celle-ci. Considérons en particulier la fonction u. Pour trouver les valeurs de x, ainsi que les valeurs correspondantes de y et de z, qui donnent des maximums ou des minimums de u, on observe que, dans le cas ordinaire du maximum ou du minimum, on a

$$\frac{du}{dx}=0.$$

D'après cela, la différentiation immédiate des équations (1) donne, en y regardant y, z et u comme des fonctions de x et supprimant les termes où entre $\frac{du}{dx}$,

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{df}{dx}+\dfrac{df}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{df}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}=0, \\ \dfrac{d\varphi}{dx}+\dfrac{d\varphi}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{d\varphi}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}=0, \\ \dfrac{d\psi}{dx}+\dfrac{d\psi}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{d\psi}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}=0. \end{cases}$$

On élimine $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ et l'on obtient une équation,

$$(3)\qquad F(x, y, z, u) = 0,$$

qui, jointe aux équations (1), détermine les valeurs de x, y, z et u.

En différentiant de nouveau les équations (1), on obtiendra $\frac{d^2u}{dx^2}$. On y substituera les valeurs trouvées pour x, y, z, u, et, selon que le résultat sera positif ou négatif, u sera un minimum ou un maximum.

L'élimination de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{dz}{dx}$ entre les équations (2) peut se faire en ajoutant ces équations mulipliées respectivement par 1, λ et μ, et choisissant les indéterminées λ et μ de manière que dans le résultat les coefficients de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{dz}{dx}$ soient nuls. On remplace ainsi les équations (2) par celles-ci :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{df}{dx} + \lambda\frac{d\varphi}{dx} + \mu\frac{d\psi}{dx} = 0,\\ &\frac{df}{dy} + \lambda\frac{d\varphi}{dy} + \mu\frac{d\psi}{dy} = 0,\\ &\frac{df}{dz} + \lambda\frac{d\varphi}{dz} + \mu\frac{d\psi}{dz} = 0.\end{aligned}\right.$$

L'élimination de λ et de μ conduit quelquefois plus rapidement à l'équation (3) que celle de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{dz}{dx}$ entre les équations (2).

190. Soient à déterminer les maximums ou les minimums d'une fonction explicite $F(x, y, z, u)$, x, y, z et u étant des variables liées entre elles par les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &f(x, y, z, u) = 0,\\ &\varphi(x, y, z, u) = 0,\\ &\psi(x, y, z, u) = 0.\end{aligned}\right.$$

L'une des variables, x par exemple, étant regardée comme indépendante, y, z, u, (F, x, y, z, u) seront des fonctions de x.

Si l'on joint aux équations (1) la suivante,

$$F(x, y, z, u) - v = 0,$$

on voit que la nouvelle question est un cas particulier de la précédente, savoir celui dans lequel la fonction implicite v, dont on cherche les maximums et les minimums, n'entre que dans une seule des équations (1).

EXERCICES.

1. *Quel est le plus grand quadrilatère que l'on puisse former avec quatre côtés donnés?*

Solution. — Le quadrilatère inscriptible.

2. *Trouver sur une circonférence donnée un point tel, que la somme de ses distances à deux points donnés soit un maximum ou un minimum.*

Solution. — Le point de contact de la circonférence et d'une ellipse, tangente au cercle, ayant pour foyers les deux points donnés.

3. *Inscrire dans une sphère donnée un cône dont la surface totale soit un maximum.*

Solution. — En désignant par x la hauteur du cône et par r le rayon de la sphère, on a

$$x = \frac{23 - \sqrt{17}}{16} r.$$

4. *Circonscrire à une sphère donnée un cône dont le volume soit un minimum.*

Solution. — Mêmes notations.

$$x = 4r, \quad \text{vol. max.} = \frac{8}{3}\pi r^3.$$

5. *Parmi toutes les paraboles que peuvent décrire des corps pesants partant d'un point donné avec une vitesse donnée, trouver celle qui a l'aire la plus grande.*

Solution. — Parabole décrite par un corps lancé dans une direction inclinée de 60 degrés à l'horizon.

6. *Parmi toutes les cordes d'une même longueur inscrites dans une courbe donnée, déterminer celle qui retranche le plus grand ou le plus petit segment.*

Solution. — La corde doit faire des angles égaux avec les tangentes menées à la courbe par ses extrémités.

7. *Deux roues circulaires extérieures l'une à l'autre sur un même plan tournent uniformément autour de leurs centres fixes, l'une faisant deux tours, l'autre trois tours par seconde. Déterminer les époques et les positions des deux roues pour lesquelles deux points marqués sur leurs circonférences seront à la plus petite ou à la plus grande distance l'un de l'autre.*

ANEXO 7

MANUAIS ESCOLARES DO 2º PERÍODO

A INTRODUÇÃO NOS MANUAIS ESCOLARES DOS PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO (1954)

ENSINO LICEAL TERCEIRO CICLO

COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA

J. SEBASTIÃO E SILVA
PROFESSOR UNIVERSITÁRIO

J. D. DA SILVA PAULO
PROFESSOR LICEAL

repetido

DEPOSITÁRIA
LIVRARIA RODRIGUES
LISBOA — 1958

23. **Aplicações concretas.** — A teoria precedente aplica-se a variadíssimas questões concretas de geometria, de física, etc., muitas das quais apresentam grande interesse prático. Damos a seguir dois exemplos de tais aplicações.

I. *Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 cm, determinar os que tenham área máxima* (EXAME DE 1956).

Representando por x e y as medidas dos catetos de um tal triângulo, a sua área, S, será: $S = xy/2$. Mas tem-se $x^2 + y^2 = 36$, donde $y = \sqrt{36 - x^2}$. Podemos pois exprimir S como função só de x:

$$S = \frac{1}{2}\, x\sqrt{36 - x^2}$$

Ora a derivada de S em relação a x é:

$$S' = \frac{1}{2}\sqrt{36 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{36 - x^2}} = \frac{18 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$$

Como o denominador da última fracção é sempre positivo, o sinal de S' será o de $18 - x^2$. Tem-se pois $S' > 0$, $S' < 0$ ou $S' = 0$, conforme for

$$18 - x^2 > 0 \quad , \quad 18 - x^2 < 0 \quad \text{ou} \quad 18 - x^2 = 0 ,$$

isto é, conforme $x < \sqrt{18}$, $x > \sqrt{18}$ ou $x = \sqrt{18}$. Logo, a função S de x (com $x > 0$) será crescente para $x \leqq \sqrt{18}$ e decrescente para $x \geqq \sqrt{18}$; é portanto máxima para

$$x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \quad \text{sendo então} \quad y = \sqrt{36 - x^2} = 3\sqrt{2}$$

Em conclusão: os triângulos de área máxima, entre aqueles considerados, são os isósceles. (Este resultado podia ser previsto mesmo *a priori*, o que já não sucede com o exemplo seguinte).

II. *Pretende-se construir uma caldeira cilíndrica, fechada, com um dado volume V, de modo que a sua área total seja mínima. Determinar o raio da base,* r, *e a altura,* h, *da caldeira em tais condições.*

A área e o volume da caldeira são, respectivamente:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h , \qquad V = \pi r^2 h .$$

Da segunda fórmula deduz-se $h = V/(\pi r^2)$, o que permite exprimir S como função *só* de r:

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

A derivada de S em *relação a* r será pois

$$S'_r = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$$

e o seu sinal é portanto o de $4\pi r^3 - 2V$. Como

$$4\pi r^3 - 2V \equiv 4\pi\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right),$$

será $S'_r > 0$, $S'_r < 0$ ou $S'_r = 0$, conforme for

$$r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} , \qquad r < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad \text{ou} \qquad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} ;$$

logo a função S de r é decrescente à esquerda e crescente à direita do ponto $r = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$, sendo portanto *mínima* neste ponto. E como então se tem

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r ,$$

conclui-se que *a área total da caldeira é mínima quando a altura é igual ao diâmetro da base.*

eixo dos y. *Represente gràficamente as funções dos exercícios* 39, 42 *e* 43, *respectivamente em* $[-4,7]$, $[-8,8]$ *e* $[0,6]$, *dando a* x *valores fraccionários nas proximidades dos pontos em que a função se torna infinita e pondo* $a=6$ *no exercício* 43.

44. a) Exprimir a área, A, dum rectângulo, como função de um dos lados, x, supondo o perímetro igual a 20. Desenhar o gráfico da função no intervalo $[0,10]$. Determinar, gràficamente e analìticamente, o valor de x que torna a área máxima.

b) A soma de dois números, x e y, é uma constante a. Quando é máximo o seu produto $(P=xy)$? (cf. Exerc. 37).

45. O produto de dois números positivos, x e y, é uma constante k. Quando é mínima a sua soma $(S=x+y)$? (cf. Exerc. 42).

46. Um rectângulo está inscrito num semicírculo de raio fixo, r. Exprimir a área, A, do rectângulo, como função da base, x. Determinar o valor de x para o qual a área é máxima.

47. Uma caixa rectangular, sem tampa, de capacidade v, fixa, tem base quadrada. Exprimir a área total da caixa como função do lado, x, da base. Achar o valor de x para o qual a área é mínima.

48*. Estudar os gráficos das seguintes funções de x, atendendo ao sentido da variação e ao sentido da concavidade (ver n.º 24):

a) $\frac{1}{2}x^3-2x$ (ver fig. 12 da pág. 121); b) $x^2(3-x)$; c) $\frac{18}{x^2-9}$;

d) $\frac{18x}{x^2-9}$; e) $\frac{1}{x^2+1}$; f) $\frac{1}{x^2+a^2}$.

RESPOSTAS

1. a) $-2/5$; b) 1; c) 0; d) ∞. 2. b) 2,5; 1,5; 0,5; $-0,5$; $-1,5$; $-2,5$; c) 2,75; 2,25; 1,75; ...; d) $-1-\frac{h}{4}$; $-1,025$; $-1,0025$; $-0,975$; $-0,9975$; e) -1. 3. a) 8; b) $-1/9$; c) 1/6; d) $1/(2\sqrt{\pi})$. 4. a) $4x$; b) $-1/x^2$; c) $1/(2\sqrt{x})$. 5. $3-10x^4$. 6. $x^2(5x^2-3)$. 7. $(x-1)^2(2x+1)^3+2x(x-1)(2x+1)^3+6x(x-1)^2(2x+1)$.

8. $\frac{2x-6}{x^3}$. 9. $\frac{x^3-1}{3x^2}$. 10. $-5\sqrt{2}\,x$. 11. $\frac{6x}{(1-x^2)^2}$.

12. $-\frac{15}{x^4}$. 13. $-\frac{6}{(3x-5)^3}$. 14. $-\frac{na}{(ax+b)^{n+1}}$ 15. $\frac{\sqrt{x}-2}{2x^2}$.

16. $\frac{6x-8\sqrt[3]{x}}{3x^4}$. 17. $\frac{2}{\sqrt{4x-3}}$. 18. $\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

19. $\frac{9x^2-1}{2\sqrt[4]{(6x^3-2x+3)^3}}$ 20. $\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+a)^2}}$. 21. $\frac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{(x^n+a)^{n-1}}}$.

22. $\frac{17}{(2x+5)^2}$. 23. $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

24. $\frac{(ab'-a'b)x^2+2(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)}{(a'x^2+b'x+c')^2}$.

25. $\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x-\sqrt{x^3-1}\right)^2}}\left(1-\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}\right)$. 26. $\frac{x-10}{2\sqrt{(x-5)^3}}$.

27. $\frac{x+2a}{2\sqrt{(x+a)^3}}$. 28. $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. 29. $\frac{k}{\sqrt{(k-x^2)^3}}$.

30. a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$; b) -3; c) $-1/2$. 31. Decrescente para $x\leqq 1$, crescente para $x\geqq 1$, mínima para $x=1$ com o valor -6. 32. Máx. para $x=-1/3$ (daqui se inferem os intervalos onde é crescente e onde é decrescente; o cálculo do valor máximo da função não oferece dificuldade). 33. Máx. para $x=-3$, mín. para $x=3$ (observações análogas às precedentes). 34. Máx. para $x=0$, mín. para $x=4$. 35. Sempre crescente. 36. Máx. para $x=3$. 37. Máx. para $x=a/2$. 38. Mín. para $x=-p/2$. 39. Decrescente para $x<3$ e para $x>3$; infinita para $x=3$ (nem máx. nem mín.). 40. Crescente ou decrescente, para $x<-c/d$ e para $x>-c/d$, conforme $ad-bc>0$ ou <0; constante se $ad-bc=0$. 41. Crescente para $x<0$, dec. para $x>0$, infinita para $x=0$. 42. Máx. para $x=-1$, mín. para $x=1$, infinita para $x=0$. 43. Máx. para $2a/3$. 44. a) $A=x(10-x)$, $x=5$ (quadrado); b) quando $x=y$. 45. Quando $x=y$. 46. $A=\frac{x}{2}\sqrt{4r^2-x^2}$; $x=r\sqrt{2}$. 47. $A=x^2+\frac{4v}{x}$, $x=\sqrt[3]{2v}$ (altura igual a metade do lado da base). 48. a) Máx. para $x=-2\sqrt{3}/3$, mín. para $x=2\sqrt{3}/3$; côn-

Aprovado oficialmente como livro único
(Diário do Governo, II Série, de 22 - 1 - 1958)

Preço 30$00

J. S. E SILVA
E
J. D. S. PAULO

COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA

25

3.º CICLO

ENSINO LICEAL

TERCEIRO CICLO

COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA

J. SEBASTIÃO E SILVA
PROFESSOR UNIVERSITÁRIO

J. D. DA SILVA PAULO
PROFESSOR LICEAL

DEPOSITÁRIA
LIVRARIA RODRIGUES
LISBOA — 1960

23. **Aplicações concretas.** — A teoria precedente aplica-se a variadíssimas questões concretas de geometria, de física, etc., muitas das quais apresentam grande interesse prático. Damos a seguir dois exemplos de tais aplicações.

SP1 I. *Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 cm, determinar os que tenham área máxima* (EXAME DE 1956).

Representando por x e y as medidas dos catetos de um tal triângulo, a sua área, S, será: $S = xy/2$. Mas tem-se $x^2 + y^2 = 36$, donde $y = \sqrt{36 - x^2}$. Podemos pois exprimir S como função *só* de x:

$$S = \frac{1}{2}\, x \sqrt{36 - x^2}$$

Ora a derivada de S em relação a x é:

$$S' = \frac{1}{2}\sqrt{36 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{36 - x^2}} = \frac{18 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$$

Como o denominador da última fracção é sempre positivo, o sinal de S' será o de $18 - x^2$. Tem-se pois $S' > 0$, $S' < 0$ ou $S' = 0$, conforme for

$$18 - x^2 > 0 \quad , \quad 18 - x^2 < 0 \quad \text{ou} \quad 18 - x^2 = 0\,,$$

isto é, conforme $x < \sqrt{18}$, $x > \sqrt{18}$ ou $x = \sqrt{18}$. Logo, a função S de x (com $x > 0$) será crescente para $x \leqq \sqrt{18}$ e decrescente para $x \geqq \sqrt{18}$; é portanto máxima para

$$x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \quad \text{sendo então} \quad y = \sqrt{36 - x^2} = 3\sqrt{2}$$

Em conclusão: os triângulos de área máxima, entre aqueles considerados, são os isósceles. (Este resultado podia ser previsto mesmo *a priori*, o que já não sucede com o exemplo seguinte).

SP2 II. *Pretende-se construir uma caldeira cilíndrica, fechada, com um dado volume* V, *de modo que a sua área total seja mínima. Determinar o raio da base,* r, *e a altura,* h, *da caldeira em tais condições.*

A área e o volume da caldeira são, respectivamente:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \,.\, h\,, \qquad V = \pi r^2 h\,.$$

Da segunda fórmula deduz-se $h = V/(\pi r^2)$, o que permite exprimir S como função *só* de r:

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

A derivada de S em *relação a* r será pois

$$S'_r = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$$

e o seu sinal é portanto o de $4\pi r^3 - 2V$. Como

$$4\pi r^3 - 2V \equiv 4\pi\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right),$$

será $S'_r > 0$, $S'_r < 0$ ou $S'_r = 0$, conforme for

$$r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\,, \qquad r < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad \text{ou} \qquad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\,;$$

logo a função S de r é decrescente à esquerda e crescente à direita do ponto $r = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$, sendo portanto *mínima* neste ponto. E como então se tem

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2 \,.\, \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r\,,$$

conclui-se que *a área total da caldeira é mínima quando a altura é igual ao diâmetro da base.*

eixo dos y . *Represente gràficamente as funções dos exercícios* 39, 42 *e* 43, *respectivamente em* $[-4, 7]$, $[-8, 8]$ *e* $[0, 6]$, *dando a* x *valores fraccionários nas proximidades dos pontos em que a função se torna infinita e pondo* $a = 6$ *no exercício* 43.

583 44. a) Exprimir a área, A, dum rectângulo, como função de um dos lados, x, supondo o perímetro igual a 20. Desenhar o gráfico da função no intervalo $[0, 10]$. Determinar, gràficamente e analiticamente, o valor de x que torna a área máxima.

584 b) A soma de dois números, x e y, é uma constante a. Quando é máximo o seu produto $(P = xy)$? (cf. Exerc. 37).

585 45. O produto de dois números positivos, x e y, é uma constante k. Quando é mínima a sua soma $(S = x + y)$? (cf. Exerc. 42).

586 46. Um rectângulo está inscrito num semicírculo de raio fixo, r. Exprimir a área, A, do rectângulo, como função da base, x. Determinar o valor de x para o qual a área é máxima.

587 47. Uma caixa rectangular, sem tampa, de capacidade v, fixa, tem base quadrada. Exprimir a área total da caixa como função do lado, x, da base. Achar o valor de x para o qual a área é mínima.

48*. Estudar os gráficos das seguintes funções de x, atendendo ao sentido da variação e ao sentido da concavidade (ver n.º 24):

a) $\frac{1}{2} x^3 - 2x$ (ver fig. 12 da pág. 121); b) $x^2(3 - x)$; c) $\frac{18}{x^2 - 9}$;

d) $\frac{18x}{x^2 - 9}$; e) $\frac{1}{x^2 + 1}$; f) $\frac{1}{x^2 + a^2}$.

RESPOSTAS

1. a) $-2/5$; b) 1; c) 0; d) ∞. 2. b) 2,5; 1,5; 0,5; $-0,5$; $-1,5$; $-2,5$; c) 2,75; 2,25; 1,75; ...; d) $-1 - \frac{h}{4}$; $-1,025$; $-1,0025$; $-0,975$; $-0,9975$; e) -1. 3. a) 8; b) $-1/9$; c) 1/6; d) $1/(2\sqrt{\pi})$. 4. a) $4x$; b) $-1/x^2$; c) $1/(2\sqrt{x})$. 5. $3 - 10x^4$. 6. $x^2(5x^2 - 3)$. 7. $(x-1)^2(2x+1)^3 + 2x(x-1)(2x+1)^3 + 6x(x-1)^2(2x+1)$.

8. $\frac{2x - 6}{x^3}$. 9. $\frac{x^2 - 1}{3x^2}$. 10. $-5\sqrt{2}\,x$. 11. $\frac{6x}{(1 - x^2)^2}$.
12. $-\frac{15}{x^4}$. 13. $-\frac{6}{(3x - 5)^3}$. 14. $-\frac{na}{(ax + b)^{n+1}}$ 15. $\frac{\sqrt{x} - 2}{2x^2}$.
16. $\frac{6x - 8\sqrt[3]{x}}{3x^4}$. 17. $\frac{2}{\sqrt{4x - 3}}$. 18. $\frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$.
19. $\frac{9x^2 - 1}{2\sqrt[4]{(6x^3 - 2x + 3)^3}}$. 20. $\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + a)^2}}$. 21. $\frac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{(x^n + a)^{n-1}}}$.
22. $\frac{17}{(2x + 5)^2}$. 23. $\frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.
24. $\frac{(ab' - a'b)x^2 + 2(ac' - a'c)x + (bc' - b'c)}{(a'x^2 + b'x + c')^2}$.
25. $\frac{1}{3\sqrt[3]{(x - \sqrt{x^3 - 1})^2}}\left(1 - \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}\right)$. 26. $\frac{x - 10}{2\sqrt{(x - 5)^3}}$.
27. $\frac{x + 2a}{2\sqrt{(x + a)^3}}$. 28. $\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$. 29. $\frac{k}{\sqrt{(k - x^2)^3}}$.

30. a) $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$; b) -3; c) $-1/2$. 31. Decrescente para $x \leqq 1$, crescente para $x \geqq 1$, mínima para $x = 1$ com o valor -6. 32. Máx. para $x = -1/3$ (daqui se inferem os intervalos onde é crescente e onde é decrescente; o cálculo do valor máximo da função não oferece dificuldade). 33. Máx. para $x = -3$, mín. para $x = 3$ (observações análogas às precedentes). 34. Máx. para $x = 0$, mín. para $x = 4$. 35. Sempre crescente. 36. Máx. para $x = 3$. 37. Máx. para $x = a/2$. 38. Mín. para $x = -p/2$. 39. Decrescente para $x < 3$ e para $x > 3$; infinita para $x = 3$ (nem máx. nem mín.). 40. Crescente ou decrescente, para $x < -c/d$ e para $x > -c/d$, conforme $ad - bc > 0$ ou < 0; constante se $ad - bc = 0$. 41. Crescente para $x < 0$, dec. para $x > 0$, infinita para $x = 0$. 42. Máx. para $x = -1$, mín. para $x = 1$, infinita para $x = 0$. 43. Máx. para $2a/3$. 44. a) $A = x(10 - x)$, $x = 5$ (quadrado); b) quando $x = y$. 45. Quando $x = y$. 46. $A = \frac{x}{2}\sqrt{4r^2 - x^2}$; $x = r\sqrt{2}$. 47. $A = x^2 + \frac{4v}{x}$, $x = \sqrt[3]{2v}$ (altura igual a metade do lado da base). 48. a) Máx. para $x = -2\sqrt{3}/3$, mín. para $x = 2\sqrt{3}/3$; côn-

COMPENDIO DE ALGEBRA

13

5-29. Determinar (pelas regras de derivação) as derivadas das seguintes funções de x (ver § 3):

5. $1+3x-2x^5$. **6.** $x^3(x^2-1)$. **7.** $x(x-1)^2(2x+1)^3$

8. $\dfrac{3-2x}{x^2}$. **9.** $\dfrac{(1+x)^2}{3x}$. **10.** $\dfrac{1-5x^2}{\sqrt{2}}$. **11.** $\dfrac{3}{1-x^2}$.

12. $\dfrac{5}{x^3}$. **13.** $\dfrac{1}{(3x-5)^2}$. **14.** $\dfrac{1}{(ax+b)^n}$. **15.** $\dfrac{1-\sqrt{x}}{x}$.

16. $\dfrac{\sqrt[3]{x}-x}{x^3}$. **17.** $\sqrt{4x-3}$. **18.** $\sqrt{ax+b}$. **19.** $\sqrt[4]{6x^3-2x+3}$.

20. $\sqrt[3]{a+x^n}$. **21.** $\sqrt[m]{x^n+a}$. **22.** $\dfrac{3x-1}{2x+5}$. **23.** $\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

24. $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$. **25.** $\sqrt[3]{x-\sqrt{x^3-1}}$. **26.** $\dfrac{x}{\sqrt{x-5}}$.

27. $\dfrac{x}{\sqrt{x+a}}$. **28.** $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **29.** $\dfrac{x}{\sqrt{k-x^2}}$.

30. Calcular as derivadas das seguintes funções nos pontos indicados (aplicando as regras de derivação):

a) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $x=\sqrt{2}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+2}}$, $x=1$; c) $\dfrac{x^2-x}{x+2}$, $x=0$.

31-43. Estudar o sentido da variação de cada uma das seguintes funções de x, indicando os máximos e os mínimos relativos se os houver (cf. § 4):

31. $9x^2-18x+3$. **32.** $4-8x-12x^2$. **33.** $x^3-27x-10$.
34. x^3-6x^2+5. **35.** $(x+2)^3$. **36.** $x(6-x)$. **37.** $x(a-x)$.

38. x^2+px+q. **39.** $\dfrac{4-x}{x-3}$. **40.** $\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

41. $\dfrac{1}{x^2}$. **42.** $\dfrac{1}{x}+x$. **43.** $x\sqrt{a-x}$.

Represente gràficamente as funções dos exercícios **31** *a* **35**, *respectivamente nos intervalos* $[-1,3]$, $[-3,2]$, $[-6,6]$, $[-2,6]$ *e* $[-6,2]$, *tomando para unidade* 1 *cm no eixo dos* x *e* 1 *mm no eixo dos* y.

Silva
1963

Represente gràficamente as funções dos exercícios **39**, **42** *e* **43**, *respectivamente em* $[-4,7]$, $[-8,8]$ *e* $[0,6]$, *dando a* x *valores fraccionários nas proximidades dos pontos em que a função se torna infinita e pondo* a = 6 *no exercício* **43**.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO À GEOMETRIA, À FÍSICA E À TÉCNICA, ESPECIALMENTE RECOMENDADOS

44. a) Exprimir a área, A, dum rectângulo, como função de um dos lados, x, supondo o perímetro igual a 20. Desenhar o gráfico da função no intervalo $[0,10]$. Determinar, gràficamente e analiticamente, o valor de x que torna a área máxima.

b) A soma de dois números, x e y, é uma constante a. Quando é máximo o seu produto ($P=xy$)? (cf. Exerc. **37**).

45. O produto de dois números positivos, x e y, é uma constante k. Quando é mínima a sua soma ($S=x+y$)? (cf. Exerc. **42**).

46. Um rectângulo está inscrito num semicírculo de raio fixo, r. Exprimir a área, A, do rectângulo, como função da base, x. Determinar o valor de x para o qual a área é máxima.

47. Uma caixa rectangular, sem tampa, de capacidade v fixa, tem base quadrada. Exprimir a área total da caixa como função do lado, x, da base. Achar o valor de x para o qual a área é mínima.

48. Numa folha rectangular de zinco, com as dimensões de 30 cm por 40 cm, cortam-se, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, dobrando-se em seguida a folha de modo a obter uma caixa aberta na parte superior. Determinar o volume da caixa como função do lado do quadrado que se cortou em cada canto. Qual deve ser a medida do lado do quadrado para que a caixa tenha volume máximo?

49. Pretende-se construir um gasómetro cilíndrico com o volume V. Determinar a relação que deve existir entre o raio da base e a altura para que o custo da chapa metálica empregada na construção da superfície lateral e da base seja mínimo. Supõe-se que se emprega chapa da mesma espessura e da mesma qualidade em toda a superfície.

50. O preço p, em escudos por metro linear, de um certo cabo eléctrico é dado pela fórmula $p=\dfrac{700}{x}+100x$, onde x exprime, em cm^2, a área da secção recta do cabo. Determinar a área da secção para a qual o custo do cabo é mínimo, e o custo do cabo nesse caso.

51. Um corpo é projectado verticalmente de baixo para cima com a velocidade de 24 m/s, num lugar da Terra onde a aceleração da gravidade é de 9,6 m/s². A fórmula que dá a altura, h, em metros, atingida pelo corpo ao fim de t segundos é $h = 24\,t - 4{,}8\,t^2$. Nestas condições, determine a altura máxima que o corpo pode atingir e o tempo gasto nesse percurso.

52. Um circuito eléctrico é constituído por um gerador, de resistência interna r e força electromotriz E, e por uma resistência R. Calcular o valor de R para o qual a potência, P, nela desenvolvida é máxima, sabendo que estas grandezas estão relacionadas entre si pela fórmula:

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{R\,E}^2}{(\mathrm{R} + r)^2} \quad (r \text{ e } \mathrm{E} \text{ constantes; R variável independente}).$$

53. A intensidade da corrente eléctrica lançada numa resistência exterior, R, por um conjunto de n geradores de força electromotriz individual e e resistência interna r, associados em p séries paralelas, cada uma com s elementos, é dada pela fórmula:

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{E}}{p\,\mathrm{R} + s\,r} = \frac{\mathrm{E}}{\dfrac{n\,\mathrm{R}}{s} + s\,r}$$

com $n\,e = \mathrm{E}$ e $n = p\,s$. Notando que n, r e R são constantes e que $p = n/s$, determinar a relação que deve existir entre R, r, s e p para que a intensidade da corrente tenha o máximo valor possível (tomando para variável independente por exemplo s).

54. O momento de flexão, M, de um ponto situado à distância x da extremidade de uma barra, de comprimento l, fixa por uma das suas extremidades, é dado pela fórmula:

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2}\,w\,l\,x - \frac{1}{2}\,w\,x^2,$$

onde w é a carga uniforme por unidade de comprimento. Determinar o ponto da barra que tem momento máximo.

EXERCÍCIOS FACULTATIVOS

55. Estudar os gráficos das seguintes funções de x, atendendo ao sentido da variação e ao sentido da concavidade (ver n.º 24):

a) $\dfrac{1}{2}\,x^3 - 2\,x$ (ver fig. 12 da pág. 134); b) $x^2(3 - x)$; c) $\dfrac{18}{x^2 - 9}$;

d) $\dfrac{18\,x}{x^2 - 9}$; e) $\dfrac{1}{x^2 + 1}$; f) $\dfrac{1}{x^2 + a^2}$.

RESPOSTAS

1. a) $-2/5$; b) 1; c) 0; d) ∞. **2.** b) $2{,}5$; $1{,}5$; $0{,}5$; $-0{,}5$; $-1{,}5$; $-2{,}5$; c) $2{,}75$; $2{,}25$; $1{,}75$; ...; d) $-1 - \dfrac{h}{4}$; $-1{,}025$; $-1{,}0025$; $-0{,}975$; $-0{,}9975$; e) -1. **3.** a) 8; b) $-1/9$; c) $1/6$; d) $1/(2\sqrt{\pi})$.
4. a) $4\,x$; b) $-1/x^3$; c) $1/(2\sqrt{x})$. **5.** $3 - 10\,x^4$. **6.** $x^2(5\,x^2 - 3)$.
7. $(x-1)^2\,(2\,x+1)^3 + 2\,x\,(x-1)\,(2\,x+1)^3 + 6\,x\,(x-1)^2\,(2x+1)$.
8. $\dfrac{2\,x - 6}{x^3}$. **9.** $\dfrac{x^2 - 1}{3\,x^2}$. **10.** $-5\sqrt{2}\,x$. **11.** $\dfrac{6\,x}{(1 - x^2)^2}$.

12. $-\dfrac{15}{x^4}$. **13.** $-\dfrac{6}{(3\,x - 5)^3}$. **14.** $-\dfrac{n\,a}{(a\,x + b)^{n+1}}$ **15.** $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{2\,x^2}$.

16. $\dfrac{6\,x - 8\sqrt[3]{x}}{3\,x^4}$. **17.** $\dfrac{2}{\sqrt{4\,x - 3}}$. **18.** $\dfrac{a}{2\sqrt{a\,x + b}}$.

19. $\dfrac{9\,x^2 - 1}{2\sqrt[4]{(6\,x^3 - 2\,x + 3)^3}}$. **20.** $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + a)^2}}$. **21.** $\dfrac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{(x^n + a)^{n-1}}}$.

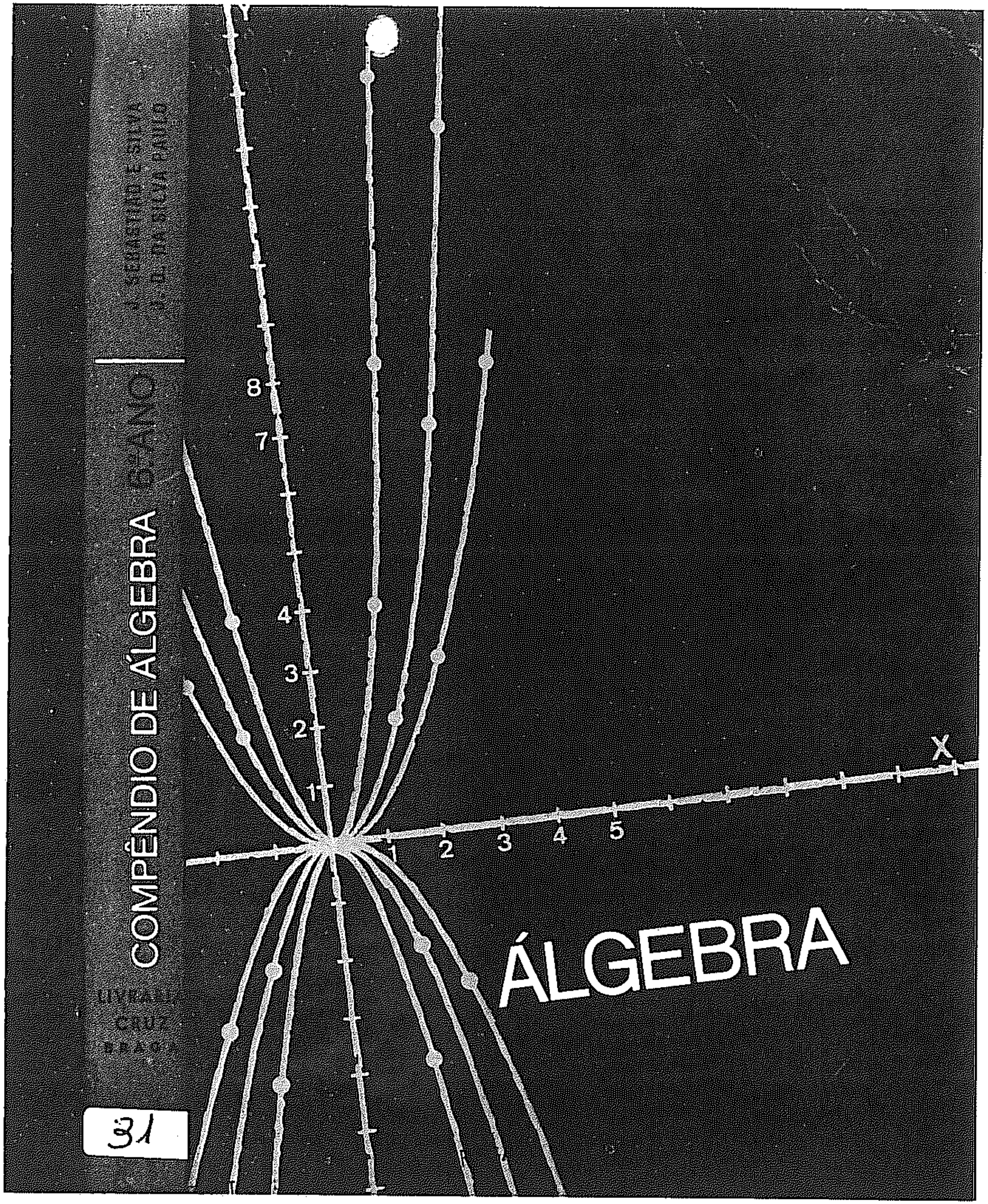
22. $\dfrac{17}{(2\,x + 5)^2}$. **23.** $\dfrac{a\,d - b\,c}{(c\,x + d)^2}$.

24. $\dfrac{(a\,b' - a'\,b)\,x^2 + 2\,(a\,c' - a'\,c)\,x + (b\,c' - b'\,c)}{(a'\,x^2 + b'\,x + c')^2}$

25. $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x - \sqrt{x^3 - 1})^2}}\left(1 - \dfrac{3\,x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}\right)$. **26.** $\dfrac{x - 10}{2\sqrt{(x - 5)^3}}$.

Aprovado oficialmente como livro único
(*Diário do Governo* n.º 110, 2.ª Série, de 8 de Maio de 1968)

Preço: 30$00



5-29. Determinar (pelas regras de derivação) as derivadas das seguintes funções de x (ver § 3):

5. $1 + 3x - 2x^5$. 6. $x^3(x^2 - 1)$. 7. $x(x-1)^2(2x+1)^3$

8. $\dfrac{3 - 2x}{x^2}$. 9. $\dfrac{(1+x)^2}{3x}$. 10. $\dfrac{1 - 5x^2}{\sqrt{2}}$. 11. $\dfrac{3}{1 - x^2}$.

12. $\dfrac{5}{x^3}$. 13. $\dfrac{1}{(3x-5)^2}$. 14. $\dfrac{1}{(ax+b)^n}$. 15. $\dfrac{1 - \sqrt{x}}{x}$.

16. $\dfrac{\sqrt[3]{x} - x}{x^2}$. 17. $\sqrt{4x - 3}$. 18. $\sqrt{ax + b}$. 19. $\sqrt[4]{6x^3 - 2x + 3}$.

20. $\sqrt[3]{a + x^n}$. 21. $\sqrt[3]{x^n + a}$. 22. $\dfrac{3x - 1}{2x + 5}$. 23. $\dfrac{ax + b}{cx + d}$.

24. $\dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$. 25. $\sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - 1}}$. 26. $\dfrac{x}{\sqrt{x - 5}}$

27. $\dfrac{x}{\sqrt{x + a}}$. 28. $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$. 29. $\dfrac{x}{\sqrt{k - x^2}}$.

30. Calcular as derivadas das seguintes funções nos pontos indicados (aplicando as regras de derivação):

a) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $x = \sqrt{2}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2 - 2}}$, $x = 1$; c) $\dfrac{x^2 - x}{x + 2}$, $x = 0$.

31-43. Estudar o sentido da variação de cada uma das seguintes funções de x, indicando os máximos e os mínimos relativos se os houver (cf. § 4):

31. $9x^2 - 18x + 3$. 32. $4 - 8x - 12x^2$. 33. $x^3 - 27x - 10$.
34. $x^3 - 6x^2 + 5$. 35. $(x+2)^3$. 36. $x(6 - x)$. 37. $x(a - x)$.

38. $x^2 + px + q$. 39. $\dfrac{4 - x}{x - 3}$. 40. $\dfrac{ax + b}{cx + d}$.

41. $\dfrac{1}{x^2}$. 42. $\dfrac{1}{x} + x$. 43. $x\sqrt{a - x}$.

Represente gràficamente as funções dos exercícios **31** *a* **35**, *respectivamente nos intervalos* $[-1, 3]$, $[-3, 2]$, $[-6, 6]$, $[-2, 6]$ *e* $[-6, 2]$, *tomando para unidade 1 cm no eixo dos* x *e 1 mm no eixo dos* y.

1968

Represente gràficamente as funções dos exercícios **39, 42** *e* **43**, *respectivamente em* $[-4, 7]$, $[-8, 8]$ *e* $[0, 6]$, *dando a* x *valores fraccionários nas proximidades dos pontos em que a função se torna infinita e pondo* $a = 6$ *no exercício* **43.**

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO À GEOMETRIA, À FÍSICA E À TÉCNICA, ESPECIALMENTE RECOMENDADOS

44. a) Exprimir a área, A, dum rectângulo, como função de um dos lados, x, supondo o perímetro igual a 20. Desenhar o gráfico da função no intervalo $[0, 10]$. Determinar, gràficamente e analìticamente, o valor de x que torna a área máxima.

b) A soma de dois números, x e y, é uma constante a. Quando é máximo o seu produto $(P = xy)$? (cf. Exerc. 37).

45. O produto de dois números positivos, x e y, é uma constante k. Quando é mínima a sua soma $(S = x + y)$? (cf. Exerc. 42).

46. Um rectângulo está inscrito num semicírculo de raio fixo, r. Exprimir a área, A, do rectângulo, como função da base, x. Determinar o valor de x para o qual a área é máxima.

47. Uma caixa rectangular, sem tampa, de capacidade v fixa, tem base quadrada. Exprimir a área total da caixa como função do lado, x, da base. Achar o valor de x para o qual a área é mínima.

48. Numa folha rectangular de zinco, com as dimensões de 30 cm por 40 cm, cortam-se, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, dobrando-se em seguida a folha de modo a obter uma caixa aberta na parte superior. Determinar o volume da caixa como função do lado do quadrado que se cortou em cada canto. Qual deve ser a medida do lado do quadrado para que a caixa tenha volume máximo?

49. Pretende-se construir um gasómetro cilíndrico com o volume V. Determinar a relação que deve existir entre o raio da base e a altura para que o custo da chapa metálica empregada na construção da superfície lateral e da base seja mínimo. Supõe-se que se emprega chapa da mesma espessura e da mesma qualidade em toda a superfície.

50. O preço p, em escudos por metro linear, de um certo cabo eléctrico é dado pela fórmula $p = \dfrac{700}{x} + 100x$, onde x exprime, em cm^2, a área da secção recta do cabo. Determinar a área da secção para a qual o custo do cabo é mínimo, e o custo do cabo nesse caso.

51. Um corpo é projectado verticalmente de baixo para cima com a velocidade de 24 m/s, num lugar da Terra onde a aceleração da gravidade é de 9,6 m/s². A fórmula que dá a altura, h, em metros, atingida pelo corpo ao fim de t segundos é $h = 24\,t - 4{,}8\,t^2$. Nestas condições, determine a altura máxima que o corpo pode atingir e o tempo gasto nesse percurso.

52. Um circuito eléctrico é constituído por um gerador, de resistência interna r e força electromotriz E, e por uma resistência R. Calcular o valor de R para o qual a potência, P, nela desenvolvida é máxima, sabendo que estas grandezas estão relacionadas entre si pela fórmula:

$$P = \frac{R\,E^2}{(R + r)^2} \qquad (r \text{ e } E \text{ constantes; } R \text{ variável independente}).$$

53. A intensidade da corrente eléctrica lançada numa resistência exterior, R, por um conjunto de n geradores de força electromotriz individual e e resistência interna r, associados em p séries paralelas, cada uma com s elementos, é dada pela fórmula:

$$I = \frac{E}{p\,R + s\,r} = \frac{E}{\dfrac{n\,R}{s} + s\,r}$$

com $n\,e = E$ e $n = p\,s$. Notando que n, r e R são constantes e que $p = n/s$, determinar a relação que deve existir entre R, r, s e p para que a intensidade da corrente tenha o máximo valor possível (tomando para variável independente por exemplo s).

54. O momento de flexão, M, de um ponto situado à distância x da extremidade de uma barra, de comprimento l, fixa por uma das suas extremidades, é dado pela fórmula:

$$M = \frac{1}{2}\,w\,l\,x - \frac{1}{2}\,w\,x^2,$$

onde w é a carga uniforme por unidade de comprimento. Determinar o ponto da barra que tem momento máximo.

EXERCÍCIOS FACULTATIVOS

55. Estudar os gráficos das seguintes funções de x, atendendo ao sentido da variação e ao sentido da concavidade (ver n.º 24):

a) $\frac{1}{2}\,x^3 - 2\,x$ (ver fig. 12 da pág. 134); b) $x^2\,(3 - x)$; c) $\frac{18}{x^2 - 9}$;

d) $\frac{18\,x}{x^2 - 9}$; e) $\frac{1}{x^2 + 1}$; f) $\frac{1}{x^2 + a^2}$.

RESPOSTAS

1. a) $-2/5$; b) 1; c) 0; d) ∞. 2. b) 2,5; 1,5; 0,5; $-0{,}5$; $-1{,}5$; $-2{,}5$; c) 2,75; 2,25; 1,75; ...; d) $-1 - \frac{h}{4}$; $-1{,}025$; $-1{,}0025$; $-0{,}975$; $-0{,}9975$; e) -1. 3. a) 8; b) $-1/9$; c) 1/6; d) $1/(2\sqrt{\pi})$. 4. a) $4\,x$; b) $-1/x^2$; c) $1/(2\sqrt{x})$. 5. $3 - 10\,x^4$. 6. $x^2\,(5\,x^2 - 3)$. 7. $(x-1)^2\,(2\,x+1)^3 + 2\,x\,(x-1)\,(2\,x+1)^3 + 6\,x\,(x-1)^2\,(2\,x+1)^2$.

8. $\frac{2\,x - 6}{x^3}$. 9. $\frac{x^2 - 1}{3\,x^2}$. 10. $-5\sqrt{2}\,x$. 11. $\frac{6\,x}{(1 - x^2)^2}$.

12. $-\frac{15}{x^4}$. 13. $-\frac{6}{(3\,x - 5)^3}$. 14. $-\frac{n\,a}{(a\,x + b)^{n+1}}$. 15. $\frac{\sqrt{x} - 2}{2\,x^2}$.

16. $\frac{6\,x - 8\sqrt[3]{x}}{3\,x^4}$. 17. $\frac{2}{\sqrt{4\,x - 3}}$. 18. $\frac{a}{2\sqrt{a\,x + b}}$.

19. $\frac{9\,x^2 - 1}{2\sqrt[4]{(6\,x^3 - 2\,x + 3)^3}}$. 20. $\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + a)^2}}$. 21. $\frac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{(x^n + a)^{n-1}}}$

22. $\frac{17}{(2\,x + 5)^2}$. 23. $\frac{a\,d - b\,c}{(c\,x + d)^2}$.

24. $\frac{(a\,b' - a'b)\,x^2 + 2\,(a\,c' - a'c)\,x + (b\,c' - b'c)}{(a'\,x^2 + b'\,x + c')^2}$

25. $\frac{1}{3\sqrt[3]{(x - \sqrt{x^2 - 1})^2}}\left(1 - \frac{3\,x^2}{2\sqrt{x^2 - 1}}\right)$. 26. $\frac{x - 10}{2\sqrt{(x - 5)^3}}$.

EXERCÍCIOS

DE

...ebra, Trigonometria

e

Aritmética Racional

PARA O 6.º ANO DOS LICEUS

POR

ANTÓNIO DO NASCIMENTO PALMA FERNANDES

PROFESSOR EFECTIVO DO LICEU PEDRO NUNES
ANTIGO ASSISTENTE DA FACULDADE DE CIÊNCIAS
DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

12.ª EDIÇÃO

António Sauertuk
aqui e em toda
a parte.
também na Moita?

1961

DEPOSITÁRIOS

LISBOA
Li... DIDÁCTICA
C... ...cramento, 38 s/1

EM BRAGA
LIVRARIA CRUZ
Rua D. Diogo de Sousa, 133

x	-4	-3	-1	0	2	3
y	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$

PEL **8)** Dentre os rectângulos de perímetro igual a 20 cm, determinar o que tem a área máxima.

Representando por x e y as dimensões do rectângulo teremos

$$2x + 2y = 20$$

e para a área

$$A = xy$$

Resolvendo a primeira equação em ordem a y e substituindo na segunda obtém-se

$$y = 10 - x$$

e

$$A = 10x - x^2$$

Como

$$A' = 10 - 2x$$

Fazendo $10 - 2x = 0$ obtém-se $x = 5$. Para este valor de x é que a função A poderá ter máximo ou mínimo.

Atendendo a que

$$A' = 2(5 - x)$$

é positivo para valores de $x < 5$ e negativo para valores de $x > 5$, conclui-se que a área é máxima quando $x = 5$.

Como para $x = 5$ cm, $y = 5$ cm, podemos afirmar que o rectângulo de perímetro 20 cm que tem a área máxima é o quadrado cujo lado mede 5 cm.

Fernandes 1961

Exercícios

Derivadas

1) Aplicando a definição de derivada duma função num ponto, determinar os valores das derivadas das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x) = x^2 + 1$ no ponto $x = 1$;

b) $f(x) = 3 - x + 2x^2$ no ponto $x = -2$;

c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ no ponto $x = 0$;

d) $f(x) = \frac{x + 1}{x}$ no ponto $x = 3$;

Derivar as seguintes funções.

2) $y = x^4$. **3)** $y = x^2 - 1$. **4)** $y = 2 - x^3$. **5)** $y = 2x^5 + x^2$.

6) $y = 3x - \frac{1}{2}x^2$. **7)** $y = -x^3 + 2x^2 - 3x$. **8)** $y = -x^5 - \frac{4}{5}x^3 + \frac{1}{2}$.

9) $y = x^{1/2} - 3x^{3/4}$. **10)** $y = 4x^{3/4} - 3x^{1/2} + 4x^{1/4} - 5$.

11) $y = (3x - 1)^4$. **12)** $y = (x^2 + 2x)^3$. **13)** $y = \left(\frac{3}{4}x^4 - x\right)^5 + x - 5$.

14) $y = (x + 1)(x - 5)$. **15)** $y = (-x + x^3)(2x^2 - x + 1)$.

16) $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. **17)** $y = (2x + 1)^3(3x - 1)^2(4x - 3)$.

18) $y = \frac{x + 1}{x}$. **19)** $y = \frac{3}{x^2}$. **20)** $y = \frac{x}{x + 1}$. **21)** $y = \frac{x^2 - 1}{2x}$.

22) $y = \frac{x - 2}{x} - \frac{2x + 1}{2x}$. **23)** $y = \frac{1}{2 - 3x} - \frac{1}{2 + 3x}$.

24) $y = \frac{(x + 2)\,2x^3}{x^2 - 1}$. **25)** $y = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}$.

26) $y = \sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}$. **27)** $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{1 - x^2}$.

28) $y = 1 - x - \sqrt{1 - x}$. **29)** $y = (2x^2 - 1)\sqrt{2x^2 - 1}$.

30) $y = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$. **31)** $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. **32)** $y = \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x + 2}}$.

33) $y = \sqrt[4]{x^3 + 1}$. **34)** $y = \sqrt[5]{\frac{x}{x - 1}}$. **35)** $y = \sqrt[3]{5x^3(2x^{1/2} - 1)^2}$.

36) Sendo $y = 3u - 7$ e $u = \frac{x^2}{x - 1}$ calcular $\frac{dy}{dx}$.

37) Sendo $y = \frac{t+1}{t-1}$ e $t = \sqrt{x}$ determinar a derivada de y em ordem a x.

38) Sendo $y = u^2 + 2u$ e $u = \sqrt{t^2+1}$ calcular $\frac{dy}{dt}$.

Estudo da variação das funções

39) Determinar o sentido da variação das seguintes funções nos pontos considerados:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ ponto $x = 2$.

b) $f(x) = 2x^3 - 7x - 3$ no ponto $x = -1$.

c) $f(x) = (x+1)(x-1)^3$ no ponto $x = \frac{1}{2}$.

d) $f(x) = \frac{x}{2+x^2}$ no ponto $x = -3$.

e) $f(x) = \sqrt{1-x^2} + x$ no ponto $x = \frac{1}{2}$.

f) $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}}$ no ponto $x = \frac{3}{2}$.

g) $f(x) = -2x^3$ no ponto $x = 0$.

40) Determinar os declives dos gráficos correspondentes às funções:

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ no ponto $x = -\frac{1}{2}$;

b) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ no ponto $x = 2$.

41) Determinar os máximos e mínimos relativos das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ *b)* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$; *c)* $f(x) = -2x^3 + 6x - 3$; *d)* $f(x) = 3x^3 + x - 3$; *e)* $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$; *f)* $f(x) = \frac{2x}{1-x}$; *g)* $f(x) = 1 - \sqrt{4-2x^2}$; *h)* $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 + 3}$; *i)* $f(x) = \frac{1}{x^3 - 4x^2}$; *j)* $f(x) = \sqrt{x^3 - 12x} + 1$.

42) Estudar a variação das seguintes funções e fazer as respectivas representações geométricas. Dizer quais os domínios, máximos e mínimos relativos, se os houver, e quais as assíntotas.

a) $y = x^2 + x$; *b)* $y = x^3 - x^2 + 1$; *c)* $y = -\frac{4}{3}x^3 + 9x + 2$;

d) $y = \frac{2}{x+2}$; *e)* $y = \frac{1}{x^2-4}$; *f)* $y = \frac{2}{x^2+1}$; *g)* $y = \frac{2}{x^2+2x}$;

h) $y = \frac{3}{x^2-2x+1}$; *i)* $y = \frac{4}{-x^2+x+2}$; *j)* $y = \frac{4}{2x^2-5x+2}$;

k) $y = \frac{3}{3x^2-x^3}$.

43) Estudar a variação das seguintes funções e fazer as respectivas representações geométricas. Dizer quais os domínios e máximos e mínimos relativos, se os houver:

a) $y = -\sqrt{x-2}$; *b)* $y = 1 - \sqrt{x^2+1}$; *c)* $y = \sqrt{x^2-1}$.

Problemas de máximos e mínimos

PF2 **44)** Dois números têm por soma 12; determinar esses números de forma que a soma dos seus quadrados seja mínima.

PF3 **45)** Dois números têm por soma 20; determinar esses números de forma que o seu produto tenha um valor máximo.

PF4 **46)** Dentre os rectângulos de área igual a 64 dm^2 qual é aquele que tem o perímetro mínimo?

PF5 **47)** Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 8 metros, qual é aquele que tem a área máxima?

PF6 **48)** Dentre os sectores circulares de perímetro igual a 8 metros, qual é o raio daquele que tem a área máxima? (Perímetro do arco = R n e área do sector $= \frac{R^2}{2} \cdot n$, n em radianos).

PF7 **49)** Dentre os prismas quadrangulares regulares que têm de volume 8 m^3, qual é aquele que tem a área total mínima?

PF8 **50)** Dada uma esfera de raio igual a 1 metro determinar a medida do raio do cilindro de revolução inscrito de volume máximo.

PF9 **51)** A soma dos perímetros de uma circunferência e de um quadrado é constante. Demonstrar que a soma das áreas do círculo e do quadrado é mínima quando o diâmetro do círculo for igual ao lado do quadrado.

Resposta

1) *a)* 2; *b)* -9; *c)* 0; *d)* $-\frac{1}{9}$. **2)** $y' = 4x^3$. **3)** $y' = 2x$. **4)** $y' = -3x^2$. **5)** $y' = 10x^4 + 2x$. **6)** $y' = 3 - x$. **7)** $y' = -3x^2 + 4x - 3$. **8)** $y' = -5x^4 - \frac{8}{5}x$. **9)** $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{9}{4}x^{-1/4}$. **10)** $y' = 3x^{-1/4} - \frac{3}{2}x^{-1/2} + x^{-5/4}$. **11)** $y' = 12(3x-1)^3$. **12)** $y' = 3(x^2+2x)^2(2x+2)$. **13)** $y' = 5\left(\frac{3}{2}x^4 - x\right)^4(6x^3-1) - 5x - 6$. **14)** $y' = 2x - 4$.

ANEXO 8

MANUAIS ESCOLARES DO 3º PERÍODO

A INTRODUÇÃO DAS MATEMÁTICAS MODERNAS: A REFORMA DE VEIGA SIMÃO (1973)

1973?

Ondina Vasconcelos

Compêndio de MATEMÁTICA

1.º ANO

(ANTIGO 6.º ANO)

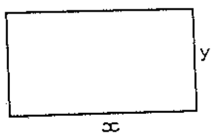
CURSO COMPLEMENTAR

MATEMÁTICA CLÁSSICA

PORTO EDITORA

Vejamos alguns exemplos:

OV1 1.º) A medida da área de um rectângulo é A e o perímetro é 18. (V1) Determinar a medida de cada uma das dimensões do rectângulo de área máxima.



Sejam x e y as medidas dessas dimensões.

Então, tem-se:

$$A = xy$$

e

$$x + y = 9$$

Da segunda equação, deduz-se

$$y = 9 - x$$

o que nos permite exprimir A como função só de x.

$$A = x\ (9 - x)$$

$$A = 9x - x^2$$

A derivada de A em relação a x será:

$$A' = 9 - 2x = 2\left(\frac{9}{2} - x\right)$$

Estudemos o sinal de A':

$$x < \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{9}{2} - x > 0 \Rightarrow A' > 0$$

$$x = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{9}{2} - x = 0 \Rightarrow A' = 0$$

$$x > \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{9}{2} - x < 0 \Rightarrow A' < 0$$

Concluímos que a função A de x é crescente à esquerda e decrescente à direita do ponto $x = \frac{9}{2}$, tendo, portanto, um máximo relativo neste ponto. O valor que a função toma para $x = \frac{9}{2}$ é não só um máximo relativo como também o máximo absoluto da função, isto é, o maior valor que ela toma, em todo o seu domínio.

Ora,

$$x = \frac{9}{2} \Rightarrow y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

Então, o rectângulo de área máxima é o quadrado cujo lado mede $\frac{9}{2}$

2.º) Um corpo é projectado verticalmente de baixo para cima com a velocidade de 24 m/s, num lugar da Terra onde a aceleração da gravidade é de 9,6 m/s². A fórmula que dá a altura, h, em metros atingida pelo corpo ao fim de t segundos, é $h = 24\,t - 4{,}8\,t^2$ Nestas condições, determinar a altura máxima que o corpo pode atingir e o tempo gasto nesse percurso.

Exercício proposto no Compêndio de S. Silva e S. Paulo

A equação $h = 24\,t - 4{,}8\,t^2$ define h como função de t. Derivemos essa função:

$$h' = 24 - 9{,}6\,t$$

Estudemos o sinal de h':

$$h' = 9{,}6\ (2{,}5 - t)$$

$$t < 2{,}5 \Rightarrow 2{,}5 - t > 0 \Rightarrow h' > 0$$

$$t = 2{,}5 \Rightarrow 2{,}5 - t = 0 \Rightarrow h' = 0$$

$$t > 2{,}5 \Rightarrow 2{,}5 - t < 0 \Rightarrow h' < 0$$

Concluímos que a função h de t é crescente à esquerda e decrescente à direita do ponto $t = 2{,}5$, tendo, portanto, um máximo relativo neste ponto. Este máximo relativo é também o máximo absoluto da função.

Ora,

$$t = 2{,}5 \Rightarrow h = 24 \times 2{,}5 - 4{,}8 \times 2{,}5^2 = 60 - 30 = 30$$

Então, o corpo atinge a altura máxima de 30 m ao fim de 2,5 segundos

OV2 3.º) A soma de dois números, x e y, é uma constante a. Quando é máximo (V2) o seu produto?

Seja P o produto dos números:

$$P = xy$$

Esta equação define P como função de x e y.

Sendo $x + y = a$, podemos escrever:

$$y = a - x$$
$$P = x(a - x)$$
$$P = ax - x^2$$

A equação obtida define P como função de x. Derivemos esta função e calculemos os zeros da função derivada:

$$P' = a - 2x$$

$$a - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

O estudo do sinal da função derivada faz-se com mais facilidade se colocarmos o coeficiente de x em evidência.

$$P' = -2\left(-\frac{a}{2} + x\right)$$

Ou ainda:

$$P' = -2\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

Tem-se:

$$x < \frac{a}{2} \Rightarrow x - \frac{a}{2} < 0 \Rightarrow P' > 0$$

$$x > \frac{a}{2} \Rightarrow x - \frac{a}{2} > 0 \Rightarrow P' < 0$$

Concluímos que a função P de x é crescente à esquerda e decrescente à direita do ponto $x = \frac{a}{2}$, tendo, portanto, neste ponto um máximo relativo que é também o máximo absoluto da função.

Ora,

$$x = \frac{a}{2} \Rightarrow y = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

Então, o produto é máximo quando os factores forem iguais

$$x = y = \frac{a}{2}$$

Notar que o primeiro exercício apresentado é um caso particular deste. Na realidade, a medida (A) da área do rectângulo é o produto de dois números x e y e o semiperímetro (9) é a soma destes números

$$P = A$$
$$a = 9$$

0.13 4.º O produto de dois números positivos x e y é um constante a. Quando é mínima a sua soma? (v3)

Seja s a soma dos *números positivos* x e y

$$s = x + y$$

Esta equação define s como função de x e de y. Sendo $xy = a$, podemos escrever:

$$y = \frac{a}{x} \quad (a > 0, \text{ por ser a soma de n.}^{\text{os}} \text{ positivos})$$

$$s = x + \frac{a}{x}$$

Esta função, que define s com função de x, tem por domínio $\mathbb{R}^+$.

Derivando esta função e calculando os zeros da função derivada, tem-se, em $\mathbb{R}^+$:

$$s' = 1 - \frac{a}{x^2} = \frac{x^2 - a}{x^2}$$

$$\frac{x^2 - a}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - a = 0 \Rightarrow x = \sqrt{a}$$

Estudemos o sinal da função derivada:

$$x < \sqrt{a} \Rightarrow x^2 < a \Rightarrow s' < 0$$
$$x > \sqrt{a} \Rightarrow x^2 > a \Rightarrow s' > 0$$

Concluímos que a função s de x é decrescente à esquerda e crescente à direita do ponto $x = \sqrt{a}$, tendo, portanto, neste ponto, um mínimo relativo que é também o mínimo absoluto da função.

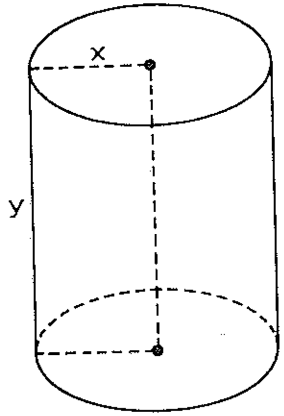
Ora,

$$x = \sqrt{a} \;\Rightarrow\; y = \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

Então, a soma é mínima quando as parcelas forem iguais

$$x = y = \sqrt{a}$$

644 5.º O perímetro de um rectângulo é $2p$. Determine as medidas das suas dimensões, de modo que seja máximo o volume do cilindro por ele (v4) gerado, ao efectuar uma rotação completa em torno de um dos lados.



Representando por x e y as medidas das dimensões do rectângulo, é

$$x + y = p \quad \text{com} \quad p > 0$$

Designando por v a medida do volume do cilindro, será

$$v = \pi x^2 y$$

Sendo $\quad y = p - x, \quad$ vem

$$v = \pi x^2 (p - x)$$

portanto

$$v = \pi p x^2 - \pi x^3$$

Esta equação define v como função de x. Atendendo a que x e y representam medidas de comprimentos, conclui-se que esta função tem por domínio $\mathbb{R}^+$.

Derivemos a função v de x e determinemos os zeros da função derivada:

$$v' = 2\pi p x - 3\pi x^2$$

$$2\pi p x - 3\pi x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \pi x(2p - 3x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \quad \text{ou}$$
$$2p - 3x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{2p}{3}$$

Estudemos o sinal da função derivada:

$$x < \frac{2p}{3} \Rightarrow -3x > -2p \Rightarrow 2p - 3x > 2p - 2p \Rightarrow 2p - 3x > 0$$

$$x > \frac{2p}{3} \Rightarrow -3x < -2p \Rightarrow 2p - 3x < 2p - 2p \Rightarrow 2p - 3x < 0$$

Logo,

$$x < \frac{2p}{3} \Rightarrow v' > 0 \quad ; \quad x > \frac{2p}{3} \Rightarrow v' < 0$$

Concluímos que a função v de x é crescente à esquerda e decrescente à direita do ponto $x = \frac{2p}{3}$, tendo, portanto, neste ponto, um máximo relativo que é também o máximo absoluto da função.

Como

$$x = \frac{2p}{3} \Rightarrow y = p - \frac{2p}{3} = \frac{p}{3}$$

podemos afirmar que as medidas das dimensões do rectângulo a que o problema se refere são $2p/3$ e $p/3$.

Fernando
Borja
Santos

SEBENTA DE MATEMÁTICAS MODERNAS
I VOLUME — 5.º ANO (Antigo 7.º Ano)
(Com 500 Exercícios Resolvidos e Explicados)

1.ª EDIÇÃO
1974

FERNANDO BORJA SANTOS
(Licenciado em Ciências Matemáticas)

SEBENTA DE MATEMÁTICAS MODERNAS

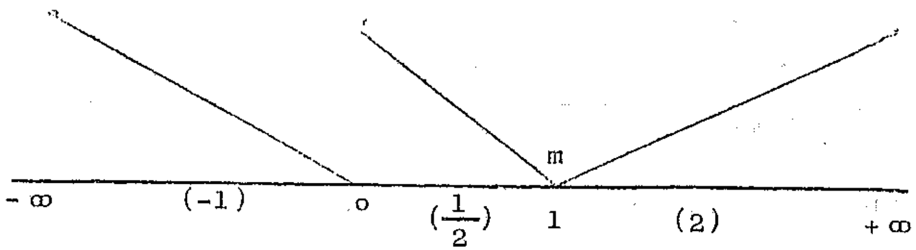
I VOLUME
CURSO COMPLEMENTAR — 5.º ANO
(Antigo 7.º Ano)

Teoria dos Erros
Sucessões
Limites de Funções
Continuidade
Derivadas e Aplicações
Crescimento e Concavidades

(Com 500 Exercícios Resolvidos e Explicados)

1.ª EDIÇÃO
1974

$\Longrightarrow \quad e^x(x-1) = 0 \Longrightarrow \quad x-1 = 0 \Longrightarrow \quad x = 1$



$f'(-1) < 0$, função decrescente de, $(-\infty, 0)$

$f'(\frac{1}{2}) < 0$, função decrescente de, $(0, 1)$

$f'(2) > 0$, função crescente de, $(1, +\infty)$

Para, $x = 1$, a função atinge um mínimo, isto é, $f(1) = e$.

L - PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

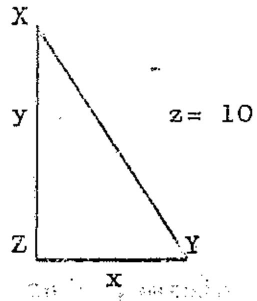
BS1

1) Determinar o triângulo rectângulo da área máxima e cuja hipotenusa seja igual a 10 metros. (BS1)

Resolução:

F. Borja Santos

Consideremos o triângulo rectângulo em Z



Porque se que' determinar o triângulo de área áxima, comecemos por calcular a área do triângulo, e vem: $S = \frac{x \cdot y}{2}$, para seguidamente determinarmos a derivada (S'), e igualarmos a zero.

Temos porém que determinar uma relação entre x e y, de forma a que S venha em função de um só desses valores.

Sabe-se que $x^2 + y^2 = 100$, $y = \sqrt{100-x^2}$ e assim $S = \frac{x\sqrt{100-x^2}}{2}$, logo $S' = \frac{1}{2}\left[\sqrt{100-x^2} + x\frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}\right] =$

$= \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$ igualando $S' = 0$, temos: $100 - 2x^2 = 0 \Rightarrow$

$x^2 = 50$, $x = 5\sqrt{2}$.

Para $x = 5\sqrt{2}$ vem a área máxima e $= 5\sqrt{2}$ ($S = 25$ (conclui-se que o triângulo é isósceles).

BS2

2) Dentre os cilindros de volume igual a 16π, determine os que têm área total mínima. (BS2)

Resolução:

$V = \pi r^2 h$

$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Pretende-se determinar a área mínima, e assim temos que calcular a derivada de S.

Como S está em função de r e h, vamos eliminar h sabendo que $\pi r^2 h = 16\pi$, $h = \frac{16}{r^2}$

$S = 2\pi r^2 + \frac{32\pi}{r}$ $\quad S' = 4\pi r - \frac{32\pi}{r^2} \Rightarrow$

$4\pi r - \frac{32\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 - 32\pi = 0$

$r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$

Sendo, $r = 2$, vem, $h = \frac{16}{r^2} \Rightarrow h = 4$

BS3

3) Dividiu-se 32 em duas partes. Determinar esses números de forma que o seu produto seja máximo. (BS3

Resolução:

Como se pretende que o produto de 2 números seja máximo temos que determinar a derivada da função, P= xy, como P está em função de 2 variáveis, vamos eliminar uma delas, razão porque nos é dito que, x+y= 32.

Logo, $y = 32 - x$, e desta forma vem:

$P = x.y = x(32-x)$

$P' = 32 - x + x.(-1) = 32 - 2x$

$32 - 2x = 0 \Rightarrow x = 16$

Para $x = 16$ a função tem um máximo e vem $y = 16$, e assim $P = 256$.

(BS4) 4) Dentre os rectângulos de perímetro igual a 16, qual o que tem área máxima?

Resolução:

Pretende-se determinar a área máxima, e assim temos que calcular a área do rectângulo e a sua derivada.

A= xy. Como A está em função de x e de y vamos eliminar y sabendo que o perímetro é dado por $2x+2y=16$, logo $y=8-x$, e assim, $A=x(8-x)$

$A'=8-x+x(-1)=8-2x$

$8-2x=0 \Longrightarrow x=4$

Para $x=4$ a área é máxima e vem $y=4$ logo $A=16$ (trata-se de um quadrado).

5) Dentre os rectângulos de área igual a S, qual o que tem perímetro mínimo? (BSS)

Resolução:

Pretende-se determinar o perímetro mínimo, assim vamos calcular o perímetro do rectângulo e a sua derivada.

P= 2x+2y. P está em função de x e de y; temos que eliminar y sabendo que xy= S (valor dado), $y=\frac{S}{x}$, e assim:

$$P=2x+\frac{2S}{x} \Longrightarrow P'=2-\frac{2S}{x^2}$$

$$2-\frac{2S}{x^2}=0 \Longrightarrow 2x^2-2S=0 \Longrightarrow x=\sqrt{S}$$

Para $x=\sqrt{S}$ o perímetro é mínimo e vem $y=\sqrt{S}$, logo $P=4\sqrt{S}$ (trata-se de um quadrado).

(BSS) 6) Determine a altura que deve ter um cone de revolução cuja geratriz mede 9 cm., para que o seu volume seja máximo.

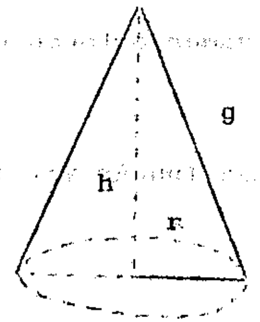
Resolução:

Como se quer determinar o volume máximo comecemos por escrever a expressão que nos dá o volume.

$V=\frac{1}{3}A_b \cdot h$; $A_b=\pi r^2$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Pretendemos determinar a derivada de V, mas como V depende de r e de h temos que eliminar uma destas variáveis.



Pela figura concluímos que $g^2=r^2+h^2$; $r^2=g^2-h^2$

$r^2=81-h^2$

Substituindo este valor em V, temos

$V= \frac{1}{3}\pi(81-h^2).h$, e portanto $V'= \frac{1}{3}\pi(81-3h^2) \Rightarrow$

$81-3h^2= 0 \Rightarrow h^2= 27 \Rightarrow h= 3\sqrt{3}$

M - DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Vimos que considerando uma função, $y= f(x)$ a sua derivada é outra função a que se chamou função derivada e se representou por $y'= f'(x)$.

Derivando por sua vez esta função obtem-se a sua derivada que é ao mesmo tempo a 2ª. derivada da função dada, o que se indica escrevendo:

$$y''= f''(x)= \frac{d^2y}{dx^2}$$

Procedendo de igual forma vamos obtendo derivadas sucessivas.

A derivada de 3ª. ordem duma função virá:

$$y'''= f'''(x)= \frac{d^3y}{dx^3}$$

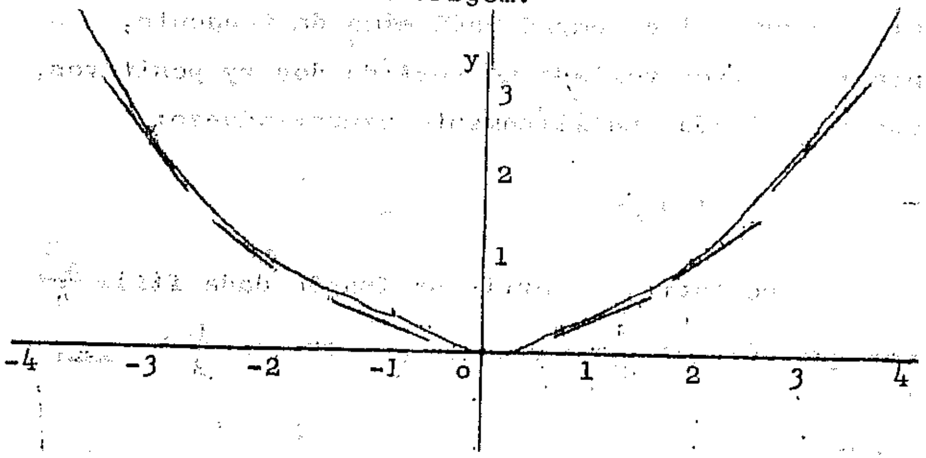
Para a derivada de ordem n teremos:

$$y^{(n)}= f^{n}(x)= \frac{d^ny}{dx^n}$$

Para o estudo que pretendemos fazer tem especial interesse a derivada de 2ª. ordem que nos vai dar o sentido da concavidade de uma função assim como os pontos em que a curva muda a concavidade, chamados pontos de INFLEXÃO.

N - CONCAVIDADE E INFLEXÃO

1) Vamos considerar a função, $f(x)= \frac{x^2}{4}$ e façamos a sua representação gráfica, que é como sabemos uma parábola de vertice na origem.



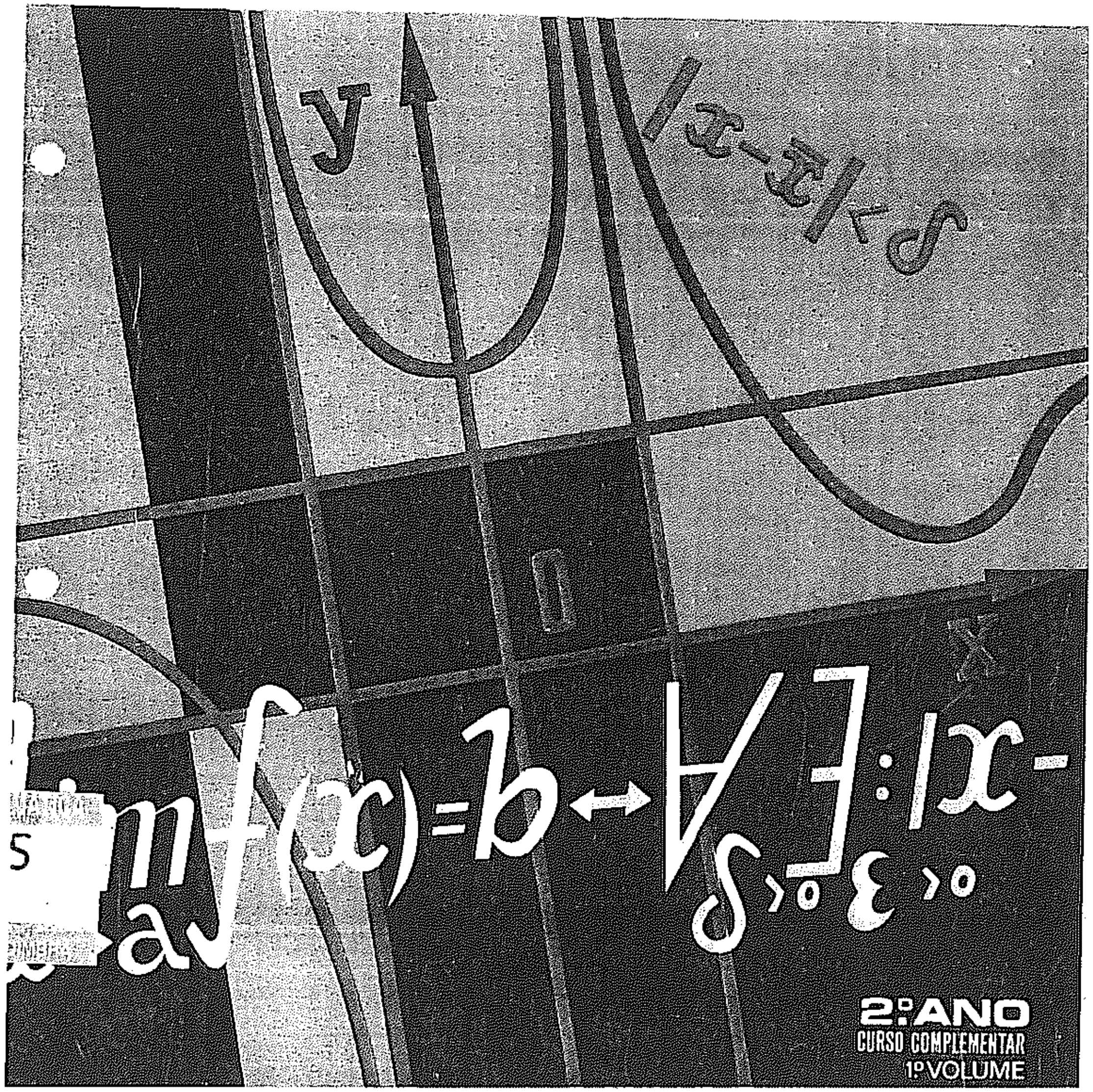
MARIA MADALENA GARCIA

ALFREDO OSÓRIO DOS ANJOS

ANTÓNIO FERNANDO RUIVO

Compêndio de

MATEMÁTICA

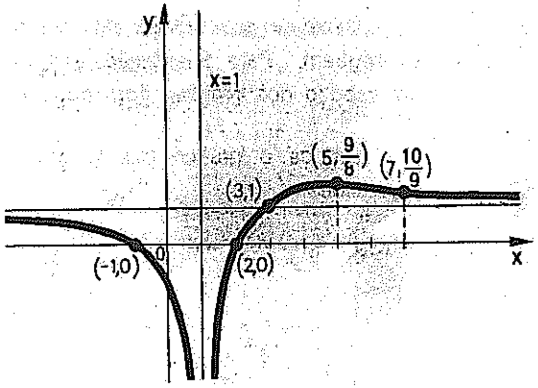


6. $y = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2} =$

$= 1 + \dfrac{x-3}{(x-1)^2}$

$y' = \dfrac{-x+5}{(x-1)^3}$

$y'' = \dfrac{2x-14}{(x-1)^4}$

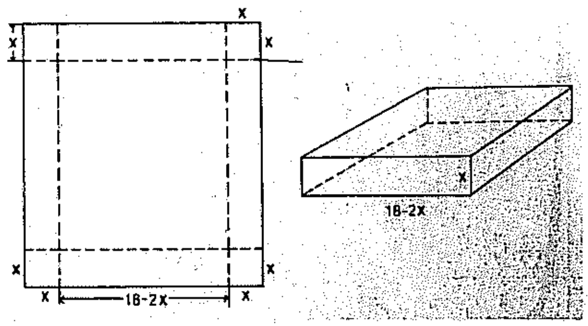


Problemas concretos

São muitas as situações da vida corrente em que se põe o problema de determinar máximos e mínimos de certas funções.

Exemplifiquemos, resolvendo alguns problemas concretos.

GoR 1 1. Numa folha de cartolina quadrada de 18 dm de lado pretendem-se cortar, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, construindo-se seguidamente, por dobragem conveniente, uma caixa aberta na parte superior. Determinar a medida do lado do quadrado a cortar em cada canto para que a caixa tenha volume máximo.



Representando por x a medida (em dm) do lado do quadrado a cortar, a medida do volume da caixa (em dm^3) será dada por

$V = (18-2x)^2 x$ (Deverá ser $0 < x < 9$. Porquê?)

Calculando a derivada, tem-se

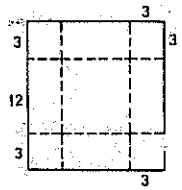
$$V' = -4(18-2x)x + (18-2x)^2$$
$$= (18-2x)(-4x+18-2x)$$
$$= (18-2x)(18-6x)$$

A derivada V' anula-se para $x = 9$ e para $x = 3$

Ora, dado que é $V' < 0$ para $3 < x < 9$ e $V' > 0$ para $x < 3$, a função admite um máximo relativo para $x = 3$.

Tem-se, pois:

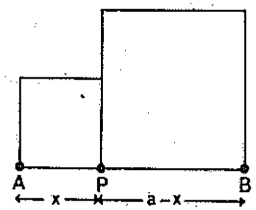
a caixa de volume máximo é obtida, cortando em cada um dos cantos da folha um quadrado de 3 dm de lado.



GoR 2 2. Determinar, num segmento $[AB]$ de comprimento a (fixo), um ponto P de modo a que seja mínima a soma das áreas dos quadrados de lados $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$.

A soma S das áreas dos quadrados de lados $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$ é dada por

$$S = x^2 + (a-x)^2$$



representando por x o comprimento do lado de um dos quadrados.

(Terá de ser $0 \le x \le a$. Porquê?)

Derivando S, tem-se

$$S' = 2x - 2(a-x)$$
$$S' = 4x - 2a$$

A derivada anula-se para $x = \dfrac{a}{2}$.

Estude o sinal da derivada e conclua que S é mínimo para $x = \dfrac{a}{2}$.

3. A altura h, atingida por um corpo lançado verticalmente para cima com a velocidade inicial v_0, é dada em cada instante t, em certas condições, pela fórmula

$h = v_0 t - \dfrac{1}{2} g t^2$ (g – aceleração da gravidade, constante num dado local da terra).

Determinar a altura máxima atingida pelo corpo.

Tem-se sucessivamente

$$h' = v_0 - gt$$

A derivada h' anula-se para $t = \dfrac{v_0}{g}$.

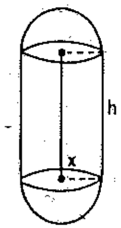
Estude o sinal da derivada à esquerda e à direita de $t = \frac{v_0}{g}$ e conclua que a $t = \frac{v_0}{g}$ corresponde a altura máxima atingida pelo corpo e comprove o valor $h = \frac{v_0^2}{2g}$ para a altura máxima.

Go23 4. Um sólido é constituído por um cilindro de raio da base x e de altura h e por duas semiesferas assentes sobre as bases do cilindro e de raio igual ao raio da base deste.

Supondo a superfície total do sólido igual a $4\pi a^2$ e variáveis x e h, averiguar qual é o sólido de volume máximo.

O volume V do sólido é dado por

$$V = \pi x^2 h + \frac{4}{3}\pi x^3 \quad (1)$$



Sendo $4\pi a^2$ a superfície total tem-se

$$2\pi x h + 4\pi x^2 = 4\pi a^2$$

ou seja

$$h = \frac{2(a^2 - x^2)}{x} \quad (2) \qquad [\text{Deverá ser } 0 < x \leq a. \text{ Porquê ?}]$$

Substituindo em (1) o valor de h dado por (2) obtém-se uma expressão de V em função de x

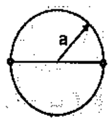
$$V = \frac{2}{3}\pi x (3a^2 - x^2)$$

Derivando tem-se

$$V' = 2\pi(a^2 - x^2)$$

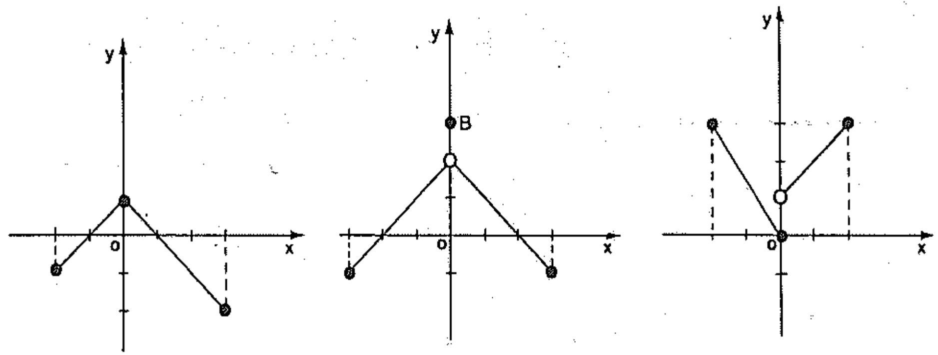
A derivada anula-se para $x = a$. A este valor de x corresponde o volume máximo. Justifique.

Como se vê, o volume máximo corresponde a um caso extremo: uma esfera de raio a.



Exercícios:

I.



1. Por observação, indique a derivada de cada uma das funções representadas, no ponto $x = 0$.
2. Resolva o exercício anterior, determinando para cada função:
   a) a sua expressão analítica e domínio
   b) a derivada da função no ponto, usando a definição.

II. Indique o declive (1) da parábola de equação $y = x^2 + 1$, nos pontos $(0,1)$ e $(3,10)$

III. Determine a partir da definição

a) $f'(3)$ sendo $f(x) = \frac{x+2}{x}$

b) $f'(2)$ sendo $f(x) = x^2 - 5x$

c) $f'(9)$ sendo $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f'(0)$ sendo $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

e) $f'(1)$ sendo $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \Leftarrow x \in [-2,1[\\ 3 & \Leftarrow x = 1 \\ -x + 2 & \Leftarrow x \in]1,3] \end{cases}$

IV. Calcule, usando a definição, as funções derivadas das funções anteriores.

(1) Chama-se declive de uma curva num ponto o declive da tangente à curva nesse ponto.

V. Empregando as regras de derivação, calcule as derivadas das funções definidas pelas expressões:

a) $-4x^3 + 2x^2 + \sqrt{2}$

b) $\left(\dfrac{x-2}{x^2+3}\right)^4$

c) $\sqrt{-\dfrac{1}{2}x^4 + 3x}$

d) $\sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

e) $\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-x+1}}$

f) $x^4(2x-1)^3(3x-6)^2$

g) $x\sqrt{3x^3+2}$

h) $\sqrt{2}\,x^3 + \dfrac{1}{x^3}$

i) $\left(\dfrac{2x-5}{2x+5}\right)^3$

j) $\dfrac{2x - \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}}$

VI. Sendo $y = p\,x^2 + q$ (p e q constantes), verifique que: $x\,y'' - y' = 0$.

VII. Dada a função

$$y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$$

a) Calcule y'_x

b) Sendo $x = (2t-3)^2$ calcule $y'_t = y'_x \cdot x'_t$

VIII. Determine uma equação da tangente a cada uma das curvas que se seguem, nos pontos de abcissa dada.

a) $y = (x+2)(x-2)$ $x = 0$; $x = 2$

b) $y = 2x^2 + 3x - 6$ $x = 0$; $x = 1$

c) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ $x = 0$; $x = -1$

IX. Considere a função

$$x \hookrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

a) Prove que $f(2)$ é um mínimo relativo.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

X. Dada a função real de variável real

$$x \hookrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \Leftarrow\ x<0 \\ 2 & \Leftarrow\ x=0 \\ x+1 & \Leftarrow\ x>0 \end{cases}$$

Averigúe se a função, no ponto $x = 0$

a) tem limite; b) é contínua; c) tem derivada; d) tem um máximo ou um mínimo.

XI. Considere as duas funções

$$y = x^2 + 4x + 1 \qquad y = x^2 + 6x + 5$$

a) Os gráficos destas duas funções têm um ponto comum A. Determine as suas coordenadas.

b) Determine a equação das tangentes às duas curvas no ponto A.
Que pode dizer da posição relativa das duas rectas?

Go24 XII. Averigúe de entre os rectângulos de área igual a 64 dm², qual é aquele que tem o perímetro mínimo.

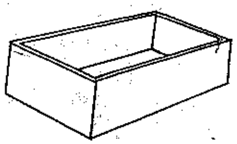
Go25 XIII. Considere os paralelepípedos rectângulos de base quadrada em que a soma das medidas das suas dimensões é 3.
Determine a altura daquele que apresenta o máximo volume.

Go26 XIV. Exprima a área A de um rectângulo como função de um dos lados x, supondo que o perímetro é 20. Desenhe o gráfico da função no intervalo [0,10]. Determine graficamente e analiticamente o valor de x que torna a área máxima.

Go27 XV. Na figura está representada uma caixa aberta em que a base é um rectângulo cujo comprimento é o dobro da largura.

a) Prove que, se a área total da caixa é 54 dm², o volume da caixa é dado em dm³ pela expressão

$$18x - \frac{2x^3}{3}$$

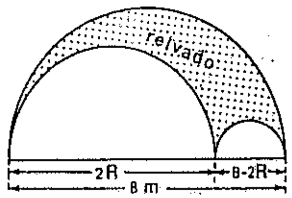


em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.

b) Determine o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo e indique o valor do volume nesse caso.

(Exame de 1971 — 1.ª chamada)

GoR 8 XVI. Num canteiro semicircular, cujo raio tem 4m de comprimento, são reservados, de acordo com a figura, dois canteiros, igualmente semicirculares, destinados ao cultivo de flores, sendo para relvado a parte restante.



a) Mostre que a área do relvado é

$$\pi\,(4\,R - R^2) \text{ metros quadrados}$$

b) Investigue quais as medidas que deverão ter os raios dos canteiros das flores para que seja máxima a área do relvado.

(Exame de 1970-2.ª época)

GoR 9 XVII. Às oito horas um navio B encontrava-se a 65 km a oeste de outro navio A. B navega rumo a leste, à velocidade de 10 km/h enquanto A navega rumo ao norte, com a velocidade de 15 km/h.

a) Mostre que, em cada instante, a distância em km que separa os dois navios é dada pela expressão $\sqrt{(65 - 10t)^2 + 225t^2}$, representando t o número de horas decorridas a partir das oito horas até esse instante.

b) Calcule a hora a que os dois navios se encontrarão à distância mínima.

(Exame de 1970-1.ª chamada)

XVIII. Desenhe as imagens geométricas de cada uma das funções reais de variável real

a) $x \mapsto x^2\,(3 - x)$

b) $x \mapsto (x - 2)^3$

c) $x \mapsto y = \dfrac{2x - 1}{x - 5}$

d) $x \mapsto y = x^4 - 6x^2 + 5$

e) $x \mapsto y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

f) $x \mapsto y = \dfrac{(x + 1)\,(x - 2)}{(x - 1)^2} = 1 + \dfrac{x - 3}{x^2 - 2x + 1}$

g) $y = \dfrac{2x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2} = 2 + \dfrac{2x - 3}{(x - 1)^2}$

h) $y = \dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{1}{2x}$

Soluções:

I. 1. *a)* $f'(0^-) = 1 \wedge f'(0^+) = -1$ *b)* $f'(0^-) = +\infty \wedge f'(0^+) = -\infty$;

c) $f'(0^-) = -\dfrac{3}{2} \wedge f'(0^+) = +\infty$

2. *a)* $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \Leftarrow x \in [-2{,}0\,] \\ -x + 1 & \Leftarrow x \in\,]\,0{,}3\,] \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \Leftarrow x \in [-3{,}0[\\ 3 & \Leftarrow x = 0 \\ -x + 2 & \Leftarrow x \in\,]0{,}3] \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}\,x & \Leftarrow x \in [-2{,}0] \\ x + 1 & \Leftarrow x \in\,]0{,}2] \end{cases}$

II. $m = 0$; $m = 6$. III *a)* $-\dfrac{2}{9}$; *b)* -1; *c)* $\dfrac{1}{6}$ *d)* $\dfrac{3}{4}$;

e) $f'(1^-) = -\infty \wedge f'(1^+) = -\infty$ logo $f'(1) = -\infty$

IV. *a)* $f'(x) = \dfrac{2}{x^2}$; *b)* $f'(x) = 2x - 5$; *c)* $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

d) $f'(x) = \dfrac{3}{(x + 2)^2}$

e) $f'(x) = \begin{cases} 2 & \Leftarrow x \in [-2{,}1[\\ -1 & \Leftarrow x \in\,]1{,}3] \end{cases}$

2.º ANO DO CURSO COMPLEMENTAR

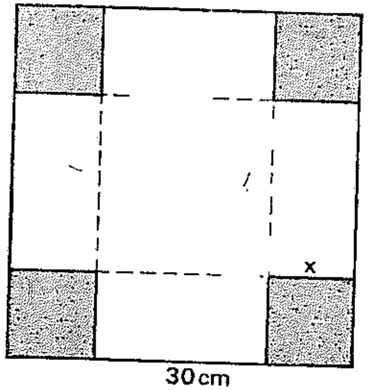
J. A. LOUREIRO DE AMORIM   DIDÁCTICA

EXERCÍCIOS DE MATEMÁTICA

DIDÁCTICA EDITORA

7. Aplicações concretas

LA1 1. Dispõe-se de uma folha de cartão de forma quadrada com 30 cm de lado. Com ela pretende-se fabricar uma caixa, cortando em cada canto um quadrado de lado x. Para que valor de x será máximo o volume da caixa?



A base da caixa terá por superfície $S = (30 - 2x)^2$ e a caixa terá o volume:

$$V = S \cdot x$$
$$= (30 - 2x)^2 x$$
$$= 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

Como se pretende que o volume seja máximo, procuremos o máximo de função:

$$V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$
$$V'(x) = 12x^2 + 240x + 900$$
$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 240x + 900 = 0$$
$$x^2 - 20x + 75 = 0$$
$$x = 10 + \sqrt{100 - 75}$$
$$= 10 \pm 5$$

$V'(x)$ terá nos pontos $x = 5$ ou $x = 15$, máximo ou mínimo.

Recorrendo às propriedades do trinómio, estudemos a variação de $V(x)$

x	0		5		15		30
V'		+	0	−	0	+	
V	0	↗	400 Mx.	↘	0 m	↗	900

Então o volume da caixa será máximo para $x = 5$ cm.

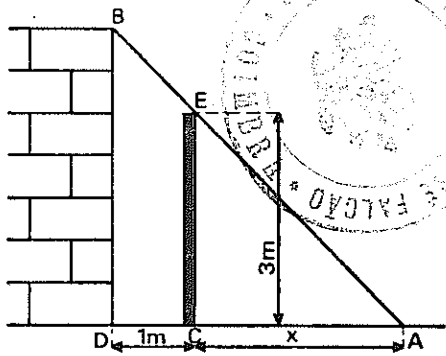
Poderíamos generalizar, supondo a folha de cartão de lado igual a a, donde viria $V = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$.

A resolução não terá qualquer dificuldade.

LA2 2. Paralela... ao muro de uma casa, ergue-se outro muro de 3 m de altura.

A distância da casa à face do muro que está mais afastada é de 1 m.

Qual será o comprimento mínimo das travessas que tocam o solo e a casa, apoiando-se sobre o muro?



Seja l o comprimento da travessa $\overline{AB}$. Este comprimento dependerá da distância $\overline{AC} = x$.

Pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$$
$$l^2 = (x+1)^2 + \overline{BD}^2$$

Mas da semelhança dos triângulos $\left[\overset{\triangle}{ABD}\right]$ e $\left[\overset{\triangle}{AEC}\right]$, tira-se:

$$\frac{\overline{BD}}{3} = \frac{x+1}{x} \quad \therefore \quad \overline{BD} = \frac{3x+3}{x} = 3 + \frac{3}{x}$$

Então: $l^2 = (x+1)^2 + \left[3 + \frac{3}{x}\right]^2 = x^2 + 2x + 10 + \frac{18}{x} + \frac{9}{x^2}$

Consideremos então a função $y(x) = l^2$

$$y' = 2x + 2 - \frac{18}{x^2} - \frac{18}{x^3} = x + 1 - \frac{9}{x^2} - \frac{9}{x^3}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x + 1 - \frac{9}{x^2} - \frac{9}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 9x - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3(x+1) - 9(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^3 - 9) = 0$$

Como $x > 0$, a derivada só se anulará para $x = \sqrt[3]{9}$.

x	0		$\sqrt[3]{9} \simeq 2{,}08$		$+\infty$
y'		−	0	+	
$y = l^2$	$+\infty$	↘	$\simeq 29{,}20$ mín.	↗	$+\infty$

O menor comprimento que pode ter a travessa s... proximadamente
$l = \sqrt{29{,}20} \simeq 5{,}40$ m,

LA3 3. Quais serão os dois menores números que, diferindo de 4, dão um produto mínimo?

Se um dos números for x o outro será $x + 4$.

Então

$$P = x(x+4) = x^2 + 4x$$
$$P(x) = x^2 + 4x$$
$$P'(x) = 2x + 4 \quad \text{que se anula para } x = -2.$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
P′		$-$	0	$+$	
p		↘	-4 m	↗	

O valor mínimo de P é -4 para $x = -2$.

Então os números serão -2 e 2.

LA4 4. Pretende-se fazer uma caçarola de alumínio utilizando uma folha de superfície dada *S*.

Que relação deve existir entre a altura *h* e o raio *R* para que o volume seja máximo? (Supõe-se ausência de tampa e de desperdícios).

A caçarola tem a forma de cilindro, cujo volume será:

$$V = \pi R^2 h$$

Procuremos exprimir *h* em função de R.

Como a superfície total do cilindro (repare-se que só tem uma base) é:

$$S = \pi R^2 + 2\pi R h$$

donde $$h = \frac{S - \pi R^2}{2\pi R}$$

substituindo em V

$$V = \pi R^2 \left[\frac{S - \pi R^2}{2\pi R}\right] = \frac{R}{2}(S - \pi R^2)$$

$$V = f(R) = \frac{RS}{2} - \frac{\pi R^3}{2}$$

$$V' = \frac{S}{2} - \frac{3\pi R^2}{2} = \frac{S - 3\pi R^2}{2}$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} \Leftrightarrow S = 3\pi R^2$$

Mas como $\quad S = \pi R^2 + 2\pi R h$

teremos $\quad 3\pi R^2 = \pi R^2 + 2\pi R h$
$\quad 2\pi R^2 = 2\pi R h$

donde $\quad R = h$

Mas será um máximo para V?

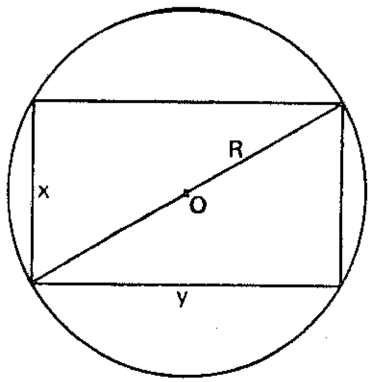
Como $\quad V'' = -\frac{6\pi R}{2} = -3\pi R < 0$

$V'' < 0$

Trata-se efectivamente de um máximo.

LA5 5. Entre todos os rectângulos inscritos num círculo de raio R, qual será o que tem área máxima?

Da figura, tira-se:



$$x^2 + y^2 = 4R^2$$
$$S = xy$$
$$S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$$
$$S' = \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{2x^3}{2\sqrt{4R^2 - x^2}}$$
$$= \frac{4R^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$$
$$= \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$$

Como o domínio de x é o intervalo $]0, 2r[$ e neste intervalo o denominador é positivo

$$S' = 0 \quad \text{se} \quad 2x^2 = 4R^2$$
$$x = R\sqrt{2}$$

Ora $\quad 4R^2 - x^2 = 2(\sqrt{2}\,R - x)(\sqrt{2}\,R + x)$

Produto que será positivo se $x < R\sqrt{2}$

e será negativo se $x > R\sqrt{2}$

e então $\quad x < R\sqrt{2} \Rightarrow S' > 0$

$x > R\sqrt{2} \Rightarrow S' < 0$

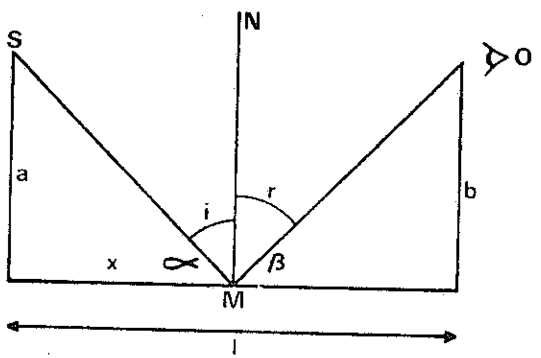
Logo a área do rectângulo será máxima para $x = R\sqrt{2}$.

E como $y = R\sqrt{2}$.

O rectângulo de área máxima será o quadrado inscrito.

LA 6   6. Problema da reflexão da luz.

Dado um espelho plano e uma fonte luminosa S, procurar a posição do ponto M onde um raio partindo de *S* incidirá sobre o espelho e se reflectirá na vista do observador sabendo que a luz se propaga em linha recta seguindo o caminho mais curto. Supõe-se, figura junta, conhecidos *a*, *b*, e *l* e determina-se a posição do ponto M por meio de *x*.



Distância percorrida pela luz $\quad D = \overline{SM} + \overline{MO}$

$$\overline{SM} = \sqrt{a^2 + x^2} \quad \text{e} \quad \overline{MO} = \sqrt{b^2 + (l-x)^2}$$

$$D = f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (l-x)^2}$$

$$D' = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{2(l-x)}{2\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}$$

Se D tiver máximo será em $D' = 0$

$$D' = \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = 0$$

Então
$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} \quad (1)$$

elevando ao quadrado

$$\frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{(l-x)^2}{b^2 + (l-x)^2}$$

e por uma propriedade das proporções

$$\frac{x^2}{x^2 - a^2 - x^2} = \frac{(l-x)^2}{(l-x)^2 - b^2 - (l-x)^2}$$

Donde:
$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{(l-x^2)}{b^2}$$

ou
$$\frac{x}{a} = \frac{l-x}{b}$$

$$bx = al - ax$$
$$ax + bx = al$$
$$x(a+b) = al$$

$$x = \frac{al}{a+b}$$

que será o mínimo do percurso da luz, visto que:

$$D' < 0 \Leftarrow x < \frac{al}{a+b}$$

$$D' > 0 \Leftarrow x > \frac{al}{a+b}$$

Mas a igualdade (1) interpretada trigonometricamente diz-nos que:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \cos\alpha \quad \text{e} \quad \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = \cos\beta$$

Donde $\cos\alpha = \cos\beta$

e como $i = (90 - \alpha)$ e $r = (90 - \beta)$

$$\operatorname{sen} i = \operatorname{sen} r$$

e $$i = r$$

Conclusão: Na reflexão da luz, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

LA7 7. Temos um círculo metálico de raio R e queremos cortar nele um triângulo isósceles com a maior superfície possível

Tomemos para variável o apótema do triângulo x

Do triângulo $\left[\overset{\triangle}{OAD}\right]$ tira-se

$$\overline{AD} = \sqrt{R^2 - x^2}$$

A superfície do triângulo $\left[\overset{\triangle}{ACB}\right]$ será

$$S = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\,.\,\overline{CD} = \frac{1}{2}\,.\,2\sqrt{R^2 - x^2}\,(R + x)$$

$$S = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$S' = \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x(R + x)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$= \frac{R^2 - x^2 - Rx - x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Como o domínio de x é o intervalo $]0, R[$ o denominador é sempre diferente de zero e positivo.

Então bastará anular o numerador.

$$S' = 0 \Leftarrow 2x^2 + Rx - R^2 = 0$$

$$x = \frac{-R \pm \sqrt{9R^2}}{4}$$

cujas raízes são $x = \dfrac{-R + 3R}{4}$ e $x = \dfrac{-R - 3R}{4}$

$$x = \frac{R}{2} \quad \text{e} \quad x = -R$$

Como é óbvio só serve $\dfrac{R}{2}$.

Ora: $x < \dfrac{R}{2} \Rightarrow S' > 0$ e $x > \dfrac{R}{2} \Rightarrow S' > 0$

Apresentando então S um máximo para $x = \dfrac{R}{2}$ e o triângulo de superfície máxima é o de superfície $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ e apótema $\dfrac{R}{2}$.

LA8 8. Decompôr o número 20 em duas partes de modo que a soma dos seus quadrados seja mínima.

Se representarmos por x um dos números o outro será $20 - x$.

Então
$$S = x^2 + (20 - x)^2$$
$$S' = 2x - 40 + 2x$$
$$= 4x - 40$$
$$= 4(x - 10)$$

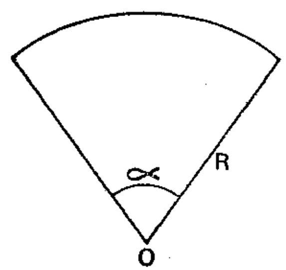
Como $S' = 0 \Leftarrow x = 10$

e $x < 10 \Rightarrow S' < 0$ e $x > 10 \Rightarrow S' > 0$

Conclui-se que a soma é míniam para $x = 10$ e tem o valor de 200.

LA9 9. Um jardineiro quer construir um canteiro com a forma de sector circular para o que dispõe de 100 m de fio de ferro.

Como deve ele proceder para obter um canteiro com a maior superfície possível?



O que lhe interessará saber é qual o raio a utilizar. Representemo-lo por R.

A superfície dum sector circular de raio R é, como se sabe,

$$S = \frac{1}{2} R^2 \alpha \quad , \quad \alpha \text{ em radianos}$$

Como dispõe de 100 m de fio e o comprimento do arco do sector é

$$l = 2R + R\,\alpha$$

Temos $\quad 2R + R\,\alpha = 100$

$$\alpha = \frac{100}{R} - 2$$

Então $\quad S = \frac{1}{2} R^2 \left[\frac{100}{R} - 2\right] = 50R - R^2$

$$S' = 50 - 2R$$

$$R = 25 \Rightarrow S' = 0$$

$$R < 25 \Rightarrow S' > 0$$

$$R > 25 \Rightarrow S' < 0$$

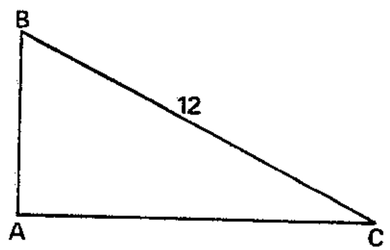
Logo há um máximo para $R = 25$.

O jardineiro não terá mais do que traçar um arco com 25 m de raio e abertura de 2 radianos.

10. Qual é a maior área que pode ter um triângulo rectângulo de hipotenusa 12 m?

Representemos por x o comprimento de um dos catetos.

Do teorema de Pitágoras, obtemos para o comprimento do outro cateto $y = \sqrt{144 - x^2}$



Ora

$$S = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{144 - x^2}$$

função de x cujo domínio é]0, 12[

$$S' = \frac{\sqrt{144 - x^2}}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{144 - x^2}}$$

$$= \frac{72 - x^2}{\sqrt{144 - x^2}}$$

Como $\quad x \in]0, 12[\quad , \quad \sqrt{144 - x^2} > 0$

e então $\quad x = \sqrt{72} \Rightarrow S' = 0 \qquad \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

O sinal de S' será o de $72 - x^2 = (6\sqrt{2} - x)\,(6\sqrt{2} + x)$

$$x < 6\sqrt{2} \Rightarrow S' > 0$$

$$x > 6\sqrt{2} \Rightarrow S' < 0$$

E a área será máxima para $x = 6\sqrt{2}$.

Como $\quad y = 6\sqrt{2}$.

O triângulo de área máxima será isósceles com $S = 36\ m^2$.

11. A potência fornecida por uma pilha de volta é como se sabe da Física

$$p = \frac{E^2 R}{(r + R)^2}$$

sendo: E: f.e.m. constante
r: resistência interna
R: resistêcnia externa.

Provar que a potência é máxima quando a resistência interna fôr igual à resistência externa.

Temos então

$$p = \frac{E^2 R}{(r + R)^2}$$

$$p' = \frac{E^2(r+R)^2 - 2\,(r+R)\,E^2 R}{(r+R)^4} = \frac{(r+R)\,[E^2(r+R) - 2E^2 R]}{(r+R)^4}$$

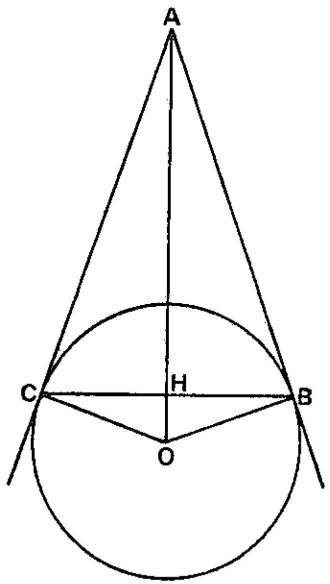
$$= \frac{E^2 r + E^2 R - 2E^2 R}{(r+R)^3} = \frac{E^2 r - E^2 R}{(r+R)^3} = \frac{E^2(r - R)}{(r+R)^3}$$

Como $r + R \neq 0$ e $E \neq 0$

$$R = r \Rightarrow p' = 0$$
$$R < r \Rightarrow p' > 0$$
$$R > r \Rightarrow p' < 0$$

Que nos mostra que p é máxima para $R = r$.

LA 11 12. Dois pontos A e O distam de *a*. Com centro no ponto O descreve-se uma circunferência de raio variável R e do ponto A tiram-se duas tangentes a essa circunferência.



a) Qual é o triângulo isósceles, formado pelas duas tangentes e a corda que une os pontos de contacto, que tem superfície máxima?

b) Qual é o quadrilátero formado pelas duas tangentes e pelos raios que passam pelos pontos de contacto, que tem superfície máxima?

a) Seja: *S* a superfície do triângulo
R o raio da circunferência
a a distância dada $\overline{OA}$

$$S = \overline{AH} \times \overline{BH}$$

Mas do triângulo rectângulo $\left[\overset{\triangle}{OAB}\right]$, tira-se

$$\frac{R}{\overline{OH}} = \frac{a}{R} \Leftrightarrow R^2 = a \, . \, \overline{OH} \Leftrightarrow \overline{OH} = \frac{R^2}{a}$$

$$\overline{AH} = a - \frac{R^2}{a} = \frac{a^2 - R^2}{a}$$

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{BH}} \Leftrightarrow \overline{BH}^2 = \overline{AH} \, . \, \overline{OH} \Leftrightarrow \overline{BH} = \frac{R^2}{a} \, . \, \frac{a^2 - R^2}{a}$$

Donde:

$$S = \frac{a^2 - R^2}{a} \times \frac{R}{a} \sqrt{a^2 - R^2}$$
$$= \frac{R}{a^2} (a^2 - R^2) \sqrt{a^2 - R^2}$$

Mas o máximo de S tem lugar ao mesmo tempo que o máximo de S^2 e

$$S^2 = \frac{R^2}{a^4} (a^2 - R^2)^3$$

Calculemos $$(S^2)' = \frac{2R}{a^4} (a^2 - R^2)^3 - \frac{6R^3}{a^4} (a^2 - R^2)^2$$
$$= \frac{2R}{a^4} (a^2 - R^2)^2 (a^2 - 4R^2)$$

E como $R \neq 0$, $a \neq 0$ e $a > R$

$$(S^2)' = 0 \Leftarrow R = \frac{a}{2} \qquad (a^2 - 4R^2 = 0)$$

$$R < \frac{a}{2} \Rightarrow (S^2)' > 0$$

$$R > \frac{a}{2} \Rightarrow (S^2)' < 0$$

e há máximo para $R = \dfrac{a}{2}$

O triângulo será equilátero e a sua superfície $S = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16}$

b) A área do quadrilátero é

$$S = \overline{OA} \times \overline{BH} = a \frac{R}{a} \sqrt{a^2 - R^2} = R \sqrt{a^2 - R^2}$$

$$S' = \sqrt{a^2 - R^2} - \frac{R^2}{\sqrt{a^2 - R^2}} = \frac{a^2 - 2R^2}{\sqrt{a^2 - R^2}}$$

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S' = 0 \ ; \ R < \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S' > 0 \text{ e } R > \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S' < 0$$

Haverá máximo para $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ e a superfície será $S = \dfrac{a^2}{2}$.

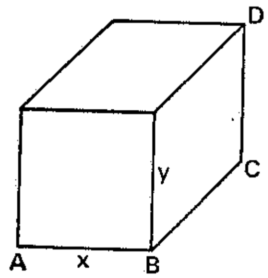
O quadrilátero é um quadrado de que $\overline{OA}$ é a diagonal.

LA 12 13. Construir uma caixa de forma prismática, de base quadrada, sem tampa, de forma que, para uma dada superfície, $S = a^2$ tenha o máximo volume.

$S = a^2$ superfície dada

$AB = BC = x$

$CD = y$



$$a^2 = x^2 + 4xy \Leftrightarrow y = \frac{a^2 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2 y = x^2 \cdot \frac{a^2 - x^2}{4x}$$

$$V(x) = \frac{x(a^2 - x^2)}{4}$$

$$V'(x) = \frac{a^2 - 3x^2}{4}$$

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V' = 0$$

$$x < \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V' > 0$$

$$x > \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V' < 0$$

Logo V tem valor máximo para $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Se $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $\quad y = \dfrac{a^2 - \frac{3a^2}{9}}{\frac{4a\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\frac{9a^2 - 3a^2}{9}}{\frac{4a\sqrt{3}}{3}}$

$$y = \frac{a^2}{2a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

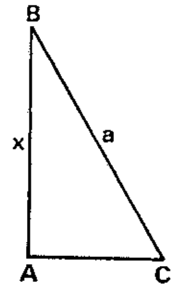
$$V = \frac{3a^2}{9} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$$

LA 13 14. Um triângulo rectângulo de hipotenusa *a* dada, roda em trono do cateto maior. Qual é o máximo volume gerado que se pode obter?

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{AC}^2 \cdot \overline{AB} \qquad AB = x, \quad \overline{AC}^2 = a^2 - x^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot x(a^2 - x^2)$$



$$V' = \frac{1}{3}\pi(a^2 - x^2 - 2x^2)$$

$$= \frac{1}{3}\pi(a^2 - 3x^2)$$

$$x^2 = \frac{a^2}{3} \Leftarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

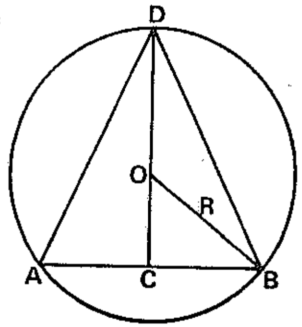
$$x = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V' = 0 \;;\; x < \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V > 0 \text{ e } x > \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V' < 0$$

Logo V será máximo para $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$V = \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{27}$$

LA 14 15. Inscrever numa esfera de raio R um cone cuja superfície lateral seja o maior possível.

Tomemos para incógnita a altura do cone $\overline{DC} = x$



$$S = \pi \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}$$

$$\overline{AC}^2 = 2Rx - x^2 \qquad \overline{AD}^2 = 2Rx$$

$$AC = \sqrt{x(2R - x)} \qquad AD = \sqrt{2Rx}$$

$$S = \pi\sqrt{2Rx^2(2R - x)} = \pi\sqrt{4R^2x^2 - 2R^3}$$

$$S' = \frac{\pi}{2} \frac{8R^2x - 6Rx^2}{\sqrt{2Rx^2(2R - x)}} = \frac{\pi}{2} \frac{x(8R^2 - 6Rx)}{\sqrt{2Rx^2(2R - x)}}$$

Como o denominador é sempre positivo, visto $2R - x$ e $x \neq 0$

$$S' = 0 \Leftarrow 8R^2 - 6Rx = 0$$

$$x = \frac{4R}{3} \Rightarrow S' = 0$$

E como para esse valor S' passa de positivo a negativo, S tem um máximo para $x = \frac{4R}{3}$.

Então $\overline{AC} = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$, $\overline{DC} = \frac{4R}{3}$, $\overline{AC} = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$ e $S = \frac{8\pi R^2\sqrt{3}}{9}$

Exercícios para resolver

1. Achar os pontos de máximo ou de mínimo das seguintes funções:

   a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

   b) $y = 2 + x - x^3$

   c) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

2. Um canhão dispara uma bala, cuja trajectória é a parábola

   $$y = -x^2 + x \quad (x \text{ em km})$$

   Qual é a altura máxima atingida pela bala?

3. Demonstrar que a função $y = x^3$ é contínua para todo o x real.

4. Estudar a variação das seguintes funções e representá-las graficamente:

   a) $y = (x-1)(x-2)(x+3)$

   b) $y = \frac{2x}{x^2+1}$

   c) $y = \frac{x^2-1}{(x-2)^2}$

   d) $y = \frac{2x^2+8x+7}{x^2+4x+3}$

   e) $y = \frac{3(x-1)^2}{2x(x-3)}$

   f) $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

   g) $y = x\left[1 - \frac{2}{1-x^2}\right]$

   h) $y = (x+1)\sqrt{x-1}$

LA 15 5. Dividir um comprimento dado l, em dois segmentos tais que o produto dos seus comprimentos seja máximo.

LA 16 6. De todos os cilindros de revolução que tem a mesma superfície total de 1 dm^2, quais são as dimensões daquele que tem o maior volume?

LA 17 7. Que relação há entre o raio e a altura do cilindro de revolução (aberto na parte superior) que, entre todos os que tem o mesmo volume V, tem a menor superfície?

8. Estudar a variação das seguintes funções e representá-las graficamente:

   a) $y = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

   b) $y = \frac{2x}{1+x^2}$

   c) $y = x^{\frac{2}{3}}$

   d) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

9. Um projéctil é lançado verticalmente de baixo para cima com uma velocidade inicial de 20 $^m/s$. A altura atingida ao fim de t segundos é de $h = 20t - 5t^2$.
   Ao fim de quantos segundos atingiu o projéctil a sua altura máixma? E qual foi essa altura?

LA 18 10. Quais são as dimensões de um rectângulo que tem 196 m^2 de superfície, sabendo que o seu perímetro é mínimo?

LA 19 11. 400 pessoas assistem a um espectáculo cujos lugares custam 30$00. Se o número de assistentes diminuir de 40 pessoas quando o aumento de preço dos lugares for de 10$00, pretende-se saber qual será o aumento de preço que permitirá uma receita mais elevada.

12. Sobre que intervalos são as seguintes funções deriváveis? Calcular essas derivadas.

   a) $f(x) = (2x+3)^2(5-x)^3$

   b) $f(x) = \sqrt{-2x^2+7x+9}$

   c) $f(x) = \frac{x^2-5x+1}{-x^2-4x+12}$

13. Estudar, e desenhar as curvas representativas, as seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$

b) $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x + 2$

c) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 5}{4(x+3)}$

14. Considere-se a função $y = f(x) = \frac{x^2(x-a)}{1-x}$ onde *a* representa um parâmetro real:

a) Estudar completamente a função.

b) Traçar a curva representativa para $a = 10$.

15. Estudar completamente as funções definidas por:

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x-2|}{(x-1)(x-2)} & \Leftarrow \quad x \neq 2 \\ f(2) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{3(x-1)^2}{2x(x-3)}$

c) $f(x) = |x|\sqrt{x^2-1}$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x}}$

16. Considerar as funções $y = f(x) = \frac{x-3}{2x+2}$ e $y = g(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

a) Estudá-las;

b) Traçar no mesmo referencial as suas representações gráficas e determinar as coordenadas dos pontos comuns.

17. Considerar a função f(x) definida por:

$$y = |x-2| + |x+2| - |x| + |x-1|$$

a) Escrever f(x) sob a forma $ax + b$, determinando *a* e *b* segundo os valores de x;

b) Fazer o quadro de variação de f(x) e x e representar graficamente num referencial ortonormal.

18. Estudar a variação e construir a respectiva curva representativa da função $y = |x| + 2|x-1| + |x+1|$.

19. Estudar as variações da função definida por

$$y = (3x-1)(x+1)^2(x-2)^2$$

e representá-la geometricamente.

20. Idem quanto à função $y = x + \frac{4}{x-5}$

21. Estudar a variação das funções a seguir definidas e construir as curvas que as representam:

a) $y = \frac{x^2+1}{x^2-4x-3}$

b) $y = \frac{2x^2-x-3}{x^2+1}$

c) $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2+5x+4}$

LA20 22. Encontrar o caminho mínimo para ir de um ponto A a outro B, tocando uma dada recta *r* (os potnos A e B ficam do mesmo lado da recta).

LA21 23. Num triângulo equilátero cujo lado *a* é dado, inscrever outro triângulo equilátero com a menor superfície possível. Concretizar para $a = 12$ m.

LA22 24. Num círculo de raio R traça-se uma corda perpendicular a um diâmetro e unem-se as extremidades da corda às extremidades do diâmetro. Calcular o máximo da diferença das superfícies dos dois triângulos que tem a corda comum como base.

LA23 25. Num círculo de raio R traçar uma corda de maneira que fazendo-a girar em torno do diâmetro que lhe é paralelo, a superfície engendrada seja máxima.

26. De todos os cilindros que tem a mesma superfície total $2\pi a^2$ qual é o que tem volume mínimo?

Soluções:

1. *a)* $x = -2$ máximo ; $x = 1$ mínimo

   b) $x = \frac{1}{2}$ máximo

   c) não tem.

2. 250 m

5. $\frac{1}{2}$

6. $h = 2R$

7. $h = R$

16. $A\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ $B(-5, 1)$

23. O Triângulo que une os pontos médios do triângulo dado

24. Corda igual ao lado do quadrado inscrito

25. A corda é o lado do quadrado inscrito

26. O que tem por raio $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Primitivas

1. O problema da primitivação pode por-se, de uma maneira simples, assim:

Dada uma função f(x) existirá uma função F(x) de que f(x) seja derivada? Se existir poder-se-à determinar?

Definição: diz-se que uma função F(x) é uma primitiva de f(x) no intervalo I em que as duas funções são definidas se, nesse intervalo a função F(x) é derivável e admite por derivada f(x)

$$Pf(x) = F(x) \Leftrightarrow \{\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)\}$$

Exemplos:

$$P2x = x^2 \quad \text{porque} \quad (x^2)' = 2x$$

$$P\left[-\frac{1}{x^2}\right] = \frac{1}{x} \quad \text{porque} \quad \left[\frac{1}{x}\right]' = -\frac{1}{x^2}$$

2. Propriedades:

1. Toda a função que num intervalo admite uma primitiva, admite uma infinidade que diferem de uma constante.

$$\text{Se } F(x) = Pf(x)$$
$$F(x) + C = Pf(x)$$

ANEXO 9

MANUAIS ESCOLARES DO 3º PERÍODO

A INTRODUÇÃO DAS MATEMÁTICAS MODERNAS: O PERÍODO PÓS REVOLUÇÃO

Ref.
1979?

a. césar de freitas

francelino gomes

MATEMÁTICA

11.º ano de escolaridade

(2.º ano complementar)

TOMO 1

LIVRARIA POPULAR DE FRANCISCO FRANCO

10. Seja, agora, a função $g_1 : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$, $D_g = [$ A função derivada é $g'_1 : x \mapsto 3x^2 - 6x$, $D_{g'_1} = [-1, 3]$.

e, pelo que se viu no exercício anterior, $x = 0$ e $x = 2$ são pontos de extremo relativo, o primeiro correspondendo a um máximo e o segundo a um mínimo relativo.

No extremo -1 do intervalo $[-1, 3]$, tem-se $g'_1(-1) = 9 > 0$ e a função tem um mínimo relativo nesse ponto, $g_1(-1) = -3$;

No extremo 3 do intervalo $[-1, 3]$, tem-se $g'_1(3) = 9 > 0$ e a função tem um máximo relativo nesse ponto.

Na Fig. 42 está esboçada representação gráfica de função g_1.

Os pontos em que a derivada de uma função se anula, dizem-se pontos de estacionaridade. Nestes pontos, a tangente à linha representação gráfica da função é paralela ao eixo $0x$. Pode, então, afirmar-se que nos pontos da representação gráfica correspondentes a extremos de uma função (quando pontos interiores), a tangente é paralela a $0x$; mas a tangente pode ser paralela a $0x$ sem que o ponto correspondente seja ponto extremo (ver exercício 3).

C) Alguns problemas elementares de máximos e de mínimos

São frequentes os problemas, alguns da vida real, que se resolvem por determinação de extremos de uma função. O estudo feito na alínea B) permite, por vezes, resolver com simplicidade tais problemas. É o que vamos exemplificar em seguida nalguns casos elementares.

FG 6 (a) *Determinar o rectângulo de maior área que se pode inscrever numa dada circunferência.*

Seja r a medida do raio da circunferência e x a medida de um dos lados do rectângulo, Fig. 43.

A medida y do lado perpendicular é (pelo teorema de Pitágoras)

$$y = \sqrt{4r^2 - x^2}$$

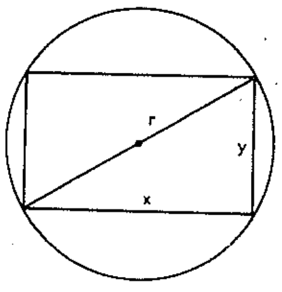


Fig. 43

A área do rectângulo é dada pela expressão

$$A = x\sqrt{4r^2 - x^2} \quad , \quad 0 < x < 2r.$$

Trata-se de uma função real da variável real x, definida num intervalo aberto. Vamos averiguar se ela tem um máximo.

Temos

$$\frac{dA}{dx} = \sqrt{4r^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$

que se anula se $4r^2 - 2x^2 = 0$, ou seja para $x = r\sqrt{2}$
(Note-se que $-r\sqrt{2}$ não pertence ao domínio da função).

Ora como
$$\frac{dA}{dx} < 0 \quad , \quad \text{se} \quad x > r\sqrt{2} \quad \text{e}$$
$$\frac{dA}{dx} > 0 \quad , \quad \text{se} \quad x < r\sqrt{2}$$

o ponto de estacionaridade $x = r\sqrt{2}$ corresponde a um máximo da área. Com este valor de x obtém-se

$$y = \sqrt{4r^2 - (r\sqrt{2})^2} = r\sqrt{2}$$

o que significa que o rectângulo de maior área procurado é o quadrado de lado $r\sqrt{2}$

É de observar que, do ponto de vista dos cálculos a efectuar, seria preferível trabalhar com o quadrado da área, A^2, pois esta função tem o máximo no mesmo ponto que A. Seria então:

$$A^2 = x^2(4r^2 - x^2) = 4r^2x^2 - x^4$$

donde

$$\frac{d(A^2)}{dx} = 8r^2x - 4x^3 = 4x(2r^2 - x^2)$$

que se anula para $x = r\sqrt{2}$ (no intervalo $]0, 2r[$). Por forma análoga se obteria que este valor conduz ao máximo de A^2.

FG 2 (b) *Dois pontos materiais P e Q movem-se sobre duas rectas perpendiculares r_1 e r_2 com movimentos uniformes de velocidades (algébricas) respectivamente v_1 e v_2.*

No instante inicial, isto é, no instante em que se começa a contar o tempo, P encontrava-se na posição P_0 à distância a_1 de r_2 e Q encontrava-se na posição Q_0 à distância a_2 de r_1, como se esquematiza na Fig. 44.

Determinar o instante em que a distância dos pontos é mínima e calcular essa distância.

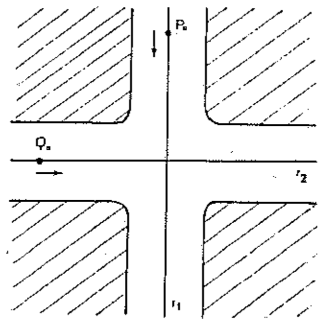


Fig. 44

Considerando um sistema de eixos com origem no ponto de encontro das rectas, Fig. 45, a ordenada do ponto P no instante t será

$$y = a_1 - v_1 t$$

e a abcissa do ponto Q será

$$x = -a_2 + v_2 t$$

A distância dos dois pontos será nesse instante

$$\rho = \sqrt{(a_1 - v_1 t)^2 + (-a_2 + v_2 t)^2}$$

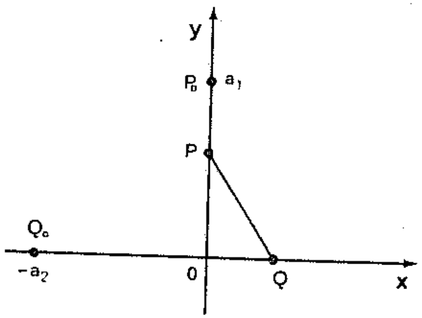


Fig. 45

ou seja

$$\rho = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2) - 2(a_1 v_1 + a_2 v_2)t + (v_1^2 + v_2^2)t^2}$$

Trata-se, então, de averiguar da existência de um mínimo para a função $t \rightarrow \rho(t)$.

Se este mínimo existe, ele corresponderá ao mínimo da função $t \rightarrow \rho^2(t)$ e reciprocamente. Por isso e por simplicidade, vamos trabalhar com esta função que designaremos por $f(t)$. tem-se

$$\frac{df}{dt} = -2(a_1 v_1 + a_2 v_2) + 2(v_1^2 + v_2^2)t$$

derivada esta que se anula para $t = \dfrac{a_1 v_1 + a_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$

Neste caso a própria natureza do problema indica que se trata de um mínimo cujo valor é, como facilmente se pode calcular,

$$\frac{(a_1 v_2 - a_2 v_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}$$

Então, $\rho = \dfrac{|a_1 v_2 - a_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$ é a distância mínima procurada.

FG3 (c) *Pretende-se imprimir um livro por forma que, em cada página, a mancha impressa seja um rectângulo de 216 cm² e com margens superior e inferior de 2 cm e margens laterais de 3 cm — Fig. 46.*

Quais devem ser as dimensões mais económicas para o livro (admitindo que o custo do livro é tanto menor quanto menor for a área de cada página)?

Designando por x e y as dimensões da mancha, será

$$x \cdot y = 216 \quad \text{ou seja} \quad y = \frac{216}{x}$$

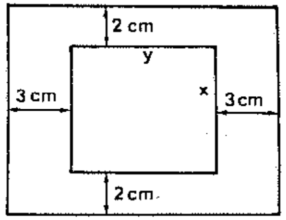


Fig. 46

A área de cada página é então

$$A(x) = (x+4)\left(\frac{216}{x} + 6\right) \quad , \quad x \in \,]0, +\infty[$$

e vamos ver para que valores de x a função assim definida é mínima. Tem-se

$$\frac{dA}{dx} = \frac{216}{x} + 6 + (x+4)\cdot\left(-\frac{216}{x^2}\right) = 6 - \frac{864}{x^2} = \frac{6(x^2 - 144)}{x^2}$$

Esta derivada anula-se para $x = 12$ e, como

$$\frac{dA}{dx} < 0 \quad \text{se} \quad x < 12 \quad \text{e} \quad \frac{dA}{dx} > 0 \quad \text{se} \quad x > 12 \, ,$$

a função $A(x)$ tem um mínimo no ponto $x = 12$.

Então, as dimensões mais económicas para o livro serão as da mancha $x \cdot y = 12 \times 18$

FG4 (d) *Um ciclista vive num local isolado C, que dista 9 km do ponto O mais próximo de uma estrada rectilínea e alcatroada e pretende ir a uma aldeia A que dista 15 km de O, sobre essa estrada.*
Supondo que o ciclista se desloca a 5 km/h na estrda alcatroada e a 4 km/h no acesso a essa estrada, determine em que ponto deve atingir a estrada alcatroada para fazer o percurso total no menor tempo possível.

Se o ciclista atinge a estrada alcatroada no ponto P, à distância x de O, Fig. 47 as distâncias percorrida e a percorrer são:

$\overline{CP} = \sqrt{81 + x^2}$ à velocidade de 4 km/h

$\overline{PA} = 15 - x$ à velocidade de 5 km/h

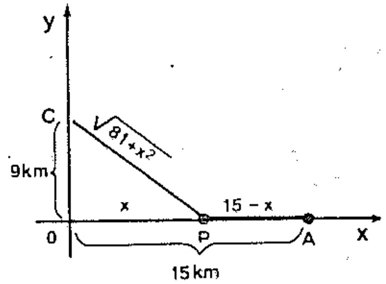


Fig. 47

Então o tempo total gasto no percurso é

$$T(x) = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{4} + \frac{15 - x}{5}$$

E, como $T'(x) = \dfrac{x}{4\sqrt{81 + x^2}} - \dfrac{1}{5}$, a derivada anula-se no ponto $x = 12$

Vejamos, agora, se $T(12)$ é um mínimo de T.

Como $T'(x) < 0$ se $x < 12$ e $T'(x) > 0$ se $x > 12$ concluímos que, $T(12)$ é mínimo de T.

Sendo $\overline{OP} = 12$ km, $\overline{CP} = 15$ km e $\overline{PA} = 15 - 12 = 3$ km

D) Sentido de concavidade da representação gráfica de uma função

Suponhamos que a função f está definida no intervalo $\mathbf{I} =]a, b[$ e que nesse intervalo existem e são contínuas as derivadas f' e f'' — é o que acontece, por exemplo, com qualquer função polinomial.

Nestas condições, em qualquer ponto $(x_0, f(x_0))$ da representação gráfica da função existe a *tangente geométrica* que é a recta que passa pelo ponto e cujo coeficiente angular é $f'(x_0)$.

Diz-se que num subintervalo aberto de **I** a representação gráfica da função volta a concavidade no sentido dos *yy* crescentes (ou para cima) se para cada ponto desse subintervalo existe uma vizinhança onde a tangente está *«abaixo»* da representação gráfica da função. É o que acontece na Fig. 48, no intervalo $]a, c[$.

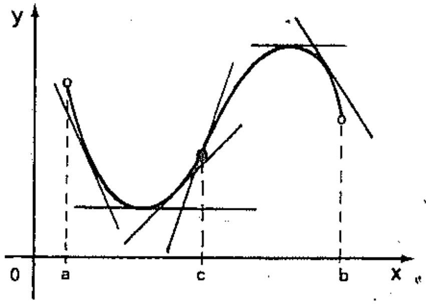


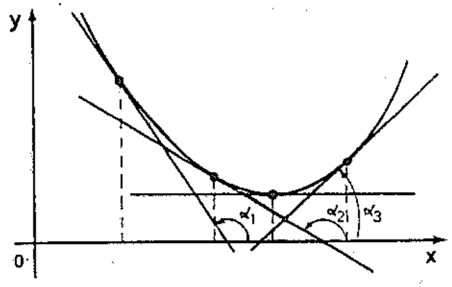
Fig. 48

Diz-se que num subintervalo aberto de **I** a representação gráfica da função volta a concavidade no sentido dos *yy* decrescentes (ou para baixo) se para cada ponto desse subintervalo existe uma vizinhança onde a tangente está *«acima»* da representação gráfica da função. É o que acontece na Fig. 48, no intervalo $]c, b[$.

Para o ponto c não há qualquer vizinhança em que a tangente esteja só *«acima»* ou só *«abaixo»* da representação gráfica, diz-se, então, que se trata de um ponto de inflexão. Num destes pontos a representação gráfica *muda o sentido da concavidade*.

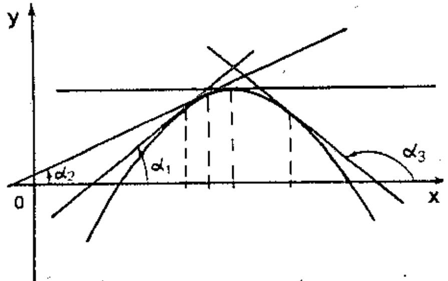
Reconhece-se intuitivamente por via geométrica e pode demonstrar-se que:

— *Em intervalo onde a concavidade está voltada para cima, f' é função crescente*, Fig. 49. *E reciprocamente.*



$\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2 < \operatorname{tg}0 < \operatorname{tg}\alpha_3$

Fig. 49



$\operatorname{tg}\alpha_1 > \operatorname{tg}\alpha_2 > \operatorname{tg}0 > \operatorname{tg}\alpha_3$

Fig. 50

— *Em intervalo onde a concavidade está voltada para baixo, f' é função decrescente, Fig. 50., E reciprocamente.*

Suponhamos que no ponto x_0 se tem $f''(x_0) > 0$.

Então, e porque f'' é função contínua, existe uma vizinhança de x_0 onde $f''(x) > 0$, o que implica que, nessa vizinhança, f' é função crescente e, portanto, a representação gráfica de f volta a concavidade para cima.

De modo análogo se conclui que, se $f''(x_0) < 0$, existe uma vizinhança de x_0 onde a representação gráfica da função f volta a concavidade para baixo.

Se $f''(x_0) = 0$, então, o ponto x_0 é de inflexão se e só se nalguma vizinhança do ponto se tiver

$$f''(x) < 0 \quad \text{se} \quad x < x_0 \qquad \text{e} \qquad f''(x) > 0 \quad \text{se} \quad x > x_0$$

ou

$$f''(x) > 0 \quad \text{se} \quad x < x_0 \qquad \text{e} \qquad f''(x) < 0 \quad \text{se} \quad x > x_0$$

O que se acabou de referir permite utilizar a 2.ª derivada na determinação do sentido da concavidade da representação gráfica de uma função f nas condições referidas.

Exemplos:

11. Seja a função quadrática $x \mapsto y = -3x^2 + 2x + 4$, de domínio $\mathbb{R}$.
Tem-se $y'(x) = -6x + 2$ e $y''(x) = -6$

Como a 2.ª derivada é negativa, qualquer que seja x, pode afirmar-se que a representação gráfica da função volta sempre a concavidade para baixo (este resultado já era conhecido pois a representação gráfica da função é uma parábola).

12. Seja agora a função $x \mapsto y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 1$, de domínio $\mathbb{R}$.
Tem-se $y'(x) = -3x^2 + 6x + 9$ e $y''(x) = -6x + 6$ e vem

4. Determine os valores das derivadas das funções $x \mapsto$ seguir definidas, nos pontos indicados (utilize as regras de derivação)

a) $y = x + \frac{3}{x}$, no ponto $x = \frac{1}{2}$

b) $y = 1 + \sqrt{x^2+3}$, no ponto $x = 1$

c) $y = \frac{m(x^2 - a)}{2}$, no ponto $x = a$

5. Determine equações cartesianas das rectas tangentes às linhas gráficos das funções $x \mapsto y(x)$ a seguir definidas, nos pontos correspondentes aos valores de x indicados:

a) $y = \frac{3}{2}x^2 - 5$, para $x = 1$ e para $x = -1$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$, para $x = 0$ e para $x = \frac{1}{2}$

c) $y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, para $x = 0$

6. Considere as funções $f : x \mapsto (2x)^4$, $g : x \mapsto 3x^2 - 5x^3 + 4$ e $h : x \mapsto ax^2 + bx + c$, com a, b, c constantes e determine:

a) As expressões de $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$.

b) A expressão de $f'(x) + g''(x)$

c) Os valores de $f''(5)$, $g''(0)$, $h''\left(-\frac{b}{2}\right)$

d) Os valores de a, b e c por forma que $h(-1) = 5$, $h'(0) = -4$ e $h''(10) = 6$

* 7. Uma *função* diz-se *de classe* C^k, $k \in \mathbb{N}$, *num certo intervalo*, se tem nesse intervalo derivadas contínuas até à ordem k.
Assim, por exemplo, qualquer função polinomial é de classe C^k, $\forall k$, em $\mathbb{R}$.
Mostre que a função

$$f : x \mapsto \begin{cases} -\frac{x^2}{2}, & \text{se } x < 0 \\ \frac{x^3}{3}, & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

é de classe C^1 no seu domínio, mas não é de classe C^2 nesse conjunto.

8. Sabendo que $D \operatorname{sen} x = \cos x$ e $D \cos x = -\operatorname{sen} x$, mostre que:

a) $D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$;

b) $D \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$;

c) $D (\operatorname{sen} (x^2 + 1)) = 2x \cos (x^2 + 1)$

d) $D (\cos (wx + \alpha)) = -w \operatorname{sen} (wx + \alpha)$, w e α constantes

9. Determine os intervalos de monotonia das seguintes funções, $x \mapsto y(x)$:

a) $y = x^2 - 9$

b) $y = x^2 + 6x$

c) $y = x^3 - 6x^2$

d) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

e) $y = |3 - x|$

f) $y = \begin{cases} 2 - \sqrt{8 - 2x^2}, & \text{se } x \leqslant 2 \\ (x - 3)^2 + 1, & \text{se } x > 2 \end{cases}$

10. Determine os extremos relativos das funções a que se refere o exercício 9

11. Estude para cada uma das funções a que se refere o exercício 9, o sentido da concavidade da respectiva representação gráfica.

12. a) Determine o rectângulo de maior área que se pode inscrever num triângulo isósceles de base 20 cm e altura 40 cm, por forma que dois vértices do rectângulo pertençam à base do triângulo. F65

b) Determine, de entre os rectângulos de área 81 cm² aquele que tem menor perímetro. F66

c) Um lavrador pretende cercar com 1200 m de rede uma zona rectangular com a maior área possível, didivindo-a, ainda, em duas partes, paralelamente a um dos lados. F67
Qual a maior área que o lavrador pode cercar?

d) Pretende-se construir com chapa metálica um reservatório cilíndrico de base circular e capacidade 64 litros. Determine as dimensões do reservatório de forma que a quantidade de chapa a utilizar seja mínima. Considere os casos de o reservatório ter ou não ter tampa. F63

e) De entre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede a, determine a que tem maior área. F69

f) Considere um referencial o.n. no plano e os pontos $A = (o, a)$ e $B = (b, c)$. Determine um ponto P do eixo $0x$ tal que $\overline{AP} + \overline{PB}$ seja mínimo. F610

g) Em n medidas de uma grandeza obtiveram-se os seguintes resultados: $x_1, x_2 \ldots x_n$.
Mostre que a função $x \mapsto S(x)$, tal que
$S(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2$ é mínima para $x = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$

* h) Determine a altura do cone de revolução de volume mínimo que pode ser circunscrito a uma esfera de raio r. F611

1979

ESTE VOLUME CONTÉM AS RESOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

BIBLIOTECA ESCOLAR PRESENÇA 16

Henrique Verol Marques

Exercícios de Matemática 1
para o 11.º ano de escolaridade

Henrique Verol Marques
Licenciado em Ciências Matemáticas e Professor do Ensino Secundário

Exercícios de Matemática 1

para o 11.º ano de escolaridade

Editorial Presença

II. Para os valores de a e b, calculados em I, determine os máximos e mínimos relativos de $f(x)$.

17. Sendo $f(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 2$:

a) Determine os máximos e mínimos relativos de f.

b) Esboce o gráfico de f num referencial ortogonal.

(Exames oficiais)

18. *a)* Sendo $f(x) \equiv \sum_{i=1}^{3} (x - a_i)^2$, em que a_1, a_2 e a_3 são constantes, mostre que $f(x)$ é mínima quando x é a média aritmética dos números dados.

b) Justifique que o gráfico de $f(x)$ não tem pontos de inflexão.

19. Efectue o estudo das funções seguintes, determinando o domínio, intervalos de monotonia, máximos ou mínimos relativos, coordenadas dos pontos de inflexão e sentido das concavidades dos respectivos gráficos, equações das assímptotas paralelas aos eixos coordenados. Esboce o gráfico de cada uma das funções e indique, para cada uma delas, o correspondente contradomínio:

a) $f(x) \equiv x^3 - 3x - 2$

b) $f(x) \equiv 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

c) $f(x) \equiv -x^4 - 4x + 1$

d) $f(x) \equiv 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 - 1$

e) $f(x) \equiv \dfrac{1}{x + 2}$

f) $f(x) \equiv \dfrac{3x}{2x - 1}$

g) $f(x) \equiv \dfrac{2x + 1}{x - 3}$

h) $f(x) \equiv \dfrac{1}{x^2 - 2x}$

i) $f(x) \equiv \dfrac{x}{x^2 - 4}$

j) $f(x) \equiv \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

k) $f(x) \equiv \dfrac{x^2 + 1}{x}$

VM1

20. Considere os paralelepípedos rectângulos de base quadrada em que a soma das suas dimensões é igual a uma constante a. Determine, em função de a, a altura daquele que apresenta o máximo volume.

(Exames oficiais)

VM2

21. Determine a altura do cone circular recto de volume mínimo circunscrito a uma esfera de raio 8 unidades.

VM3

22. Num cilindro de revolução está inscrito um prisma quadrangular regular. A secção feita no cilindro por um plano que contém o eixo, tem 30 cm de perímetro.

a) Mostre que sendo x a medida, expressa em centímetros, do diâmetro de uma base do cilindro, o volume do prisma, em cm^3, é dada pela expressão

$$\frac{15x^2 - x^3}{2}$$

b) Atendendo à natureza do problema, determine o domínio da função assim definida.

c) Determine o valor de x para o qual é máximo o volume do prisma.

d) Esboce o gráfico da função em referencial cartesiano e indique as coordenadas do ponto de inflexão desse gráfico.

(Exames oficiais)

23. Considere as funções reais de variável real

$$f(x) \equiv x^3 - x^2 + kx + \frac{65}{27}$$

e

$$g(x) \equiv 3x^2 - 2x + \frac{1}{3}$$

a) Determine k, sabendo que a tangente ao gráfico de f(x) no ponto de abcissa $x = 2$ é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

b) Escreva uma equação da referida tangente.

c) Mostre que os gráficos de f(x) e g(x) têm um ponto comum de abcissa $\frac{1}{3}$.

d) Justifique que este ponto é ponto de inflexão do gráfico de f(x) e que a ordenada do ponto é um mínimo relativo de g(x).

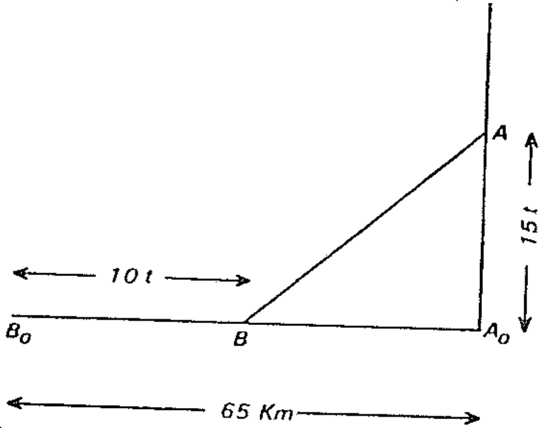
VM4

24. Às oito horas um navio B encontra-se a 65 km a Oeste de outro navio A. O navio B ruma a Leste, à velocidade de 10 km/h, enquanto A navega rumo ao Norte, com a velocidade de 15 km/h.

a) Mostre que, em cada instante, a distância, em quilómetros, que separa os dois navios é dada pela expressão $\sqrt{(65 - 10t)^2 + 225\,t^2}$

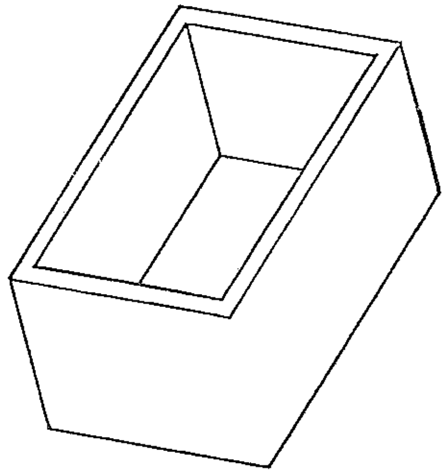
b) Calcule a hora a que os dois navios se encontrarão à distância mínima.

(Exames oficiais)



VM5

25. Na figura está representada uma caixa aberta em que a base é um rectângulo cujo comprimento é o dobro da largura.



a) Prove que, se a área total da caixa é $54\ dm^2$, o volume da caixa é dado, em dm^3, pela expressão $18x - \frac{2x^3}{3}$ em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.

b) Determine o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo e indique o valor do volume nesse caso.

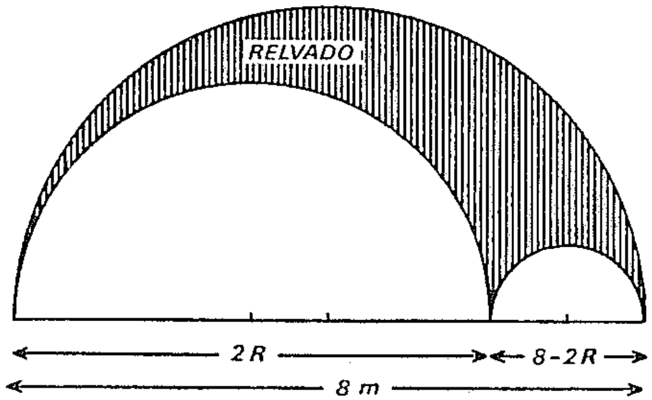
c) Considere a função real de variável real definida pela expressão obtida em *a)* e determine os pontos de inflexão do seu gráfico.

d) Esboce esse gráfico. (Pode utilizar um referencial não monométrico).

(Exames oficiais)

26. Considere num referencial cartesiano os pontos A(1,2) e B(5,4). Determine as coordenadas de um ponto M, pertencente, ao eixo dos xx de modo que seja mínimo o comprimento $\overline{AM} + \overline{MB}$.

VM6 27. Num canteiro semi-circular cujo raio tem 4 metros de comprimento, são reservados, de acordo com a figura junta, dois canteiros, igualmente semi-circulares, destinados ao cultivo de flores, sendo para relvado a parte restante.



a) Mostre que a área do relvado mede π (4R — R²) metros quadrados.

b) Investigue quais as medidas que deverão ter os raios dos dois canteiros das flores, para que seja máxima a área do relvado.

(Exames oficiais)

VM2 28. Entre todos os triângulos isósceles inscritos numa circunferência de raio constante R, determine, em função de R, a altura x daquele que, rodando em torno dessa altura, gera o cone de revolução do volume máximo.

(Exames oficiais)

29. *a)* Determine o sentido das concavidades e as coordenadas dos pontos de inflexão do gráfico de $f(x) = x^4 - 6x^3 + 2x$.

b) Determine para que valores de k o gráfico de $f(x) = x^4 + 2x^3 + kx^2 + 1$ tem sempre a concavidade voltada para cima.

VM8 30. Considere um triângulo estritamente isósceles inscrito numa circunferência de raio 5 cm.

a) Designando por x a medida da altura relativa ao lado desigual mostre que a área do triângulo pode ser dada em cm² pela expressão $A = x\sqrt{10x - x^2}$

b) Verifique que a área é máxima quando for x = 7,5 cm

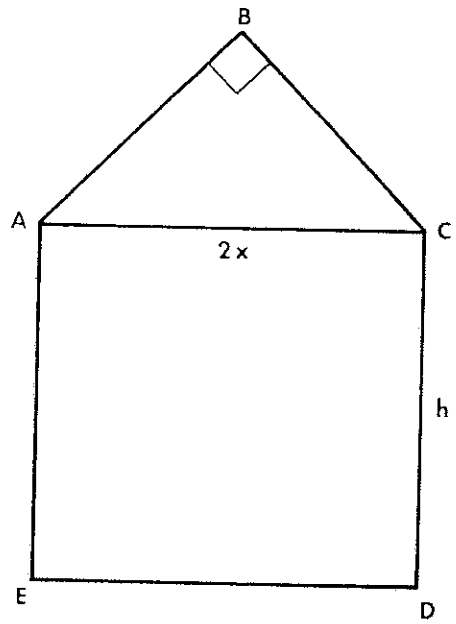
VM9 31.

Um pentágono [ABCDE] está decomposto num triângulo rectângulo e isósceles [ABC] e num rectângulo [ACDE].

A área do pentágono é 12 cm².

a) Mostre que o perímetro y do rectângulo [ACDE] pode obter-se pela fórmula

$$y = \frac{3x^2 + 12}{x}$$



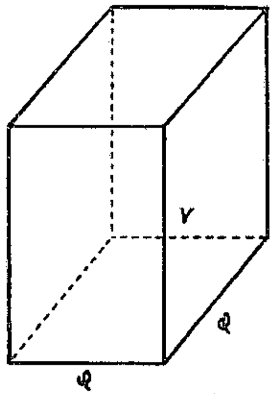
b) Recorrendo ao significado geométrico da derivada, determine uma equação da tangente ao gráfico da função definida por $y = \dfrac{3x^2 + 12}{x}$ no ponto (1,15).

c) Determine x, de modo que seja mínimo o perímetro do rectângulo.

32. Estude a função $f(x) \equiv -2x^3 + 3x^2 - 18x - 1$

RESOLUÇÃO

20.



$$2x + y = a$$

$$x = \frac{a - y}{2}$$

$$V = x^2 \,.\, y$$

$$V = \frac{(a - y)^2}{4} \,.\, y$$

$$V = \frac{a^2y - 2ay^2 + y^3}{4}$$

$$V' = \frac{1}{4}(a^2 - 4ay + 3y^2)$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4ay + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 3a^2}}{3} = \frac{2a \pm a}{3} \left< \begin{array}{l} y = a \\ y = \dfrac{a}{3} \end{array} \right.$$

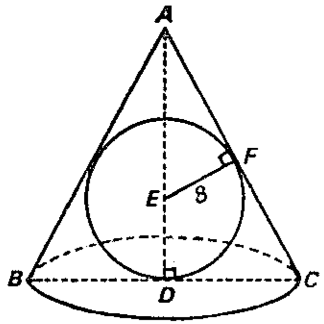
$$V'' = \frac{1}{4}(-4a + 6y)$$

$$V''(a) = \frac{1}{4} \,.\, 2a = \frac{a}{2} > 0$$

$$V''\left(\frac{3}{a}\right) = \frac{1}{4}(-4a + 2a) = -\frac{a}{2} < 0$$

Como $V'\left(\frac{a}{3}\right) = 0 \wedge V''\left(\frac{a}{3}\right) < 0$, o volume é máximo quando a altura for $\frac{a}{3}$.

21.



Sendo x a altura do cone e y o raio da base.

Da semelhança dos triângulos [AEF] e [ADC] resulta:

$$\frac{8}{y} = \frac{x - 8}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{64}{y^2} = \frac{(x - 8)^2}{x^2 + y^2}$$

$$64x^2 + 64y^2 = y^2(x - 8)^2$$

$$64x^2 = y^2(x^2 - 16x + 64 - 64)$$

$$y^2 = \frac{64x^2}{x^2 - 16x}$$

Volume do cone:

$$V = \frac{\pi y^2 x}{3}$$

$$\therefore \; V = \frac{\pi}{3} \,.\, \frac{64x^3}{x^2 - 16x}$$

$$V = \frac{64\pi}{3} \,.\, \frac{x^2}{x - 16}$$

$$V' = \frac{64\pi}{3} \,.\, \frac{2x^2 - 32x - x^2}{(x - 16)^2}$$

$$V' = \frac{64\pi}{3} \,.\, \frac{x^2 - 32x}{(x - 16)^2}$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 32x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 32$$

Como $x \neq 0$ é $x = 32$

$$V'' = \frac{64\pi}{3} \cdot \frac{(2x-32)(x-16)^2 - 2(x-16)(x^2-32x)}{(x-16)^4}$$

$$V'' = \frac{64\pi}{3} \cdot \frac{2(x-16)^3 - 2(x-16)x(x-32)}{(x-16)^4}$$

$$V''(32) = \frac{64\pi}{3} \cdot \frac{2 \cdot 16^3}{16^4} > 0$$

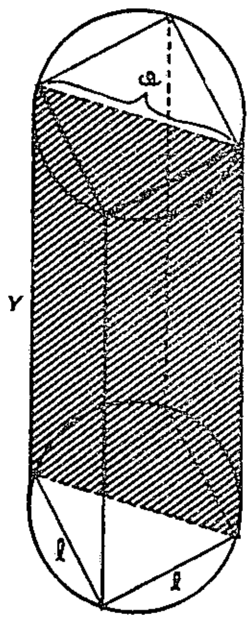
Como $V'(32) = 0 \wedge V''(32) > 0$, o volume do cone é mínimo quando a altura do cone for 32 unidades.

22. *a)* $2x + 2y = 30$

$x + y = 15$

$y = 15 - x$

$V = A_b \times h$



$A_b = l^2$

Como $l^2 + l^2 = x^2$

vem: $l^2 = \dfrac{x^2}{2}$

$\therefore V = \dfrac{x^2}{2} \cdot (15 - x)$

$$V = \frac{15x^2 - x^3}{2}$$

b) Por ser $x \neq 0$ e $V > 0$, resulta que

$$\frac{15x^2 - x^3}{2} > 0$$

$15 - x > 0$

$x < 15$

$D_v = \{x : 0 < x < 15\}$

c) $V' = \dfrac{1}{2}(30x - 3x^2) = 15x - \dfrac{3}{2}x^2$

$V'' = 15 - 3x$

$V' = 0 \Leftrightarrow 15x - \dfrac{3}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow 30x - 3x^2 = 0$

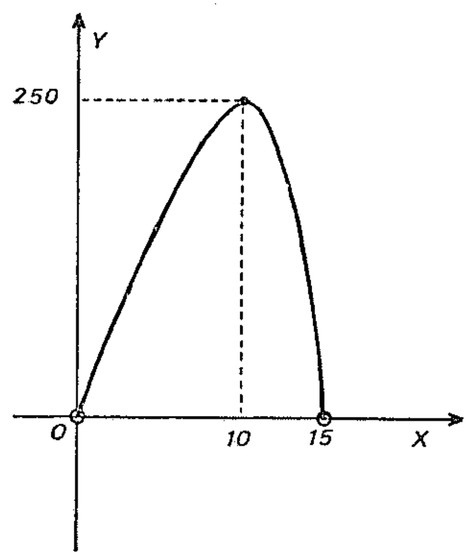
$V' = 0 \Rightarrow 10 - x = 0 \quad \therefore \quad x = 10$

$V''(10) = 15 - 30 < 0$

Como $V'(10) = 0$ e $V''(10) < 0$ resulta que V é máximo quando for $x = 10$ cm

d) $y = \dfrac{15x^2 - x^3}{2}$ com $0 < x < 15$

x	y
$\to 0$	$\to 0$
10	250
$\to 15$	$\to 0$



23. *a)* $f(x) \equiv x^3 - x^2 + kx + \dfrac{65}{27}$

$f'(x) \equiv 3x^2 - 2x + k$

Como declive da bissectriz dos quadrantes ímpares é 1, terá de ser:

$f'(2) = 1$

$12 - 4 + k = 1$

$k = -7$

b) $f(x) \equiv x^3 - x^2 - 7x + \dfrac{65}{27}$

$f(2) = 8 - 4 - 14 + \dfrac{65}{27}$

$f(2) = -\dfrac{205}{27}$

A equação da tangente será:

$y - f(2) = x - 2$

$y + \dfrac{205}{27} = x - 2$

$y = x - \dfrac{259}{27}$

c) $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27} - \dfrac{1}{9} - \dfrac{7}{3} + \dfrac{65}{27}$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$

$g\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3 \cdot \dfrac{1}{9} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} = 0$

O ponto comum é, pois, $\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$

d) $f''(x) \equiv 6x - 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

Ponto de inflexão do gráfico de f:

$$\left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

$g'(x) \equiv 6x - 2$

$g''(x) = 6$

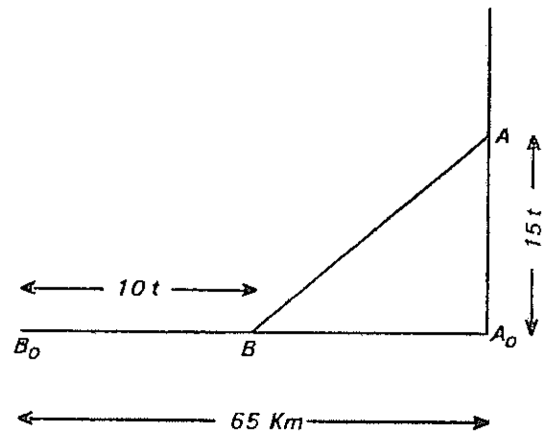
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

Como

$g'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0 \wedge g''\left(\dfrac{1}{3}\right) > 0$, resulta que $g(x)$ tem um mínimo relativo para $x = \dfrac{1}{3}$

Valor do mínimo relativo: $g\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$, ordenada do ponto $\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$

24.



a) $d = \sqrt{\overline{A_0B}^2 + \overline{A_0B}^2}$

$d = \sqrt{(65 - 10t)^2 + (15t)^2}$

$d = \sqrt{(65 - 10t)^2 + 225t^2}$

b) $d' = \dfrac{2(65 - 10t)\ (65 - 10t)' + 450t}{2\sqrt{(65 - 10t)^2 + 225t^2}}$

$d' = \dfrac{-20(65 - 10t) + 450t}{2\sqrt{(65 - 10t)^2 + 225t^2}}$

$d' = \dfrac{650t - 1300}{2\sqrt{(65 - 10t)^2 + 225t^2}}$

$d' = 0$

$650t - 1300 = 0$

$t = \dfrac{1300}{650}$

$t = 2$

t	0		2	
d'		$-$	0	$+$
d		↘	m	↗

A hora a que os dois navios se encontrarão à distância mínima é, pois duas horas após as 8 horas, isto é, às 10 horas.

25. *a)* Designe-se por h a medida, em dm, da altura da caixa. Como a área total da caixa (que não tem tampa) é 54 dm², será:

$2xh + 2 \cdot 2x \cdot h + 2x \cdot x = 54$

$6xh + 2x^2 = 54$

$h = \dfrac{54 - 2x^2}{6x}$

$h = \dfrac{27 - x^2}{3x}$

Designado por y o volume da caixa, tem-se:

$y = 2x^2 \cdot \dfrac{27 - x^2}{3x}$

$y = \dfrac{54x^2 - 2x^4}{3x}$

$y = \dfrac{54x^2}{3x} - \dfrac{2x^4}{3x}$

$y = 18x - \dfrac{2x^3}{3}$

b) $y' = 18 - \dfrac{2}{3} \cdot 3x^2$

$y' = 18 - 2x^2$

$y' = 0 \Leftrightarrow 18 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \ \vee$
$\vee\ x = -3$

Como $x > 0$ será $x = 3$

$y'' = -4x \qquad y''(3) = -12 < 0$

Então: $y'(3) = 0 \wedge y''(3) < 0$

Logo, o volume é máximo para $x = 3$ dm

Valor do volume: $y(3) = 54 - \dfrac{54}{3} = 36$ dm³

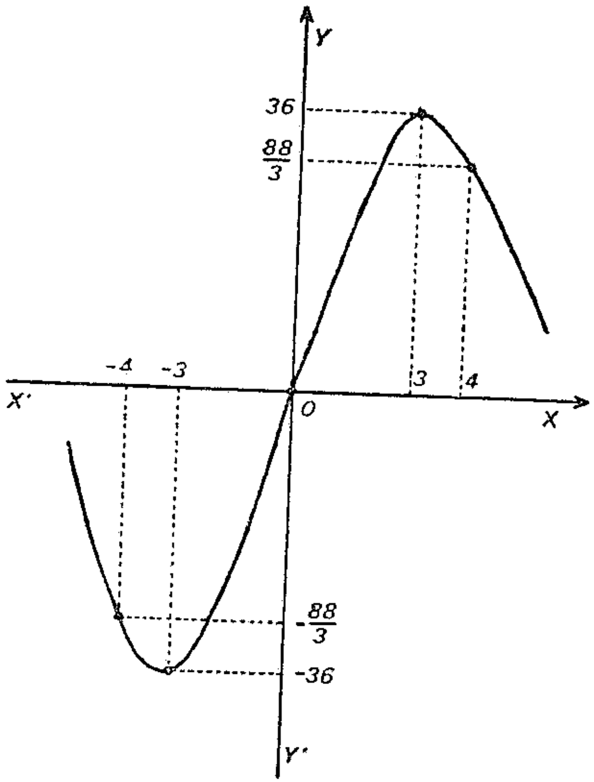
c) $y'' = 0 \Leftrightarrow -4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$y(0) = 0$

Ponto de inflexão: $(0, 0)$

d)

x	y
-4	$-\dfrac{88}{3}$
-3	-36
0	0
3	36
4	$\dfrac{88}{3}$



26. Seja $M(x, 0)$

$$\overline{AM} = \sqrt{(x-1)^2 + 4}$$

$$\overline{MB} = \sqrt{(x-5)^2 + 16}$$

$$d = \overline{AM} + \overline{MB}$$

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{(x-5)^2 + 16}$$

$$d' = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2 + 4}} + \frac{2(x-5)}{2\sqrt{(x-5)^2 + 16}}$$

$$d' = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}} + \frac{x-5}{\sqrt{(x-5)^2 + 16}}$$

$$d' = \frac{(x-1)\sqrt{(x-5)^2 + 16} + (x-5)\sqrt{(x-1)^2 + 4}}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}\,\sqrt{(x-5)^2 + 16}}$$

$$d' = 0$$

$$(x-1)\sqrt{(x-5)^2 + 16} + (x-5)\sqrt{(x-1)^2 + 4} = 0$$

$$(x-1)\sqrt{(x-5)^2 + 16} = -(x-5)\sqrt{(x-1)^2 + 4}$$

$$(x-1)^2\,[(x-5)^2 + 16] = (x-5)^2\,[(x-1)^2 + 4]$$

$$(x-1)^2(x-5)^2 + 16(x-1)^2 = (x-5)^2(x-1)^2 + 4(x-5)^2$$

$$16(x-1)^2 = 4(x-5)^2$$

$$16x^2 - 32x + 16 = 4x^2 - 40x + 100$$

$$12x^2 + 8x - 84 = 0$$

$$3x^2 + 2x - 21 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 63}}{3} = \frac{-1 \pm 8}{3} \quad \begin{cases} x = 7/3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Para $x = -3$ a equação $d' = 0$, dá

$$-4\sqrt{80} - 8\sqrt{20} = 0$$

que é uma proposição falsa.

Para $x = \dfrac{7}{3}$ vem:

$$\frac{4}{3}\sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right) + 16} - \frac{8}{3}\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right) + 4} = 0$$

ou

$$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{64}{9} + 16} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{9} + 4} = 0$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{208}{9}} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{52}{9}} = 0$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2^4 \cdot 13}{3^2}} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2^2 \cdot 13}{3^2}} = 0$$

$$\frac{16}{9}\sqrt{13} - \frac{16}{9}\sqrt{13} = 0$$

que é uma proposição verdadeira.

Poder-se-á verificar que $d''\left(\frac{7}{3}\right) < 0$. Como o cálculo é extremamente laborioso, aceite-se este facto e conclua-se, portanto, que as coordenadas do ponto M são $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$.

27. *a)* Área do semi-círculo de raio 4: $\frac{16\pi}{2}\ m^2 = 8\pi$

Área do semi-círculo de raio R: $\frac{\pi R^2}{2}$

Área do semi-círculo de raio 4 — R: $\frac{\pi (4 - R)^2}{2}$

Área do relvado:

$$8\pi - \left[\frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi(4 - R)^2}{2}\right] =$$

$$= 8\pi - \left(\frac{\pi R^2}{2} + 8\pi - 4\pi R + \frac{\pi R^2}{2}\right) =$$

$$= 8\pi - \pi R^2 - 8\pi + 4\pi R =$$

$$= \pi (4R - R^2)\ m^2$$

b) $S = \pi (4R - R^2)$

$S' = \pi (4 - 2R)$

$S' = 0 \Leftrightarrow \pi (4 - 2R) = 0 \Leftrightarrow R = 2$

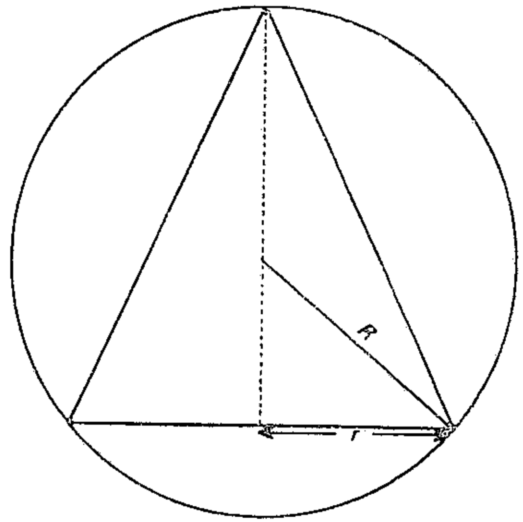
$S'' = -2\pi < 0$

Como

$S'(2) = 0 \wedge S''(2) < 0$, a área do relvado é máxima quando $R = 2$.

Os raios dos canteiros deverão ser ambos iguais a 2 metros para que a área do relvado seja máxima.

28. Seja x a altura do cone e r o raio da base.



Pelo teorema de Pitágoras, vem:

$(x - R)^2 + r^2 = R^2$

$x^2 - 2Rx + R^2 + r^2 = R^2$

$r^2 = 2Rx - x^2$

Volume do cone: $V = \frac{\pi r^2 x}{3}$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot (2Rx - x^2)x$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot (2Rx^2 - x^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{3} (4Rx - 3x^2)$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow 4Rx - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow (4R - 3x)x = 0$$

Como $x \neq 0$ deverá ser

$$4R - 3x = 0$$

ou $x = \dfrac{4R}{3}$

$$V'' = \frac{\pi}{3} (4R - 6x)$$

$$V'' \left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{\pi}{3} (4R - 8R) = - \frac{4 \pi R}{3} < 0$$

Portanto

$$V' \left(\frac{4R}{3}\right) = 0 \text{ e } V'' \left(\frac{4R}{3}\right) < 0$$

Logo, o volume do cone de revolução de volume máximo tem de altura

$$x = \frac{4R}{3}$$

29. *a)* $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 2$

$f''(x) = 12x^2 - 36x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 36x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

x		0		3	
f''	+	0	—	0	+
f	$\cup$	I_1	$\cap$	I_2	$\cup$

Concavidade voltada para cima:

$] -\infty, 0 [\cup] 3, +\infty [$

Concavidade voltada para baixo:

$] 0, 3 [$

Pontos de inflexão:

$I_1 \ (0, 0) \ ; \ I_2 \ (3, -75)$

b) $f'(x) \equiv 4x^3 + 6x^2 + 2kx$

$f''(x) \equiv 12x^2 + 12kx + 2k$

$\triangle < 0$

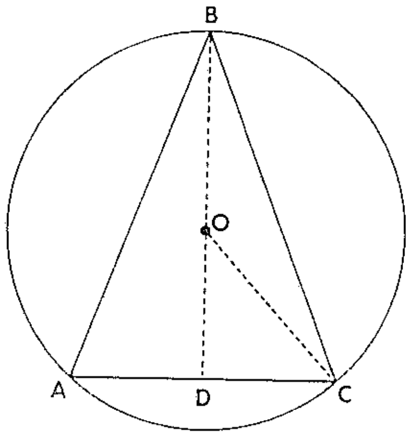
$(12k)^2 - 48 \cdot 2k < 0$

$144k^2 - 96k < 0$

$3k^2 - 2k < 0$

$$\therefore \ 0 < k < \frac{2}{3}$$

30. *a)*



$\overline{BD} = x$

$\overline{OC} = 5$

$\overline{DC} = y$

$\overline{OD} = x - 5$

$$y = \sqrt{5^2 - (x-5)^2}$$

$$y = \sqrt{25 - x^2 + 10x - 25}$$

$$y = \sqrt{10x - x^2}$$

$$A = \overline{DC} \times \overline{BD}$$

$$A = x\sqrt{10x - x^2}$$

$$A' = \sqrt{10x - x^2} + x \cdot \frac{10 - 2x}{2\sqrt{10x - x^2}}$$

$$A' = \sqrt{10x - x^2} + \frac{5x - x^2}{\sqrt{10x - x^2}}$$

$$A' = \frac{10x - x^2 + 5x - x^2}{\sqrt{10x - x^2}}$$

$$A' = \frac{15x - 2x^2}{\sqrt{10x - x^2}}$$

$A' = 0 \Leftrightarrow 15x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x\,(15 - 2x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 7{,}5$

Como $x \neq 0$, será $x = 7{,}5$ cm.

31. *a)* Área do pentágono [ABCDE] =
= área de [ABC] + área [ACDE]

Pondo $AB = BC = z$, será

$$z^2 + z^2 = (2x)^2$$

$$2z^2 = 4x^2$$

$$z^2 = 2x^2$$

Área do triângulo [ABC]:

$$\frac{z\,.\,z}{2} = \frac{z^2}{2} = \frac{2x^2}{2} = x^2$$

Área do rectângulo [ACDE]: $2xh$

Portanto:

$$2xh + x^2 = 12$$

$$h = \frac{12 - x^2}{2x}$$

Perímetro do rectângulo [ACDE]

$$y = 4x + 2h = 4x + 2 \times \frac{12 - x^2}{2x}$$

$$y = 4x + \frac{12 - x^2}{x}$$

$$y = \frac{4x^2 + 12 - x^2}{x}$$

$$y = \frac{3x^2 + 12}{x}$$

b) $y' = \dfrac{6x^2 - 3x^2 - 12}{x^2}$

$y' = \dfrac{3x^2 - 12}{x^2}$

$m_t = y'(1) = \dfrac{3 - 12}{1} = -9$

Equação da tangente:

$y - 15 = -9\,(x - 1)$

$y - 15 = -9x + 9$

$y + 9x = 24$

c) $y' = 0 \qquad 3x^2 - 12 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	m	$\nearrow$	

O perímetro é mínimo para $x = 2$.

32. $f'(x) \equiv -6x^2 + 6x - 18$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 6x - 18 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 12}}{2}$

Como $f'(x)$ não tem raízes reais é sempre negativo (sinal do coeficiente de x^2), pelo que $f(x)$ é sempre decrescente.

$f''(x) \equiv -12x + 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x + 6 = 0 \quad \therefore \quad x = \dfrac{1}{2}$

x		½	
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$	I	$\cap$

Concavidade voltada para cima:

$\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$

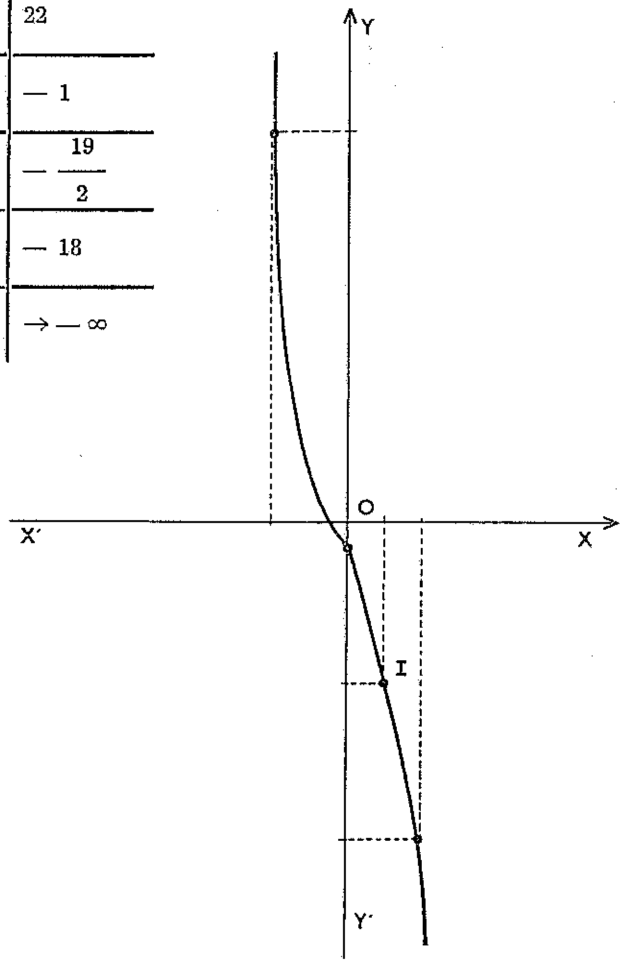
Concavidade voltada para baixo:

$\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

Ponto de inflexão:

$I\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{19}{2}\right)$

x	y
$\rightarrow -\infty$	$\rightarrow +\infty$
-1	22
0	-1
½	$-\dfrac{19}{2}$
1	-18
$\rightarrow +\infty$	$\rightarrow -\infty$



Referencial não monométrico.

ÍNDICE

edição: E-636-80 — 1.ª Edição

direitos reservados: PLÁTANO EDITORA, S.A.R.L.
Av. de Berna, 31-2.º Esq. • Lisboa

tiragem: 10 000 Exs.

título: MATEMÁTICA 4

autor: ANTÓNIO DO NASCIMENTO PALMA FERNANDES
actualização de ANTÓNIO OLIVEIRA PEGADO;
MARIA DO ROSÁRIO RIBEIRO E
MAVÍLIA LOBO PALMEIRA

composição e montagem: SOTEXTO, LDA.

ANTÓNIO DO NASCIMENTO PALMA FERNANDES

MATEMÁTICA 7

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Tomo I

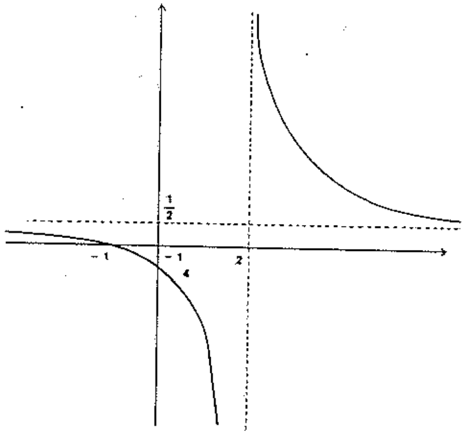
EXEMPLOS
EXERCÍCIOS

actualização de
ANTÓNIO DE OLIVEIRA PEGADO
MARIA DO ROSÁRIO RIBEIRO
MAVÍLIA LOBO PALMEIRA

PLÁTANO EDITORA

Então $x = 2$ e $y = \frac{1}{2}$ são assimptotas respectivamente vertical e horizontal.

Na representação gráfica desta função, devemos ter em atenção o ponto $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, de intersecção com yy'.



QF1

35. De entre os rectângulos de perímetro igual a 20 cm, determinar o que tem a área máxima.

RESOLUÇÃO

Representando por x e y as dimensões do rectângulo, teremos para o perímetro e área, respectivamente:

$P = 2x + 2y = 20$ e $A = x \cdot y$

Resolvendo $2x + 2y = 20$ em ordem a y e substituindo em A, virá:

$2y = 20 - 2x \Leftrightarrow y = 10 - x$ e $A = x(10 - x) \Leftrightarrow A = 10x - x^2$

Determinemos o valor de x para o qual a área é máxima:

Ora, $A' = 10 - 2x$, cujo zero é $x = 5$; assim, a área será máxima ou mínima para $x = 5$. Uma vez que para $x < 5$, $10 - 2x > 0$ e para $x > 5$, $10 - 2x < 0$, concluimos que para $x = 5$, a área é máxima.

Como, para $x = 5$, $y = 10 - 5 = 5$, podemos afirmar que o rectângulo de perímetro 20 cm que tem a área máxima, é o quadrado cujo lado mede 5 cm.

QF2
Rep

36. De entre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 metros, qual é aquele que tem área máxima?

RESOLUÇÃO

Considerando que os catetos do triângulo rectângulo medem x metros e y metros, teremos que $x^2 + y^2 = 36$ (pelo teorema de Pitágoras) e $A = \frac{xy}{2}$

Determinando o valor de y na 1.ª equação e substituindo na 2.ª, virá:

$y^2 = 36 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$ (a dimensão é sempre positiva) e $A = \frac{x\sqrt{36 - x^2}}{2}$

Para que A seja máximo, será necessário que a sua derivada A' admita pelo menos um zero sendo respectivamente positiva e negativa à esquerda e à direita do seu zero.

Assim,

$$A' = \frac{1}{2}\left[x\,D(\sqrt{36 - x^2}) + \sqrt{36 - x^2}\right] = \frac{1}{2}\left(x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{36 - x^2}} + \sqrt{36 - x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} + \sqrt{36 - x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2 + 36 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}}\right) = \frac{-2x^2 + 36}{\sqrt{36 - x^2}},$$

portanto: $\frac{-2x^2 + 36}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 36 = 0 \wedge 36 - x^2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 36 \wedge (6 - x)(6 + x) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{18} \wedge -6 < x < 6 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$

Pelo estudo do quadro e porque o cateto tem medida positiva, concluimos que a função A admite máximo relativo em $x = 3\sqrt{2}$ e $(3\sqrt{2})^2 + y^2 = 36 \Leftrightarrow 18 + y^2 = 36 \Leftrightarrow y^2 = 18 \Leftrightarrow y = 3\sqrt{2}$

	-6		$-3\sqrt{2}$		0		$3\sqrt{2}$		6
$-2x^2 + 36$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
A		↘		↗		↗		↘	

Então a área será máxima se o triângulo rectângulo for isósceles, de cateto $x = 3\sqrt{2}$ metros.

78. Esboce o gráfico representativo das seguintes funções, indicando o domínio, máximos e mínimos relativos e absolutos se houver, e o contradomínio de cada uma delas.

a) $y = x^2 + x$; b) $y = \dfrac{2}{x+2}$; c) $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$.

Rep. PF3 **79.** Dois números têm por soma 12; determinar esses números de forma que a soma dos seus quadrados seja mínima.

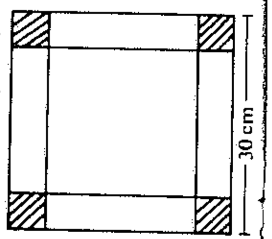
Rep. PF4 **80.** Dois números têm por soma 20; determinar esses números de forma que o seu produto tenha um valor máximo.

Rep. PF5 **81.** De entre os rectângulos de área igual a 64 dm², qual é aquele que tem o perímetro mínimo?

PF6 **82.** De entre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 8 metros, qual é aquele que tem a área máxima?

PF7 **83.** Os catetos de um triângulo rectângulo somam 40 metros. Determine a hipotenusa do que tem maior área.

PF8 **84.** Com uma placa de latão de 30 cm de lado (representada na figura) pretende-se fazer uma caixa sem tampa. Que dimensões devem ter os quadrados a cortar dos 4 cantos, para que esta tenha o máximo volume?



Rep. PF9 **85.** De entre os sectores circulares de perímetro igual a 8 metros, qual é o raio daquele que tem a área máxima? (Perímetro do arco = $R\,n$ e área do sector = $\dfrac{R^2}{4}\,n$, n em radianos)

Rep. PF10 **86.** De entre os prismas quadrangulares regulares que têm de volume 8 m³, qual é aquele que tem a área total mínima?

Rep. PF11 **87.** Dada uma esfera de raio igual a 1 metro, determine a medida do raio do cilindro de revolução inscrito de volume máximo.

Rep. PF12 **88.** A soma dos perímetros de uma circunferência e de um quadrado é constante. Demonstre que a soma das áreas do círculo e do quadrado é mínima quando o diâmetro do círculo for igual ao lado do quadrado.

89. Considere em $\mathbb{R}$, as seguintes funções:

$$f : x \rightarrow 1 - \sqrt{x-1} \qquad g : x \rightarrow x^2 - 2x$$

a) Determine o domínio e o contradomínio de f ; b) A função g não é injectiva. Justifique esta afirmação e traduza-a na linguagem simbólica da Matemática ; c) Determine o co-seno do ângulo que a recta tangente à curva representativa da função f, no ponto $x = 2$, faz com a recta de equação $y = 0$; d) Calcule $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

(Exame 1980 — 1.ª chamada)

90. Considere as funções reais de variável real, f e g, tais que $f : x \rightarrow x - \sqrt{x}$ e $g : x \rightarrow x^3 - 4x$

a) Mostre que: «As funções f e g são infinitésimos com x e a ordem de f é inferior à de g ; b) Calcule $g'(1)$ aplicando a definição de derivada de uma função num ponto ; c) Determine a co-tangente do ângulo que a recta tangente ao gráfico da função f no ponto $x = 4$, faz com a recta de equação $x = 0$; d) Determine, em $\mathbb{R}$, os valores de x que verificam a condição $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(Exame 1980 — 2.ª chamada)

Texto Editora

FRD

MATEMÁTICA

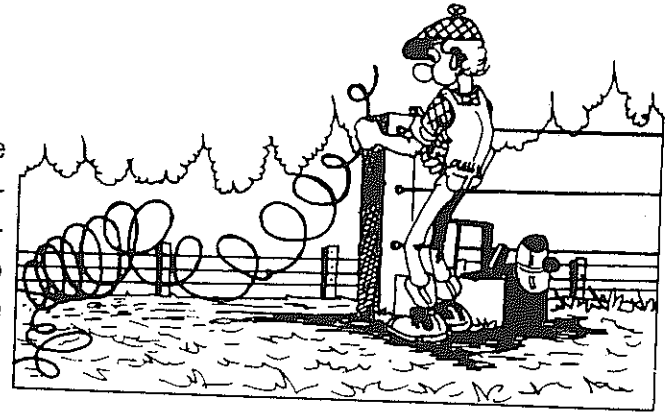
11º ano

Abrantes
Fernando Carvalho

PROBLEMAS PRÁTICOS

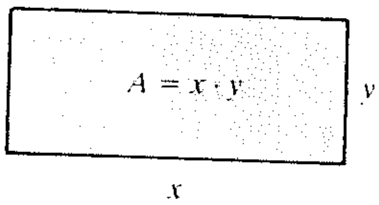
A teoria que acabamos de estudar, nomeadamente a *pesquisa de extremos* de uma função, aplica-se à resolução de muitos problemas concretos — do âmbito da geometria, da física, da economia, etc. Vamos ver alguns exemplos.

Problema 1: A maior área possível.



Um indivíduo dispõe de 20 metros de arame com os quais quer vedar um pequeno parque de forma rectangular num terreno que tem à sua disposição. Pretendendo obter a *área máxima,* que dimensões deve escolher para o parque?

Esquema:



$P = 2x + 2y = 20$

Simplificando (e *matematizando*) o enunciado, o problema consiste em determinar, de entre todos os rectângulos de perímetro 20, qual é aquele que tem maior área.

Designando por x e y as dimensões do rectângulo será

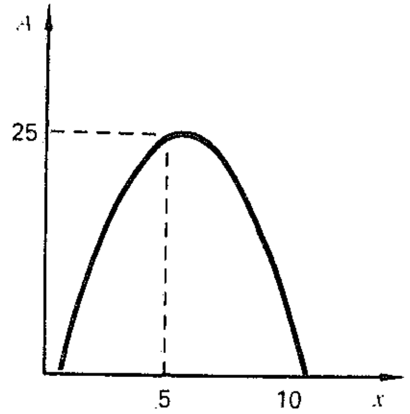
$$2x + 2y = 20 \iff x + y = 10 \iff y = 10 - x$$

e, como a área do rectângulo é dada por $A = x \cdot y$, ter-se-á

$$A = x \cdot (10 - x) \qquad \text{ou seja} \qquad A = 10x - x^2$$

expressão da área (A) em função de uma das dimensões (x).

■ Gráfico de $x \longmapsto A = 10x - x^2$ no intervalo $]0, 10[$:



35. Procura agora resolver o problema *dual:*

De entre todos os rectângulos que têm 64 m^2 de área, qual é o que tem **menor** perímetro?

Para que valor de x obtemos o valor máximo de A?

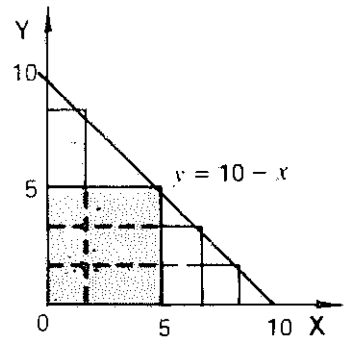
Derivando: $A' = D(10x - x^2)$, logo $A' = 10 - 2x$.

Facilmente se vê que A' se anula para $x = 5$, sendo positiva à esquerda de 5 e negativa à direita de 5.

Então A tem um máximo para $x = 5$, sendo 25 o valor da função nesse ponto. A área máxima é portanto de 25 m^2.

x		5	
$A' = 10 - 2x$	+	0	−
$A = 10x - x^2$	↗	25	↘
		máx.	

Devendo ser $x = 5$, então também $y = 5$ (recorda que $y = 10 - x$) pelo que se conclui que o quadrado de lado 5 é, de entre todos os rectângulos de perímetro 20, aquele que tem **maior área**.



ACT. 35

A22 **Problema 2: O preço mais conveniente.**

A comissão de finalistas de uma escola secundária está a organizar um festival desportivo para angariar fundos. Tendo alugado o pavilhão de um clube da zona, calcularam que, vendendo por 150\$00 cada bilhete, conseguiriam uma lotação de 500 pessoas. Porém, um estudo mais atento (baseado em sondagens) levou-os a concluir que, por *cada* 10\$00 que baixassem àquele preço, teriam *mais* 50 pessoas a comprar o ingresso.

Supondo válidas estas previsões, qual é o preço de cada bilhete que assegura uma maior receita global?

Se cada bilhete fosse vendido a 150\$00, a receita total seria (em escudos) de $R = 150 \times 500$. Designando por $10x$ o *desconto* a fazer em cada bilhete, haverá *mais* $50x$ pessoas a pagar. Portanto, a receita será

$$R = (150 - 10x) \cdot (500 + 50x)$$

Calculando a expressão da derivada de R, obteremos

$$R' = -10 \cdot (500 + 50x) + 50 \cdot (150 - 10x) = -5000 - 500x + 7500 - 500x$$

ou seja, $$R' = -1000x + 2500$$

Um estudo do sinal de R' mostra-nos que R atinge o seu valor máximo para $x = 2,5$. O desconto deverá então ser de $10 \times 2,5$, ou seja de 25\$00, e portanto o preço por bilhete mais vantajoso para os organizadores é 125\$00.

x		2,5	
R'	+	0	−
R	↗	máx	↘

36. De acordo com a previsão feita, custando cada bilhete 125\$00, determina:

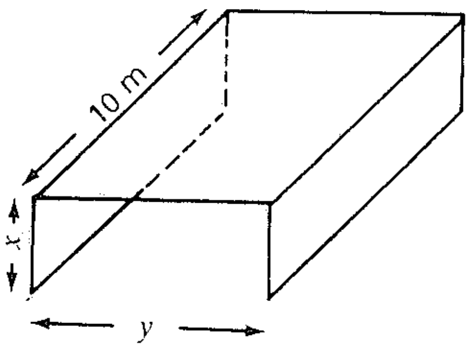
a) o número de espectadores;

b) a receita do espectáculo.

◀ ACT. 36

Problema 3: A construção mais barata.

Pretende-se construir um túnel com a forma que a figura sugere, usando-se três placas rectangulares do mesmo material e de espessura uniforme (duas laterais e uma em cima).



O túnel tem uma extensão de 10 m e a sua *boca* deve ter 72 m² da área. Que valores devem ter a largura e a altura do túnel para que a construção seja o menos cara possível?

O que procuramos é afinal os valores de x e de y (ver figura) de modo que a área total seja mínima. Ora, essa área total é dada por

$$A = 10\,x + 10\,y + 10\,x = 20\,x + 10\,y$$

A condição imposta quando à área da *boca* do túnel leva-nos a considerar que $x \cdot y = 72$. Podemos assim definir y em função de x e, por substituição, definir A como função de uma única variável:

$$x \cdot y = 72 \underset{x \neq 0}{\iff} y = \frac{72}{x} \qquad A = 20\,x + 10\,y = 20\,x + 10 \times \frac{72}{x}$$

Logo, $$A = 20\,x + \frac{720}{x}$$

Investiguemos se A admite algum mínimo. Derivando, obtemos

$$A' = 20 - \frac{720}{x^2} \qquad \text{ou} \qquad A' = \frac{20\,x^2 - 720}{x^2}$$

Ora, $20\,x^2 - 720 = 0 \iff x = \pm 6$ e o que sabemos sobre o sinal da função quadrática permite-nos preencher o quadro, tendo o cuidado de atender a que para $x = 0$ nem A' nem A estão definidas e a que, **neste problema concreto,** só nos interessam **valores positivos** de x.

x		-6		0	$-$	6	$+$
A'	$+$	0	$-$	¦	$+$	0	$-$
A	↗	máx.	↘	¦	↘	mín.	↗

Portanto, A é **mínima** para $x = 6$.

Substituindo x por 6 na expressão $A = 20\,x + \frac{720}{x}$, obteremos esse valor mínimo da área: $240\ m^2$.

Finalmente, substituindo x por 6 em $y = \frac{72}{x}$, obteremos $y = 12$. Conclusão: o túnel deverá ter 6 metros de altura 12 metros de largura.

◀

■ Tratámos aqui um tipo de problemas em que se pretende obter a maior área, a receita máxima, o custo mínimo, ...

Dá-se-lhes por vezes o nome de *problemas de optimização.* Em geral, a sua resolução passa pelas seguintes etapas:

1) Definir uma *função* — se possível, com apenas uma variável — que constitua um modelo matemático do problema a estudar.

2) Estudar a variação dessa função, em especial procurando os seus máximos e mínimos.

3) Verificar a adequação dos resultados teóricos obtidos à situação concreta a que o problema se refere.

19. Considerando a função $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = x^4 - 5$, mostra que y'' se anula para $x = 0$, mas o ponto $(0, -5)$ não é um ponto de inflexão.

20. Faz um gráfico exemplificativo de uma função que, num intervalo $[a, b]$, seja:

a) crescente e côncava para cima;

b) crescente e côncava para baixo;

c) decrescente e côncava para cima;

d) decrescente e côncava para baixo.

Que concluis sobre a posição relativa do gráfico da função e da recta tangente a esse gráfico em qualquer ponto de $[a, b]$?

21. Faz um estudo de cada uma das funções seguintes, incluindo um esboço do respectivo gráfico:

a) $y = 2x^2 - x + 1$

b) $y = 2x^3 - 5$

c) $y = x^4 - 4x$

d) $y = x^2 \cdot (x + 2)$

e) $y = \dfrac{2x + 1}{x - 4}$

f) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$

g) $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$

h) $y = 2x - \dfrac{x + 3}{x - 2}$

i) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

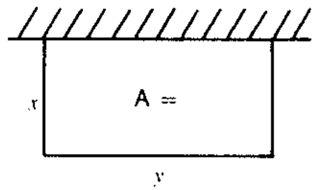
j) $y = 1 - \dfrac{x}{x^2 - 2}$

AE4

22. De entre os pares de números reais positivos cujo produto é 64 qual é aquele em que a soma é mínima?

AE5

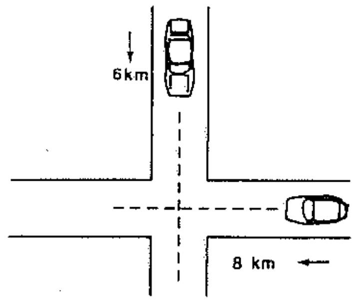
23. Pretendemos que um terreno de forma rectangular (em que um dos lados está encostado a um muro) tenha uma área de 50 m². Que dimensões deve ter o terreno para que o comprimento da vedação a utilizar ao longo dos outros três lados seja o menor possível?



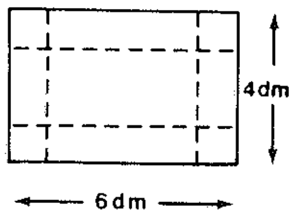
AE6

24. Dois automóveis deslocam-se, à mesma velocidade, em estradas perpendiculares e no sentido indicado pelas setas.

Um deles está a 6 km do cruzamento e o outro a 8 km do cruzamento. Quando é que a distância entre eles é mínima?

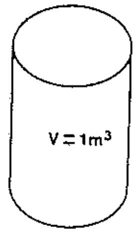


25. Se cortarmos quatro quadrados iguais nos cantos de uma folha rectangular de 6 dm × 4 dm, poderemos dobrá-la e construir uma caixa aberta.



Qual deve ser a medida do lado do quadrado a cortar para que a caixa tenha volume máximo (indica um valor aproximado com erro inferior a 1 cm)?

26. Quais devem ser as medidas do raio da base e da altura de um reservatório cilíndrico fechado com um volume de 1 m³, de modo que a sua área total seja mínima?



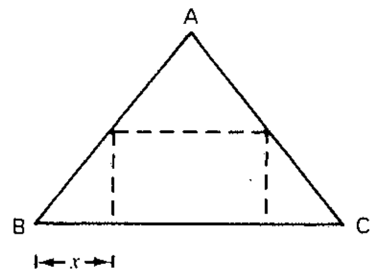
27. Ao iniciar um jogo de basquetebol, o árbitro lançou a bola na vertical com uma força exagerada... Sabendo que a distância ao solo dependia do tempo de acordo com a lei

$$h(t) = 6t - t^2$$

qual foi a altura máxima que a bola atingiu? (t em segundos, h em metros).

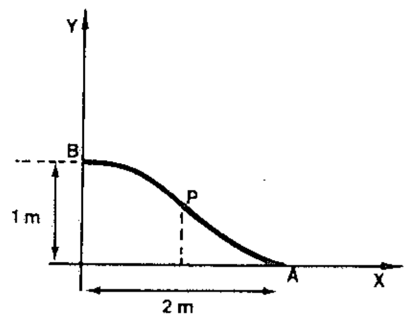
28. O triângulo [ABC] é isósceles, sendo

$$\overline{AB} = \overline{AC} = 10 \text{ m} \; ; \quad \overline{BC} = 12$$



Pretendemos inscrever nele um rectângulo, da forma que a figura indica. Para que valor de x se obterá um rectângulo de área máxima e qual é o valor dessa área?

29. Pretende-se construir uma rampa tangente ao solo (em A) e ao *acesso* (em B).



a) Uma rampa rectilínea poderá resolver o problema?

b) Existirá uma curva do tipo

$$y = ax^2 + bx + c$$

que possa constituir um modelo adequado?

c) E duas parábolas com vértices em A e B que tenham a mesma tangente no ponto P de abcissa 1?

d) Será possível resolver o problema com uma função polinomial de grau 3? Em caso afirmativo define-a.

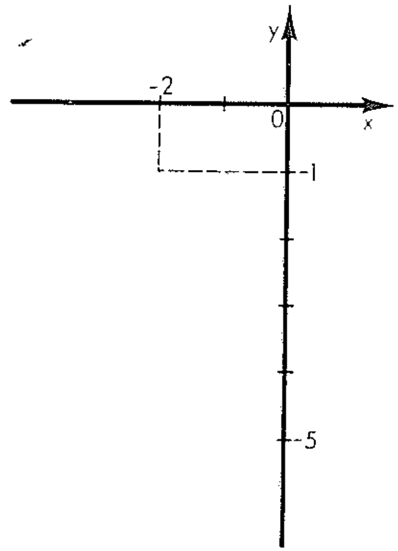
e) Das soluções encontradas, qual é a que proporciona menor inclinação no ponto P ?

PREÇO 1200$00

N.º DE CÓDIGO
32442

livro de texto

11º matemática



MARIA AUGUSTA FERREIRA NEVES
MARIA TERESA COUTINHO VIEIRA
ALFREDO GOMES ALVES

PORTO EDITORA

Num quadro vamos estudar o sinal da segunda derivada.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cap$	1 PI	$\cup$	1 PI	$\cap$

A concavidade está voltada para cima em $]-1, 1[$, voltada para baixo em $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ e são pontos de inflexão os pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$.

2. $g(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$

$$g'(x) = \frac{x+1-x+3}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$g''(x) = \frac{0\cdot(x+1)^2 - 2(x+1)\cdot 4}{(x+1)^4} = -\frac{8}{(x+1)^3}.$$

A segunda derivada não tem zeros, mas o seu denominador anula-se para $x = -1$. Teremos, então:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	s/s	$-$
$f(x)$	$\cup$	s/s	$\cap$

A concavidade está voltada para cima em $]-\infty, -1[$, para baixo em $]-1, +\infty[$ e não existem pontos de inflexão no gráfico.

15. 4. Problemas concretos

A teoria precedente aplica-se na resolução de questões concretas de Física, Geometria, etc., em que se procura a «melhor solução»: o custo mínimo, a maior capacidade, a máxima altura, etc.

Muitas vezes na resolução de problemas deste tipo pode proceder-se do seguinte modo:

1. determinar uma expressão da função cujos máximos ou mínimos se procuram;
2. utilizar os dados do problema para exprimir a função numa só variável;
3. calcular os extremos relativos da função.

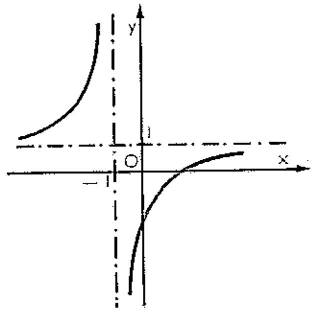
60. *Est[illegible] entido da concavidade e, se existirem, determine os pontos de inflexão dos gráficos das funções definidas em* $\mathbb{R}$ *por:*

60. 1. $h(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 1$;

60. 2. $j(x) = x^3 + 3x - 1$;

60. 3. $l(x) = \dfrac{x}{x+1}$;

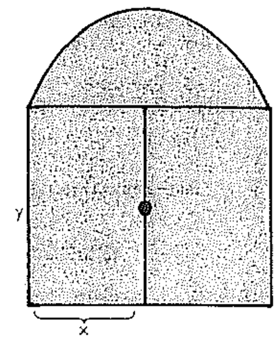
60. 4. $m(x) = \dfrac{3x^2-8}{x^2-4}$.



Aplicações:

1. Uma janela tem a forma que a gravura ao lado reproduz: um rectângulo coroado com um semicírculo. O perímetro da janela deve ser de 714 cm.

Calcule as dimensões que permitem uma maior entrada de luz.



Resolução:

1. Representemos por y a altura da janela e por x metade da largura, em centímetros.

Haverá uma maior entrada de luz se a área for máxima.

A área S da janela, em cm^2, será

$$S = 2x\cdot y + \frac{1}{2}\pi x^2. \qquad (1)$$

2. Como o perímetro da janela tem de ser igual a $714\ cm$, vem:

$$714 = 2x + 2y + \pi x.$$

Resolvendo em ordem a y e, substituindo em (1), vem sucessivamente

$$y = \frac{714 - 2x - \pi x}{2} \qquad (2)$$

$$S = x(714 - 2x - \pi x) + \frac{1}{2}\pi x^2$$

$$S = 714x - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2$$

$$S = 714x - 2x^2 - \frac{1}{2}\pi x^2.$$

3. Então,

$$S' = 714 - 4x - \pi x$$

$$S' = 0 \Leftrightarrow 714 - 4x - \pi x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{714}{4+\pi} = \frac{714}{7{,}14}$$

$$\Leftrightarrow x = 100\ cm.$$

61. *Pretende-se construir um cercado com a forma rectangular e com a área de $1200\ m^2$.*

61. 1. *Mostre que o perímetro do cercado é dado pela fórmula*

$$P = 2x + \frac{2400}{x},$$

em que x representa o comprimento, em metros, do cercado.

61. 2. *Calcule as dimensões do cercado de modo que o perímetro seja mínimo.*

62. *Entre os rectângulos de perímetro 40 dm, calcule as dimensões do que tem maior área.*

63. *Decomponha 20 num produto de dois factores cuja soma seja mínima.*

Para $x = 100\ cm$ a área é máxima. Com efeito:

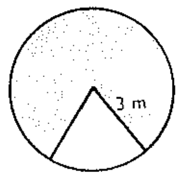
x	$-\infty$	100	$+\infty$
S'	$+$	0	$-$
S	↗	Máx.	↘

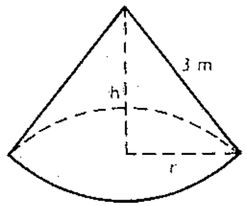
A altura calcula-se de (2)

$$y = \frac{714 - 2 \times 100 - 3{,}14 \times 100}{2}$$

$$y = 100\ cm\ .$$

VMB 2 **II.** Dispõe-se de um círculo de lona com $3\ m$ de raio. Cortando um sector circular pode construir-se uma tenda de campismo com a forma cónica. Para que a capacidade seja máxima, quais devem ser as dimensões da tenda (raio da base e altura)?





Resolução:

1. Representemos por r e h, respectivamente, o raio da base e a altura da tenda.
A tenda é em forma de cone cujo volume vem dado pela fórmula

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h\ .$$

2. Pelo teorema de Pitágoras

$$r^2 + h^2 = 9 \Leftrightarrow r^2 = 9 - h^2\ .$$

Substituindo na fórmula do volume

$$V = \frac{1}{3}\pi\,(9 - h^2)\cdot h$$

$$V = 3\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3\ .$$

3. Calculando os extremos relativos,

$$V' = 3\pi - \pi h^2$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow 3\pi - \pi h^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow h = -\sqrt{3}\ \vee\ h = \sqrt{3}\ .$$

VMA 8

64. *A soma de todas as arestas de um prisma recto de base quadrada é 72 cm.*

64. 1. *Se x é a medida da aresta da base, mostre que o volume do prisma é dado pela fórmula*

$$V = 18x^2 - 2x^3\ .$$

64. 2. *Calcule as dimensões do prisma de volume máximo.*

Como

h	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
V'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
V	↘		↗	↗	↗	Máx.	↘

o volume é máximo para $h = \sqrt{3}\ m$.

$$r^2 = 9 - 3 \Leftrightarrow r = \sqrt{6}\ m\ .$$

III. Um corpo é lançado verticalmente, debaixo para cima, com uma velocidade de $30\ m/s$. Sabe-se, da Física, que a fórmula que dá a altura atingida ao fim de t segundos é

$$h = 30\,t - \frac{1}{2}\,g t^2 \quad (g \text{ é a aceleração da gravidade}).$$

Supondo que esta aceleração da gravidade é de $10\ m/s^2$ no local da Terra onde o corpo foi lançado, calcular a altura máxima atingida pelo corpo e o tempo gasto nesse percurso.

Resolução:

1. A altura atingida ao fim de t segundos é

$$h = 30\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2\ .$$

2. Como $g = 10\ m/s^2$, vem:

$$h = 30\,t - 5\,t^2\ .$$

3. Calculando os extremos relativos

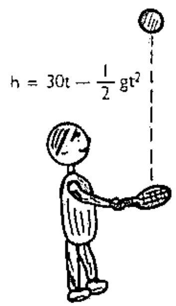
$$h' = 30 - 10\,t$$

$$h' = 0 \Leftrightarrow 30 - 10\,t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 3\,s\ .$$

VMA 9

65. *Pretende-se construir um reservatório cilíndrico com a capacidade de $6280\,m^3$. Quais devem ser as suas dimensões de forma que a sua área total seja mínima (menor custo)?*



66. *A altura atingida por um corpo, ao fim de t segundos, lançado verticalmente debaixo para cima, é dada pela fórmula*

$$h = pt^2 + qt\ .$$

Calcule p e q de modo que a altura máxima atingida ao fim de 2,5 segundos, seja 30 metros

67. *O potencial U de um campo de forças sobre uma recta é dado em cada ponto, como função da abcissa x, do seguinte modo:*

$$U(x) = \begin{cases} 4x - x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2 & \text{se } x < 0\ \vee\ x > 4 \end{cases}$$

Determine o ponto onde o potencial é máximo e o valor desse potencial.

Como

t	0	3	$+\infty$
h'	$+$	0	$-$
h	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Quando $t = 3$, $h = 30 \times 3 - 5 \times 9$

$h = 45$.

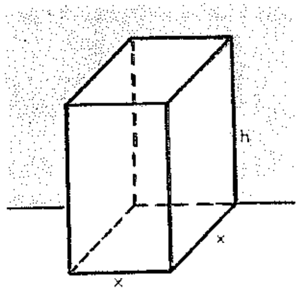
Então ao fim de $3\ s$ o corpo atinge a altura máxima de $45\ m$.

IV. Pretende-se construir, encostado a uma parede, um reservatório de base quadrada e com a capacidade de $294\ m^3$. Cada m^2 de face encostada à parede e da base fica por $1000\$00$ e cada m^2 das restantes faces fica por $2000\$00$.

1. Representando por x a medida, em metros, da aresta da base, mostrar que o custo é dado pela fórmula

$$C = 1000\left(3x^2 + \frac{2058}{x}\right).$$

2. Calcular as dimensões do reservatório de modo que o custo seja mínimo e esse custo mínimo.



Resolução:

1. A área da face encostada e a da base, em m^2, é

$$x^2 + xh$$

e o seu custo

$$C_1 = 1000\,(x^2 + xh).$$

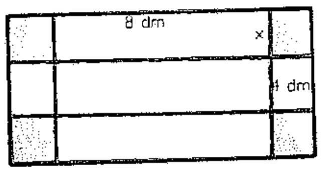
A área das restantes faces é

$$x^2 + 3xh$$

e o seu custo

$$C_2 = 2000\,(x^2 + 3xh).$$

68. *Com chapas de latão de 8 dm/4 dm, cortando em cada canto um quadrado e fazendo as dobragens convenientes, obtêm-se caixas sem tampa.*



Quanto deve medir o lado do quadrado, x, para que a capacidade seja máxima?

O custo total [illegible] tão

$$C = C_1 + C_2 = 1000\,(x^2 + xh) + 2000\,(x^2 + 3xh)$$

$$C = 3000\,x^2 + 7000 \times h \quad (1).$$

Atendendo a que o volume tem de ser $294\ m^3$, vem:

$$294 = x^2 h \iff h = \frac{294}{x^2}.$$

Substituindo em (1),

$$C = 3000\,x^2 + 7000\,x \cdot \frac{294}{x^2}$$

ou

$$C = 1000\left(3x^2 + 7 \cdot \frac{294}{x}\right)$$

$$C = 1000\left(3x^2 + \frac{2058}{x}\right)$$

c. q. m.

2. Basta calcular os mínimos relativos da função

$$C = 1000\left(3x^2 + \frac{2058}{x}\right).$$

Será

$$C' = 1000\left(6x - \frac{2058}{x^2}\right)$$

e

$$C' = 0 \iff 6x - \frac{2058}{x^2} = 0$$

$$\iff \frac{6x^3 - 2058}{x^2} = 0$$

$$\iff 6x^3 = 2058 \ \wedge\ x \neq 0$$

$$\iff x = \sqrt[3]{343} = 7\ m.$$

69. *Pretende-se construir uma caixa, sem tampa, em que a base seja um rectângulo de comprimento duplo da largura.*

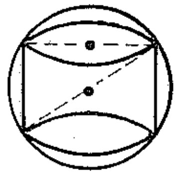
69. 1. *Prove que, se o volume é de $36\ dm^3$ a área total em dm^2 é dada pela fórmula*

$$A = \frac{108 + 2x^3}{x},$$

em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.

69. 2. *Calcule x de modo que a área seja mínima.*

70. *Entre os cilindros de revolução inscritos numa superfície esférica de raio 2 dm, calcule as dimensões do que tem maior volume.*



Como

x	0	7	$+\infty$
C'	$-$	0	$+$
C	$\searrow$	Min.	$\nearrow$

O custo será mínimo quando $x = 7\,m$ e $h = \frac{294}{49} = 6\,m$.

O custo mínimo é

$$C = 1000 \cdot \left(3 \times 7^2 + \frac{2058}{7}\right)$$

$$= 1000\,(147 + 294)$$

$$= 441\,000\$00.$$

V. Num mesmo referencial ortonormado consideraram-se o ponto $P(2,\ 3)$ e o gráfico da função

$$x \frown y = x^2 + \frac{5}{2}.$$

Definir, pelas suas coordenadas, o ponto do gráfico da função mais próximo do ponto P.

Resolução:

1. Representando o ponto pedido por $(x,\ y)$, a sua distância a P será

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}. \qquad (1)$$

2. Como o ponto pertence ao gráfico da função, tem-se

$$y = x^2 + \frac{5}{2}.$$

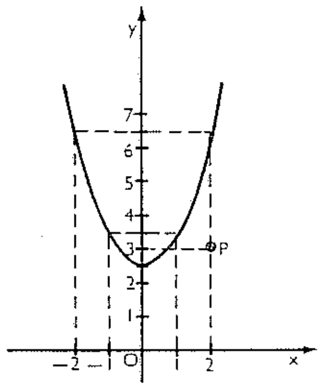
Substituindo em (1) vem

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + \left(x^2 + \frac{5}{2} - 3\right)^2}$$

$$d = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x^4 - x^2 + \frac{1}{4}}$$

ou

$$d = \sqrt{x^4 - 4x + \frac{17}{4}}.$$



71. *Quais as coordenadas do ponto da recta de equação*

$$2y + 3x = 4,$$

mais próximo do ponto $(3,\ 4)$?

72. *Entre as rectas que passam pelo ponto* $P(2,\ 1)$ *escreva a equação axial da que forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima.*

3. Esta distância ser mínima.

Então,

$$d' = \frac{4x^3 - 4}{2\sqrt{x^4 - 4x + \frac{17}{4}}}$$

e

$$d' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

Como

x	0	1	$+\infty$
d'	$-$	0	$+$
d	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Ora, para $x = 1$, vem $y = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$.

O ponto pedido é $\left(1,\ \frac{7}{2}\right)$.

73. *Defina sobre a recta* $y = x$ *um ponto tal que a soma dos quadrados das distâncias aos pontos*

$A\,(1,\ 0)$, $B\,(-1,\ 0)$ e $C\,(0,\ 6)$

seja mínima.

16. Assimptotas verticais e assimptotas horizontais

16.1. Assimptotas verticais

Consideremos a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{x}{x-2}.$$

O domínio desta função é $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Embora a função não esteja definida para $x = 2$, está definida à esquerda e à direita de 2, logo podemos estudar o comportamento de f quando x tende para 2.

Temos então:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

ANEXO 10

MANUAIS ESCOLARES DO 4º PERÍODO

A REFORMA DE ROBERTO CARNEIRO E LEI DE BASES DO SISTEMA EDUCATIVO DE 1986

XEQ MAT

MATEMÁTICA 10º

editorial o **LIVRO**

ISBN 972- 552- 276- 1

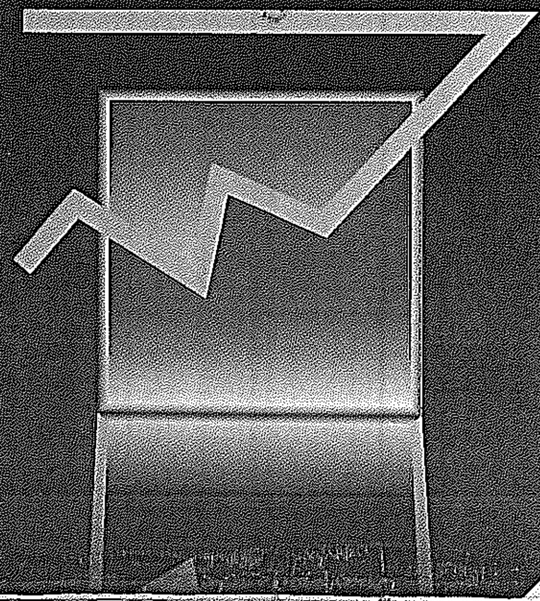
XEQ MAT MATEMÁTICA 10º

Yolanda Lima • Francelino Gomes

XEQ MAT

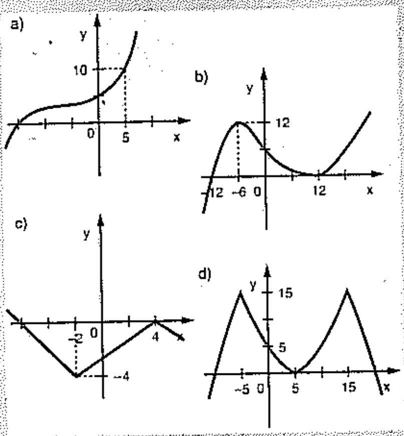
10º
MATEMÁTICA

EDITORIAL O LIVRO



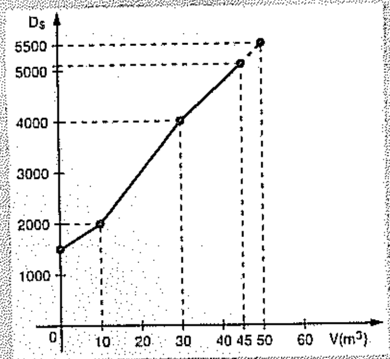
NOVOS PROGRAMAS

83. Observa os gráficos e indica em cada caso, intervalos de monotonia, extremos e zeros, supondo que o domínio é $\mathbb{R}$.



84. Função definida por troços:
O gráfico exprime a despesa em água duma família em função dos metros cúbicos consumidos, sendo a água paga assim:

Taxas fixas: 1500\$00; 1.º escalão 10m^3, 2.º escalão, de 10 a 30m^3; 3.º escalão, todo o resto.



a) Qual o p... ço do m^3 de água em cada escalão?

b) Quantos m^3 gastou esta família e qual a quantia total a pagar?

85. Uma população bacteriana aumenta 20% de hora a hora.
Em certo instante ($t = 0$) há 1000 bactérias por ml ($N = 1000$).
Representa a função N de t, desde $t = -4$ até 5 e avalia, observando o gráfico, o número de bactérias por ml ao fim de 3,5 horas.

Sugestão: N é multiplicado por 1,2 ao fim de cada hora.

86. Preço da conversação telefónica de cabine em certa rede:
Conversação inferior a 3m — 20\$00.
Ao fim de 3m a máquina «engole» mais 20\$00 e daí em diante «engole» 20\$00 de 2 em 2 minutos.

Representa graficamente a função
tempo ⇝ custo

87. Dadas as funções reais de variável real

$$h: x \rightsquigarrow \frac{8}{x+2} \qquad j: x \rightsquigarrow \sqrt{4 - x^2}$$

a) Estuda o domínio e a injectividade.

b) Quando x se aproxima de -2, o que acontece a $h(x)$?

88. Representa graficamente

$$x \rightsquigarrow x^2 - 4$$

e deduz do gráfico obtido qual será o da função

$$x \rightsquigarrow |x^2 - 4|.$$

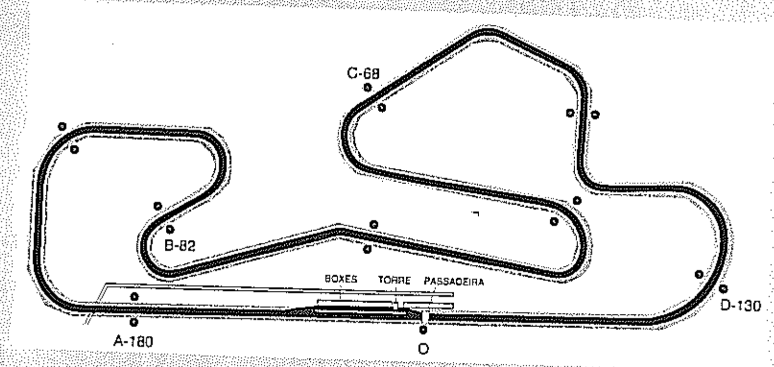
89. ACTIVIDADE (Trabalho de grupo, com relatório)

Neste circuito de 4,5 km (autódromo do Estoril), os pontos assinalados distam 500 m.

Um carro em prova dá a sua 1.ª volta sem avarias, partindo de O (0 km/h).

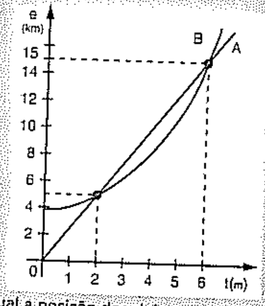
Atribui a cada ponto uma velocidade lógica, tendo em conta as medições feitas em A,B,C,D.

Esboça o gráfico da função $v = f(d)$ em que *d* é a distância percorrida, em km, e estuda a monotonia e extremos de f.



90. *A corrida*

Os gráficos representam o espaço percorrido pelo veículo A e pelo veículo B sobre o mesma trajectória, em função do tempo t.



a) Qual a posição dos dois veículos no instante 0?

b) O que aconteceu nos instantes 2 e 6?

c) Calcula a t. v.m (velocidade média) nos intervalos [2,4], [4,6] e [2,6] para o móvel A e depois para o B. Que concluis?

91. ACTIVIDADE (trabalho de grupo com relatório).

Com 100 m de rede temos de vedar 3 lados de um terreno rectangular à beira de um rio.

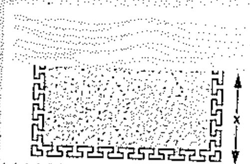
Exprime a área do terreno em função do lado **x**.

Estuda o domínio da função; esboça o gráfico.

Faz um estudo da função relativamente a zeros, monotonia, extremos, injectividade.

Conclui qual é a área máxima que se pode vedar com os 100 m de rede.

Ilustra o relatório com desenhos à escala de vários rectângulos possíveis.



MATEMÁTICA 10

Livro de Texto 2.º vol.

ANO
ESCOLARIDADE

Maria Augusta Ferreira Neves
Maria Luísa Carvalho Brito

PORTO EDITORA

Zeros

10. Determine os valores de m de modo que:

10.1 a função $f : x \mapsto x^2 + 6x + m^2 - 7$ tenha pelo menos um zero;

10.2 a função $g : x \mapsto x^2 + mx + 2m - 3$ não tenha zeros.

11. Mostre que, quaisquer que sejam p e q reais, a função

$$f : x \mapsto x\,(x - 2p) - q\,(x - p)$$

tem sempre zeros.

Enquadramentos

12. Seja a função:

$$f : x \mapsto x^2 - 2x\,.$$

12.1 Sabendo que $3 < x < 4$, enquadre $f(x)$ do seguinte modo:

- enquadre primeiro x^2, depois $-2x$ e, em seguida, adicione;
- enquadre x, depois $x - 2$ e, em seguida, multiplique.

12.2 Faça o gráfico da função e analise os resultados de **12.1.**

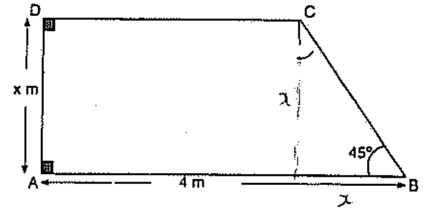
12.3 Para que valores de x a expressão $x\,(x - 2)$ tem valor mínimo? Justifique:

- observando o gráfico;
- calculando $f(1) - f(x)$.

12.4 Experimente, partindo de outras funções, estas duas formas de enquadramento.

Máximos e mínimos

13. A figura representa um jardim com a forma de um trapézio rectângulo.



13.1 Escreva $\overline{DC}$ em função de x. $4 - x$

13.2 Mostre que a área do trapézio em função de x é dada pela fórmula:

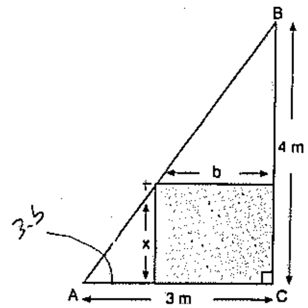
$$A = 4x - \frac{x^2}{2}\,.$$

$A = \frac{B+b}{2} \times h = \frac{4+4-x}{2} \times x = \frac{8x - x^2}{2} = 4x - \frac{x^2}{2}$

13.3 Calcule a altura x do trapézio de modo que a área seja inferior a $6\ m^2$.

13.4 Determine a área máxima do trapézio.

14. Pretende-se construir uma estante para colocar numa parede triangular de umas águas-furtadas, como se indica na figura.



$3 — 4$
$3 - b — x$
$3 - b = \frac{3x}{4}$
$b = 3 - \frac{3x}{4}$

14.1 Escreva b em função de x.

14.2 Mostre que a área da estante pode ser dada pela fórmula: $\left(3 - \frac{3x}{4}\right) \times x$

$$A = 3x - \frac{3}{4}x^2\,.$$

$= 3x - \frac{3}{4}x^2$

14.3 Para que valores de x é máxima a área?

XEQ MAT

ATEMÁTICA 11º

editorial o LIVRO

N 972-552-332-6

MATEMÁTICA 11º

Yolanda Lima • Francelino Gomes

XEQ MAT

11º
MATEMÁTICA

EDITORIAL O LIVRO

NOVOS PROGRAMAS

142. a) Mostra que

$h(x) = \frac{1}{1+x^2}$

é sempre positiva e tem um só extremo relativo.

b) Esboça o gráfico de $h(x)$.

143. Calcula os extremos locais das seguintes funções, usando a 1.ª derivada

a) $f(x) = x(x^2 - 4x - 3)$

b) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 8x + 16}$

c) $f(x) = (7 - x^2)\sqrt[3]{x}$

144. Calcula os extremos locais usando a derivada:

a) $g(x) = 24x + 45x^2 - 8x^3$

b) $h(x) = \frac{3}{x^2 - 9}$

$\boxed{4.}$ *Determina intervalos de monotonia e extremos da função definida por*

$y = x + \frac{4}{x}$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

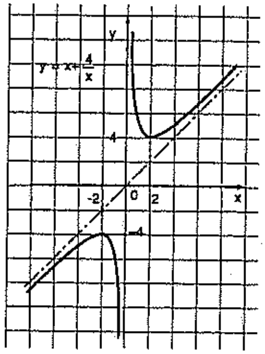
Resolução:

$y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$

Zeros da derivada, 2 e − 2.

Quadro de sinais da derivada:

$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
	+	0	−	X	−	0	+	
	↗	max.	↘	não def.	↘	min.	↗	
		$f(-2) = -4$				$f(2) = 4$		



Função crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[2, +\infty[$

Função decrescente em $[-2, 0[$ e em $]0,2]$

$\boxed{5.}$ *Estuda a monotonia e os extremos da função definida por*

$y = x^4 - 2x^2$ *em* $[-2,2]$.

Resolução:

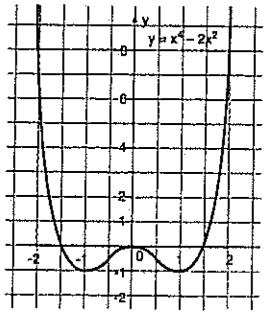
$y' = 4x^3 - 4x$ ou $y' = 4x(x^2 - 1)$

Zeros da derivada − 1, 0, 1.

Extremos do domínio − 2,2.

Quadro de sinais da derivada

-2		-1		0		1		2
	−	0	+	0	−	0	+	
	↘		↗		↘		↗	
M		m		M		m		M
$f(-2)=8$		$f(-1)=-1$		$f(0)=0$		$f(1)=-1$		$f(2)=8$



Crescente em $[-1,0]$ e em $[1,2]$. Decrescente em $[-2,-1]$ e em $[0,1]$.

$\boxed{6.}$ *A função* f *tal que* $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \leq 2 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

é crescente em $]-\infty, 2]$ *e em* $]2, +\infty[$,

mas não é crescente em $\mathbb{R}$. *Porquê?*

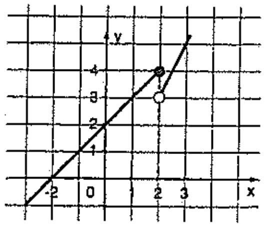
Resposta:

f não é crescente em qualquer intervalo que contenha o ponto de descontinuidade 2:

De facto $2{,}1 > 2$ mas $f(2{,}1) < f(2)$.

A função dá um «salto para baixo» no ponto 2.

O valor $f(2)$ é máximo relativo de f visto que $f'(2^-) = +1$ e $f'(2^+) = -\infty$



PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS
(OPTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES)

Neste subcapítulo temos vindo a mostrar como o estudo da derivada f' permite descobrir propriedades da função f.

A derivada é como que um «check-up» da função: as análises feitas à derivada revelam a evolução da função e suas «anomalias».

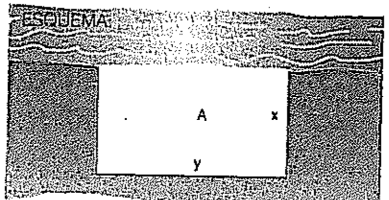
Esperamos agora que o aluno dê por justificado o tempo que investiu a praticar no cálculo de derivadas, especialmente depois de ver a sua utilização em problemas concretos de máximos e mínimos, uma das mais importantes aplicações da Análise Infinitesimal à Tecnologia e à Ciência.

Optimizar uma função significa procurar qual o seu melhor valor para certo fim, seja **minimizar** o custo de uma produção, seja **maximizar** o volume dum contentor...

LG11.1 **Exemplo 1.** A horta à beira do rio

O Sr. Joaquim pediu-nos ajuda:

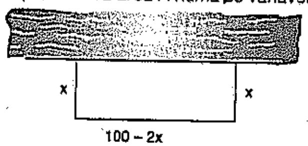
«Tem 100 metros de rede para vedar um terreno rectangular à beira do rio. Só quer vedar os 3 lados que não dão para o rio. Mas quer que a área da horta fique o maior possível...»



A – Função a maximizar: área do terreno

$A = y \cdot x$

B – Expressão da área A numa só variável:



O melhor é chamar x a um dos lados iguais. O outro será $100 - 2x$.

A área vem expressa em função de x: $a = (100 - 2x) \cdot x = 100x - 2x^2$

Encontrámos a função $f: x \mapsto A = 100x - 2x^2$ cujo domínio é definido pelas condições $x \geq 0$ e $100 - 2x \geq 0$: $D = [0,50]$

C – Procura dos extremos relativos da função recorrendo à derivada:

$A' = 100 - 4x$

145. De todos os triângulos rectângulos cujos catetos somam 50 cm, determina o que tem a área máxima. LG11.5

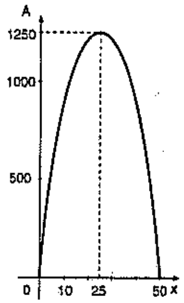
146. De entre os rectângulos com 60 dm² de área, descobre as dimensões do que tem perímetro mínimo. LG11.6

147. De entre os rectângulos com 80 m de perímetro, determina as dimensões do que tem área máxima. LG11.7

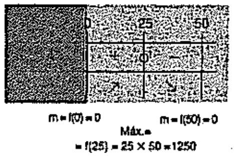
148. Calcula os números: LG11.8

a) Cuja soma é 30 e cujo produto é máximo.

b) Cuja diferença é 20 e cujo produto é máximo.



Quadro de sinais da derivada:

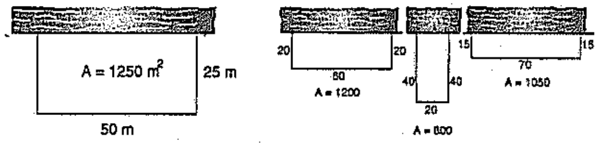


(ver gráfico à margem)

D – Interpretação dos resultados obtidos no contexto do problema.

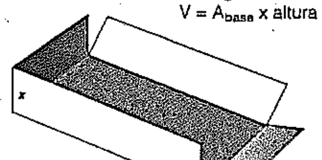
A função A(x) tem dois mínimos (área nula) e um só máximo que corresponde às dimensões 25 x 50, o que dá uma área de 1250 m^2.
Esta solução satisfaz o problema.

SOLUÇÃO ÓPTIMA — EXEMPLOS DE OUTRAS SOLUÇÕES



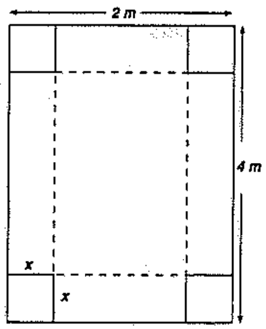
No caso geral a solução de um "problema" de máximos e mínimos passa pelas seguintes fases:
A: Procurar qual a função a optimizar.
B: Exprimir essa função numa só variável recorrendo aos dados do problema.
C: Derivar e calcular os extremos relativos da função encontrada.
D: Interpretar os resultados face à natureza do problema.

149. De um cartão quadrado com 1m² de área, tira-se uma quadrado a cada canto para fazer um caixote (sem tampa).
Determina qual deve ser o lado desses quadrados para que o volume do caixote seja o maior possível.



Exemplo 2. Um pequeno contentor.

Suprimindo um quadrado em cada canto de uma chapa metálica rectangular, de 2 por 4 metros, vai construir-se um contentor (sem tampa).
Determinar o lado do quadrado a suprimir de modo que o **volume** *do contentor seja o maior possível.*



Resolução:
A – Função a maximizar:
V, volume dum paralelepípedo rectângulo.
$V = A_{base} \times \text{altura}$

B – Expressão do volume numa só variável:

Sendo x o lado do quadrado a suprimir, é também x a altura da caixa.
A base da caixa (ver figura) ficará com as dimensões $4 - 2x$ e $2 - 2x$
logo $A_{base} = (4-2x) \cdot (2-2x)$ e $V = (4-2x)(2-2x)x$

Obtemos a função $x \mapsto V = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

cujo domínio é dado por $x > 0$ e $2 - 2x > 0$: $D =]0;1[$

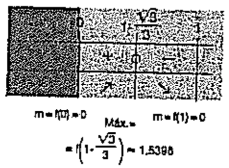
C – Derivada e pesquisa de extremos relativos:

$V'(x) = 12x^2 - 24x + 8 = 4(3x^2 - 6x + 2)$

Zeros da derivada : $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3}$

A derivada anula-se para $x = 1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ou seja, $x \approx 0{,}42$ ou $x \approx 1{,}58$

Quadro de sinais da derivada:

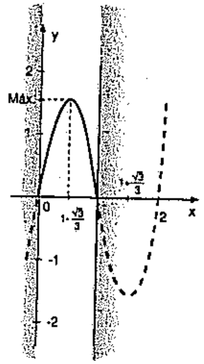


O valor 1,58 está fora do domínio desta função. (Ver gráfico da função à margem).

D – No domínio]0,1[esta função só tem um máximo relativo e absoluto, que é $V\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx V(0{,}42) = 1{,}5396$, em m^3.

O lado do quadrado a suprimir para obter este volume máximo é 0,42 m.

Restrição da função $x \mapsto 4x^3 - 12x^2 + 8x$ ao intervalo [0,1]:



150. Uma pistola dispara uma bala verticalmente de baixo para cima, à velocidade de 98 m\s. Sabendo que a lei do movimento é

$e = -4{,}9t^2 + 98t$ (m;s)

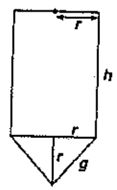
Calcula a altura máxima atingida pela bala.

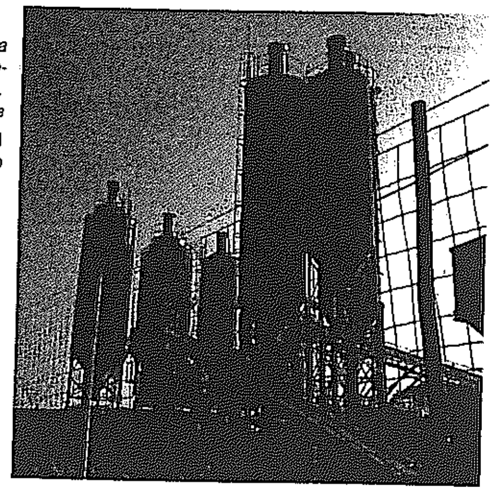
Exemplo 3. Silos para cimento.

Silos para conter cimento têm a forma de um cilindro de altura h e raio r sobreposto a um cone de altura e raio iguais a r.

Para silos com volume total de 100m³ determinar r de modo que a **área lateral** *seja o menor possível para minimizar o custo do silo.*

ESQUEMA:



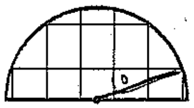


FÓRMULAS: $V_{\text{cil}} = \pi r^2 h$ $\quad V_{\text{cone}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 . r$

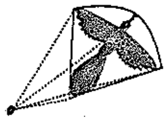
$Al_{\text{cil}} = 2\pi rh$ $\quad Al_{\text{cone}} = \pi rg$

LG 11.10 **151.** Considera os vários paralelepípedos de base quadrada cujas dimensões somam 1 metro.
Calcula a altura do que tem maior volume.

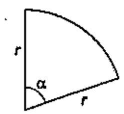
LG 11.11 **152.** Dos rectângulos inscritos num semi-círculo de raio 10 cm, determina a base do que tem maior área.



raio = 10 cm



LG 11.12 **153.** Uma fábrica de jogos produz «papagaios» de tecido muito fino esticado numa armação de alumínio com a forma de sector circular tendo 2 metros de perímetro total.
Determina, em radianos, o ângulo α do sector para que a resistência ao vento seja máxima (área máxima).



A – Função a minimizar:

A = Área lateral $= 2\pi rh + \pi rg$

B – Expressão da área lateral A em função de r, o que implica exprimir h e g em função de r:

Ora $\quad V = V_{cil} + V_{cone} = 100 \quad$ logo $\quad \pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^3 = 100$

Para questões com este nível de rigor é aceitável tomar $\frac{\pi}{3} \approx 1$,

donde $\quad \pi r^2 h + r^3 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{100 - r^3}{\pi r^2} \quad$ (logo $r \leq \sqrt[3]{100}$).

Quanto a g temos, pelos dados, $g^2 = 2r^2$ donde $g = r\sqrt{2}$.

Vem então:

$A = 2\pi r\,\frac{100 - r^3}{\pi r^2} + \pi r \,.\, r\sqrt{2}\,.$ Simplificando, temos a função de r:

$$\boxed{F: \quad r \smile A = \frac{200}{r} - 2r^2 + \pi\sqrt{2}\,r^2 \quad D:]0, \sqrt[3]{100}]}$$

C – Derivada e pesquisa de extremos:

$A'(r) = -\frac{200}{r^2} - 4r + 2\pi\sqrt{2}\,r \quad$ ou $\quad A'(r) = 4{,}89\,r - \frac{200}{r^2}$

Zeros da derivada: $\quad 4{,}89\,r^3 - 200 = 0 \qquad r \approx \sqrt[3]{\frac{200}{4{,}89}} \approx 3{,}45$

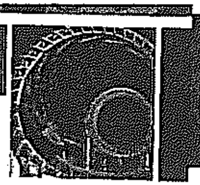
Quadro de sinais

	0		3,45		$\sqrt[3]{100}$
		–	0	+	
		↘		↗	M

≈A (3, 45)

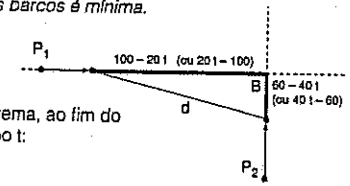
D – O valor 3,45 está no domínio da função e é adequado ao problema:

Resposta: A área lateral do silo será mínima quando o raio for 3,45 metros.

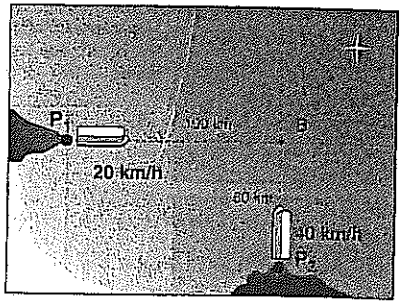


LG 11.A **Exemplo 4.** Os «ferry-boats».

Todas as manhãs, à mesma hora, sai um barco do porto P_1 para leste, a 20 km/h e outro do porto P_2 para norte, a 40 km/h. A bóia B, no cruzamento das rotas, dista 100 km de P_1 e 60 km de P_2.
Determina ao fim de quanto tempo a distância entre os barcos é mínima.



• Esquema, ao fim do tempo t:



A – Função a minimizar: d, distância entre os barcos.

B – Expressão em função de t, tempo decorrido desde a partida:

$$d = \sqrt{(100 - 20t)^2 + (60 - 40t)^2} \qquad (t > 0)$$

C – Derivada e extremos:

$$d' = \frac{-40\,(100 - 20t) - 80\,(60 - 40t)}{2\sqrt{(100 - 20t)^2 + (60 - 40t)^2}}$$

Zeros da derivada: $\quad 800t + 3200t - 4000 - 4800 = 0 \quad \Leftrightarrow$

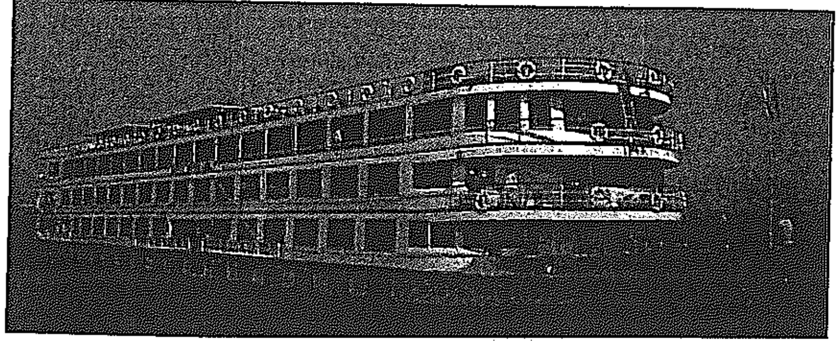
$\Leftrightarrow \quad t = \frac{8800}{4000} \quad \Leftrightarrow \quad t = 2{,}2$

Quadro de sinais da derivada:

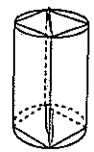
	0		2,2		→
		–	0	+	
		↘		↗	

Máx. d(0) mín. d(2,2)

D – A distância mínima é atingida ao fim de 2,2 h, ou seja de 2 h 12 m. Nesse momento o barco de P_1 ainda está longe da bóia B, ao passo que o barco de P_2 já ultrapassou a bóia em 28 km.



LG 11.13 **154.** Um prisma quadrangular regular está inscrito num cilindro. A secção desse cilindro por um plano contendo o eixo tem 30 cm de perímetro.
a) Exprime o volume do prisma em função do diâmetro x do cilindro.
b) Determina o domínio da função e o valor de x que torna o volume máximo.



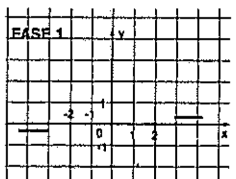
Exemplo 1. Estudo e representação gráfica de $f(x) = \frac{4x}{x^2+2}$

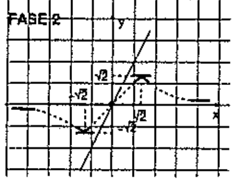
Domínio, continuidade, paridade, zeros:

f é uma função racional, sendo $x^2 + 2 > 0$, $\forall_{x \in R}$

Por isso, o domínio é $D_f = \mathbb{R}$ e f é função contínua em $\mathbb{R}$.

FASES SUCESSIVAS DO ESBOÇO DO GRÁFICO:





Como $f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2+2} = -\frac{4x}{x^2+2} = -f(x)$, $\forall_{x \in R}$

diz-se que f é função ímpar. O seu gráfico é simétrico em relação à origem dos eixos, o ponto (0,0).

Repara que $f(0) = 0$, logo (0,0) é ponto do gráfico.

Assimptotas:

Sendo definida e contínua em $\mathbb{R}$, não tem assimptotas verticais.

Tem assimptota horizontal porque $\lim\limits_{x \to +\infty \atop -\infty} \frac{4x}{x^2+2} = 0$. É $y = 0$.

Vemos que $x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{4x}{x^2+2} > 0$ logo a curva está acima da assimptota $y = 0$ para valores maiores que 0.

E $x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ logo a curva está abaixo da assimptota $y = 0$ quando $x < 0$.

1.ª Derivada, monotonia, extremos:

$$f'(x) = \frac{4(x^2+2) - 4x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-4x^2+8}{(x^2+2)^2} = \frac{-4(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \lor x = +\sqrt{2}$$

Quadro de sinais da 1.ª derivada:

	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
	$-$	0	$+$	0	$-$	
	↘		↗		↘	

mínimo $m = f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \approx -1{,}4$ Máx. $M = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \approx 1{,}4$

No ponto $x = 0$ temos $f'(0) = \frac{8}{4} = 2$ logo a equação da recta tangente ao gráfico, em (0,0) é $y = 2x$. (ver FASE 2, à margem).

2.ª Derivada, concavidades, inflexão:

$$f''(x) = \left[\frac{-4x^2+8}{(x^2+2)^2}\right]' = \frac{-8x\,(x^2+2)^2 - 4x\,(x^2+2)\,(-4x^2+8)}{(x^2+2)^4}$$

Simplificando (pôr (x^2+2) em evidência) e reduzindo os termos semelhantes obtemos:

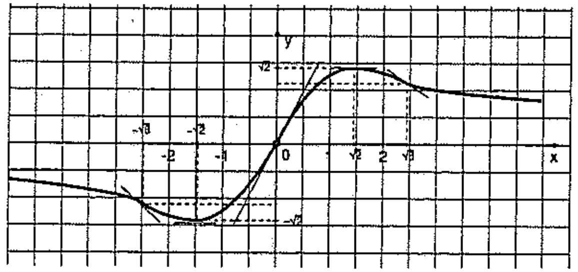
$$f''(x) = \frac{8x^3 - 48x}{(x^2+2)^3} = \frac{8x\,(x^2-6)}{(x^2+2)^3} \qquad \text{zeros de } f'': 0, -\sqrt{6}, +\sqrt{6}$$

Quadro de sinais de 2.ª derivada:

	$-\infty$	$-\sqrt{6}$		0		$+\sqrt{6}$		$+\infty$
	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
	∩	P.I.	∪	P.I.	∩	P.I.	∪	

$(-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{2}) \approx (-2{,}4; -1{,}2)$ (0,0) $(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}) \approx (2{,}4; 1{,}2)$

Representação gráfica de $x \mapsto f(x) = \frac{4x}{x^2+2}$ e contradomínio:



O gráfico indica que o contradomínio é $[-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$.

Exemplo 2. Estudo e representação gráfica da função

$$F: r \mapsto A = 2\pi r^2 + \frac{4}{r} \quad \text{em } \mathbb{R}^+$$

A área total de um gasómetro cilíndrico com capacidade de 2m^3 pode exprimir-se em função do raio r:

Como $V = \pi r^2 h$ vem $2 = \pi r^2 h$ donde $h = \frac{2}{\pi r^2}$ (em m)

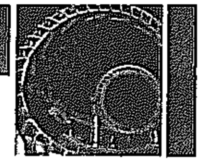
Então a área total é dada, em m^2, por:

$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{2}{\pi r^2}$, ou seja, $A = 2\pi r^2 + \frac{4}{r}$.

Domínio, continuidade, zeros:

No contexto do problema, a variável r pode tomar qualquer valor positivo; quanto maior for r, menor será a altura, para o volume se conservar constante. O domínio da função é, portanto, $\mathbb{R}^+$.

F é contínua, soma de duas funções contínuas, e não tem zeros em $\mathbb{R}^+$ (logo, a área nunca se pode anular).



161. Estuda zeros, assimptotas, monotonia, extremos, concavidades, pontos de inflexão, contradomínio e esboça o gráfico de

a) $f: t \mapsto \frac{1}{t-1}$

b) $g: v \mapsto \frac{v^2-1}{v-2}$

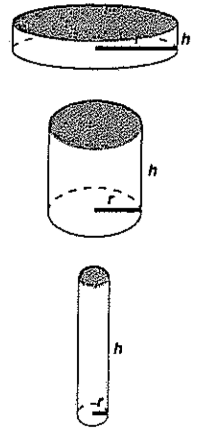
162. Esboça o gráfico de uma função f tal que:

a) (2, f(2)) é ponto de inflexão e $f'(2) = 0$;

b) $f(-1)$ é máximo mas f não tem limite em $x = -1$;

c) $f(\pi)$ é máximo, f é contínua em π mas tem derivadas laterais diferentes nesse ponto.

• Há muitos gasómetros cilíndricos diferentes com capacidade 2m^3:



192. Determina as dimensões do rectângulo,

a) com 100 cm^2 de área e cujo perímetro é o menor possível.

b) de maior área que se pode contornar com 1200m de rede.

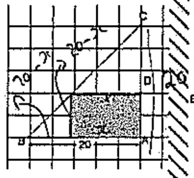
193. Um arame com 24 cm vai ser cortado em duas partes, uma para formar um quadrado e outra para definir um círculo.
Em que ponto deve ser cortado o arame para que a soma das áreas do quadrado e do círculo seja mínima?

194. Um trapézio tem três lados com 8 cm cada um.
Determina o comprimento do 4.º lado de forma que a área seja máxima.
Sugestão: Exprima a área em função de metade da diferença das bases.

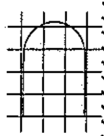
195. São dados, num referencial o.n. os pontos $A \smile (0,1)$, $B \smile (6,1)$ e $P \smile (x,0)$

Determina x de forma que $\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2$ seja mínima.

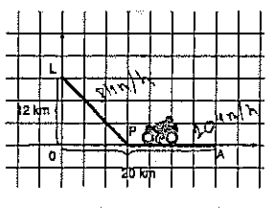
196. Na figura o rectângulo em cor está inscrito no triângulo rectângulo isósceles cujos catetos medem 20 cm.
Determina as dimensões do rectângulo de área máxima.



197. Uma janela com a forma de um rectângulo com um semicírculo em cima, tem de ter 4 metros de perímetro.
Determina as dimensões da janela que correspondam a um vão máximo (área máxima).

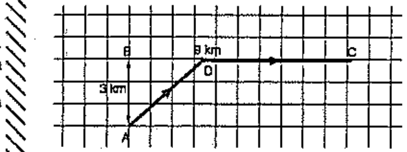


198. Um ciclista está na localidade L a 12 km do ponto 0 mais próximo de uma estrada, rectilínea e alcatroada, e pretende ir à aldeia A que dista 20 km de 0 sobre essa estrada.
O ciclista desloca-se a 10 km/h na estrada alcatroada e a 8 km/h fora da estrada.



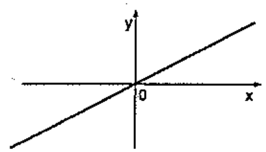
Determina o ponto P em que deve atingir a estrada alcatroada para fazer o percurso no menor tempo possível.

199. Uma pessoa está num barco A a 3 km do ponto B da praia, mais próximo de A, e tem de ir a outro ponto C da praia a 9 km de B.

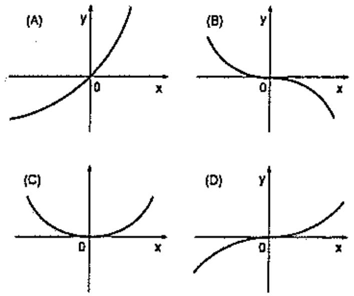


Se o barco se desloca à velocidade de 6 km/h e o tripulante pode correr à velocidade de 10 km/h como deve este proceder para chegar a C no mais curto tempo possível?

200. Supondo que o gráfico da função derivada f' é



então um gráfico de f pode ser



Prova Específica 1993 – Novo Programa
Época especial

201. Seja f uma função de variável real tal que

$$f(x) = x^3 - 2x - 2.$$

a) Prova que f tem pelo menos um zero em]1,2[.

b) Determina as coordenadas dos pontos em que a recta tangente ao gráfico de f tem inclinação de 45º e escreve equações cartesianas dessas rectas.

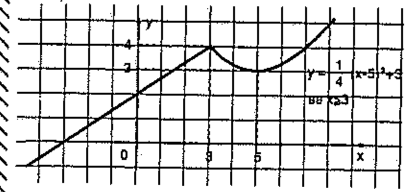
c) Indica os intervalos de monotonia e os extremos relativos de f.

d) Estuda o sentido das concavidades e determina as coordenadas do ponto de inflexão.

e) Esboça o gráfico desta função.

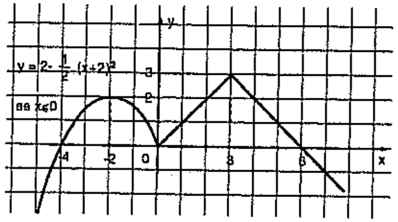
Exercícios e Actividades

202. A figura é um gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Responde às questões:

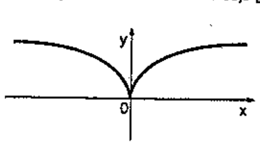


a) f é contínua em $\mathbb{R}$?
b) f terá derivada no ponto $x = 3$? Porquê?
c) Que podes afirmar quanto a intervalos de monotonia e a extremos da função?
d) Traça o gráfico da função derivada de f.

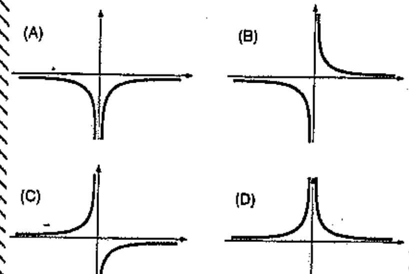
203. Observa o gráfico da função h e traça o gráfico de h'(x).



204. Seja f uma função real de variável real cujo gráfico é:



Então o gráfico da sua função derivada f' pode ser representado por



Prova Específica 1993 –
Época Normal

205. Esboça a parte do gráfico da função f, contínua à volta do ponto indicado, que satisfaz às condições

a) Se $x < 3$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$
Se $x > 3$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$; $f(3) = 2$

b) Se $x < a$ é $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$
Se $x > a$ é $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$; $f(a) = 2$

c) $f(a) = 2$, $f'(a) = \frac{1}{2}$, $f''(a) = 0$
Se $x < a$, $f''(x) < 0$; se $x > a$, $f''(x) > 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$
Se $x < 2$, $f''(x) > 0$; se $x > 2$, $f''(x) < 0$

206. Esboça o gráfico da função contínua f, de domínio [– 3, 7], sabendo que:

$f(-3) = 4$, $f(0) = 0$, $f(2) = 2$, $f(4) = 5$ e $f(7) = 3$

$f'(x) < 0$ se $x \in]-3, 0[\cup]5, 7[$
$f'(x) > 0$ se $x \in]0, 5[$

$f''(x) > 0$ se $-3 < x < 2$
$f''(x) < 0$ se $2 < x < 7$

207. Determina domínio, intervalos de monotonia, extremos locais, sentido de concavidade e assimptotas (caso existam) e esboça o gráfico de cada uma das funções F:

a) $f(x) = -x^2 + 4$

b) $f(x) = x^3 - 3x$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$

d) $f(x) = \frac{4x}{1 + x^2}$

e) $f(v) = \frac{v^2 - 1}{v^2 + 1}$

f) $f(t) = \frac{t}{t^2 - 1}$

g) $f(t) = \frac{t^2 - 4}{2t + 2}$

h) $f(i) = 1 - \frac{1}{i}$

i) $f(x) = |4 - x^2|$

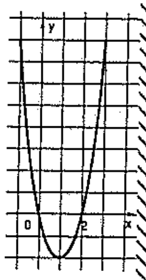
j) $f(u) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{u^2} & \text{se } u \neq 0 \\ 0 & \text{se } u = 0 \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{se } |x| \leq 3 \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} & \text{se } |x| > 3 \end{cases}$

208. Na figura está representado o gráfico C da função f', derivada da função f, de domínio $\mathbb{R}$.
1. Indique, justificando, os intervalos de monotonia de f e os valores de x para os quais a função tem extremos relativos

2. Proponha um gráfico para a função f, compatível com o gráfico de f' dado.



Prova de aferição, 1993.

Exemplo de aplicação

Procuremos os extremos relativos da função definida em IR por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \Leftarrow x < 3 \\ -x^2 + 10x - 24 & \Leftarrow x \geq 3 \end{cases}$$

Comecemos por averiguar se f é ou não contínua para $x = 3$.
Ora,

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = -3 \quad \text{logo} \quad \lim_{x \to 3} f(x) = -3$$

e, como $-3 = f(3)$,
conclui-se que f é contínua para $x = 3$.

Vamos agora definir f' (função derivada de f).

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} -2x + 2 & \Leftarrow x < 3 \\ -2x + 10 & \Leftarrow x > 3 \end{cases}$$

f'(3) não existe visto que
$f'(3^-) = -4$ e $f'(3^+) = 4$

Estamos agora em condições de construir o quadro de variação de f:

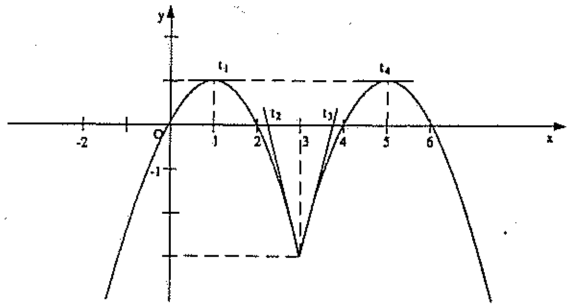
x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
f'		+	0	−	nd	+	0	−	
f		↗	1	↘	−3	↗	1	↘	

Como a função f é contínua para $x = 3$ e f' passa de negativa a positiva, conclui-se que f tem mínimo relativo igual a -3 para $x = 3$. [1]

Para $x = 1$ e para $x = 5$, a função tem máximos relativos, ambos iguais a 1 ($f(1) = 1$ e $f(5) = 1$).

Podemos ainda dizer, neste caso, atendendo ao quadro de variação da função e ao valor dos limites quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$, que o contradomínio de f é $]-\infty, 1]$ e que 1 é máximo absoluto da função.

O gráfico da função é o seguinte:



[1] Nota que seria possível chegar à mesma conclusão analisando o sinal das derivadas laterais de f no ponto $x = 3$.
Como $f'(3^-) < 0$ e $f'(3^+) > 0$, a função tem um mínimo relativo igual a f(3)

Repare no valor dos declives das tangentes t_1 e t_4 e no sinal dos declives das semi-tangentes t_2 e t_3.

Problemas de máximos e mínimos. Problemas de optimização.

O conceito de derivada intervém em diversas situações da vida real e o estudo da derivada de uma dada função assume grande importância em diversos ramos do conhecimento desde há cerca de dois séculos (ver pág. 330).

Por exemplo, como já vimos, a velocidade instantânea no instante t_0 é o limite da velocidade média quando t tende para t_0, isto é, $v = f'(t_0)$ sendo $e = f(t)$ a lei do movimento.

Também a aceleração de um móvel se define como a derivada da sua velocidade.

Sendo C(x) o custo de fabrico de uma quantidade x de um certo produto, o número real $\frac{C(x)}{x}$ chama-se, em Economia, *custo médio* de fabricação do produto, e quando a produção passa da quantidade x_0 à quantidade $x_0 + 1$, daí advém um custo suplementar denominado *custo marginal*.

Este custo é, portanto, dado pela diferença $C(x_0 + 1) - C(x_0)$ que se pode escrever da seguinte forma:

$$\frac{C(x_0 + 1) - C(x_0)}{(x_0 + 1) - x_0}$$

Em Economia, considera-se que o custo marginal coincide com a derivada de C em x_0, isto é, com $C'(x_0)$.

São muitos os problemas que, em diversas áreas, exigem a determinação de máximos ou mínimos de certas funções:
máximo rendimento, custo máximo, tempo máximo, área máxima, ...

Vamos, em seguida, ver como podem ser resolvidos alguns problemas deste tipo, tendo em conta que, de um modo geral, a sua resolução se desenvolve segundo as seguintes etapas:

- Definir uma função que sirva de modelo matemático à situação a estudar (se possível com uma só variável);
- Estudar a variação dessa função determinando, em particular, os seus extremos;
- Confrontar os resultados teóricos com o fenómeno real e com a situação concreta do problema.

Ana Elisa Estevos Santiago 11º 1D Nº2
E. S. A. Brabro telf. 405953

INFINITO 11
VOL.2

ANA MARIA BRITO JORGE
CONCEIÇÃO BARROSO ALVES
GRAZIELA FONSECA
JUDITE BARBEDO

MATEMÁTICA
11º ANO • ENSINO SECUNDÁRIO

AREAL EDITORES

Problemas

Economia no fabrico

Problema 1

Considere-se uma placa de cartão de forma quadrada com 1 m de lado.

Corta-se em cada canto um quadrado de lado x, com o fim de fazer uma caixa paralelipipédica sem tampa.

Qual o valor de x que torna o volume da caixa máximo? E qual é, então, esse volume?

Resolução

O volume da caixa assim construída é

$V(x) = x(1-2x)^2 = 4x^3 - 4x^2 + x \quad \text{com} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

Tem-se, portanto:

$V'(x) = 12x^2 - 8x + 1$

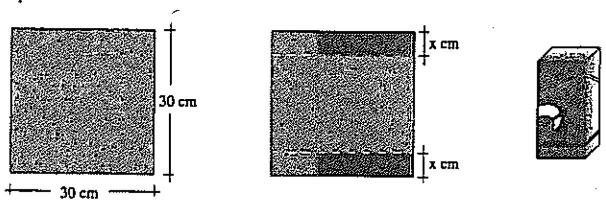
Os zeros de $V'(x)$ são $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{2}$ e o quadro de variação da função V é, então:

x	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$
V'(x)		+	0	–	0
V	0	↗	$\frac{2}{27}$	↘	0

O volume máximo será, aproximadamente, 74 dm³ para x = 0,167 m.

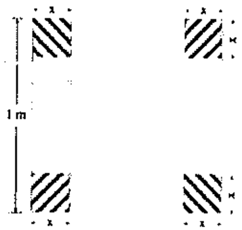
Problema 2

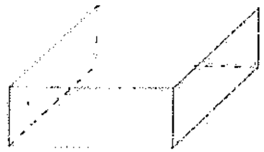
Uma empresa fabrica caixas em cartão cortando duas faixas da mesma largura numa folha quadrada.



A medida do lado da folha é 30 cm e designa-se por x a medida, em centímetros, da largura da faixa que se retira.

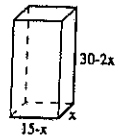
Determinemos o valor de x que torna o volume da caixa máximo e, seguidamente, calculemos esse volume.





recorde

A act. 2 (pág. 51)



Resolução

Designemos por V a função que nos dá o volume da caixa.

Vem

$V(x) = x(15-x) \cdot (30-2x) =$

$= 2x^3 - 60x^2 + 450x \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq 15$

visto que as dimensões da caixa são, em centímetros, x, $15-x$ e $30-2x$ e o volume de um paralelipípedo é dado pelo produto da área da base pela altura.

Teremos então que

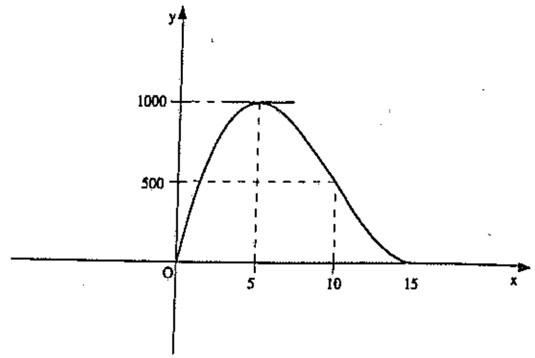
$V'(x) = 6x^2 - 120x + 450$

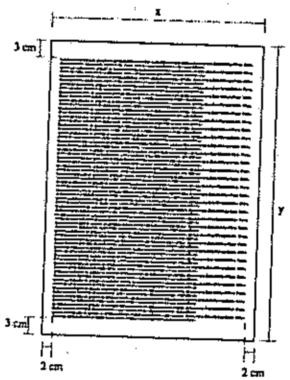
Os zeros de $V'(x)$ são 5 e 15 e o quadro de variação de V é:

x	0		5		15
V'(x)		+	0	–	
V	0	↗		↘	0

O volume será pois máximo para x = 5, e o valor do volume máximo é 1000 cm³.

Para confirmarmos os resultados encontrados, representemos graficamente a função $x \mapsto V(x)$ no intervalo [0, 15].





Problema 3

Um editor pretende conhecer as dimensões x e y (em centímetros) das folhas de um livro que pensa publicar, de modo a garantir que o consumo de papel seja mínimo e que sejam respeitadas as seguintes condições:

- cada página deverá ter margens laterais de 2 cm e margens de topo e de fundo de 3 cm.
- a área disponível para impressão deve ser, em cada página, 600 cm².

$(x-4)\cdot(y-6) = 600\ cm^2$

Resolução:

O consumo de papel será mínimo ser for mínima a área A da folha ($A = x \, . \, y$).

Comecemos por exprimir em função de x e de y a área da página disponível para a impressão e designemo-la por S.

Teremos então:

$S = (x - 4) \, . \, (y - 6)$

isto é

$S = xy - 6x - 4y + 24$

Como se pretende que essa área seja 600 cm², vem

$xy - 6x - 4y + 24 = 600$

o que nos permite exprimir y em função de x.

Assim, como

$y\,(x - 4) = 576 + 6x$

vem, para $x \neq 4$,

$$y = \frac{576 + 6x}{x - 4}$$

Substituindo em

$A = x \, . \, y$

temos

$$A(x) = x \cdot \frac{576 + 6x}{x - 4}$$

$$A(x) = \frac{6x^2 + 576x}{x - 4}$$

Agora, que exprimimos a área de cada folha em função de uma só variável resta-nos procurar o mínimo de A(x).

Ora,

$$A'(x) = \frac{6x^2 - 48x - 2304}{(x - 4)^2}$$

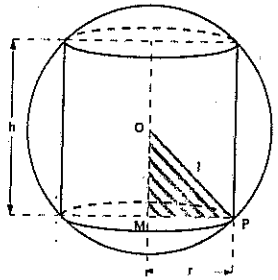
e os zeros de A'(x) são 24 e –16 (que por ser negativo não tem interesse para o problema).

Construamos o quadro da variação da função no intervalo $]\,4, +\infty\,[$.

x	4		24		+∞
A'(x)		–	0	+	
A(x)		↘	864	↗	

Então, para x = 24, a área é mínima, sendo 864 cm² o seu valor.

Como para x = 24 vem y = 36, as dimensões da folha devem ser 24 e 36 cm.



Problema 4

O maior cilindro inscrito numa esfera

Consideremos uma esfera de raio 1 dm e um cilindo de altura **h** e raio da base **r** inscrito na esfera (as suas duas bases são círculos da esfera).

Qual o valor de h para o qual o volume do cilindro é máximo?

E qual é o valor desse volume?

Resolução

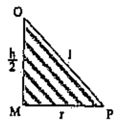
A função cujo máximo queremos determinar é definida por

$V = \pi r^2 h$, onde V representa o volume do cilindro e πr^2, a área da base do cilindro.

Procuremos exprimir V à custa unicamente da variável **h**.

Para isso é necessário exprimir **r** em função de **h**.

Observemos o triângulo rectângulo [OMP] que aparece tracejado na figura.



Por aplicação do teorema de Pitágoras, temos:

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = 1 \qquad \text{donde} \qquad r^2 = 1 - \frac{h^2}{4}$$

Substituindo r^2 na expressão do volume do cilindro, obtém-se

$$V(h) = \pi\left(1 - \frac{h^2}{4}\right) . \, h$$

ou seja,

$$V(h) = \pi h - \frac{\pi h^3}{4}$$

Procuremos agora o valor de **h** para o qual é máximo o volume V.

Para isso teremos de determinar a função derivada de V e os seus zeros.

$$V'(h) = \pi - \frac{3}{4}\pi h^2$$

e

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow \pi - \frac{3}{4}\pi h^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{pois } 0 < h < 2$$

Como o quadro de variação de V no intervalo] 0, 2 [é:

h	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		2
V'(h)		+	0	–	
V		↗		↘	

Podemos concluir que, para $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ dm, o volume do cilindro é máximo e o seu valor é

$$V_{máximo} = V\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \pi\left(1 - \frac{\frac{4}{3}}{4}\right) \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2{,}4 \text{ dm}^3$$

Problema 5

Economia e Gestão

Um gestor de uma empresa concluiu que o custo de fabrico C (em milhares de contos) varia em função da quantidade **x** produzida (em milhares de peças) segundo a seguinte expressão:

$C(x) = 2x^3 - x^2 + 4x$

Nota que:
$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$

1. Qual é a quantidade x_0 que torna mínimo o custo médio C_M? $\frac{2x^3-x^2+4x}{x} = 2x^2-x+4$

$= 4x-1$
$4x-1=0$
$4x=1$
$x=\frac{1}{4}=0{,}25$

2. Defina a função **custo marginal** (ou seja C').

3. Verifique que, para a produção x_0 (a que minimiza o custo médio), o custo médio é igual ao custo marginal, ou seja,

$$\frac{C(x_0)}{x_0} = C'(x_0)$$

Resolução:

1. $C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = 2x^2 - x + 4$

Determinemos a função derivada e os seus zeros

$C'_M(x) = 4x - 1$

$C'_M(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 0{,}25$ milhares de peças

x		0,25	
$C'_M(x)$	–	0	+
C_M	↘		↗

Portanto, o valor que torna mínimo o custo médio é $x_0 = 0{,}25$ (milhares de peças)

2. O custo marginal é dado por $2x^3 - x^2 + 4x$
$C'(x) = 6x^2 - 2x + 4$ $6x^2 - 2x + 4$

3. Vejamos se é verdadeira a igualdade

$$\frac{C(0{,}25)}{0{,}25} = C'(0{,}25)$$

$$\frac{2 \times 0{,}25^3 - 0{,}25^2 + 4 \times 0{,}25}{0{,}25} = 6 \times 0{,}25^2 - 2 \times 0{,}25 + 4$$

$3{,}857 = 3{,}875$

o que confirma que, para a produção de 0,25 milhares de peças, o custo médio é igual ao custo marginal (sendo o seu valor de 3875 contos).

Estudo analítico de funções

A resolução dos problemas que acabámos de tratar assentou, como vimos, no estudo de **restrições de certas funções**.

É claro que, tendo feito previamente o estudo da função em todo o seu domínio de definição, bastaria depois procurar a resposta ao problema tendo em conta as condições concretas em que ele é enunciado.

Nota que:
O estudo de algumas funções feito no cap. 2, assente numa forte componente intuitiva bem como na construção de gráficos ponto por ponto é agora consolidado e ampliado com o recurso ao estudo analítico das funções

O estudo de uma função reveste-se de grande importância em muitas situações, como aliás já temos vindo a constatar.

Todos os conhecimentos adquiridos ao longo deste capítulo constituem um *conjunto de instrumentos* essenciais para o estudo de uma função, que passa, em geral, por determinar:

- o domínio
- as equações das assímptotas, se existirem
- a paridade (saber se função é par ou é ímpar permite reduzir o intervalo do estudo)
- a função derivada
- os intervalos de monotonia e o quadro de variação
- a representação gráfica da função tendo em conta os pontos de intersecção com os eixos coordenados e as assímptotas, caso existam (o recurso a imagens de outros pontos pode ajudar a precisar melhor o gráfico)

39 ESTUDO DE FUNÇÕES

1. Estude o sentido de variação da função

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 1$$

f é par
ñ injectiva pq, e objectos simétricos
têm correspondentes imagens iguais

2. Trace a curva representativa de f.

40 Estude no intervalo [−8, 8], a função

$$f : x \mapsto \frac{1}{9}x^3 - 3x + 5$$

e trace o seu gráfico.
Sobre o mesmo referencial represente seguidamente a função $x \mapsto |f(x)|$

41 Considere a função definida em IR

$$x \mapsto x - 1 + \frac{8}{x^2+3}$$

1. Determine $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
2. Mostre que para todo o $x \in$ IR

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x^2+2x+9)}{(x^2+3)^2}$$

3. Trace o quadro de variação de f.
4. Prove que a recta de equação $y = x - 1$ é assímptota oblíqua do gráfico de f.
5. Esboce o gráfico de f.

42 Estude e esboce o gráfico das funções:

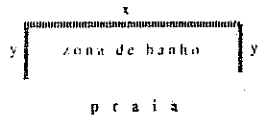
1. $f : x \mapsto \frac{1}{5}(x^2 - 9)(x^2 + 1)$
2. $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$
3. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
4. $f : x \mapsto \frac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2}$
5. $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{2x}$

43 Seja f a função definida em IR \ {1} por $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

1. Estude a variação de f e trace o seu gráfico.
2. Seja g a função definida por $g(x) = |f(x)|$.
Como pode obter o gráfico de g à custa do de f?
3. Com a ajuda do gráfico, estude a variação de g.
4. Considere a função $h(x) = f(|x|)$. Trace o gráfico de h a partir do de f.

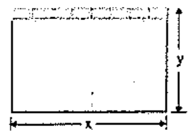
PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

44 Pretende-se vedar com uma fita de flutuadores uma zona rectangular com 200 m² de área, para o banho das crianças, como mostra a figura.

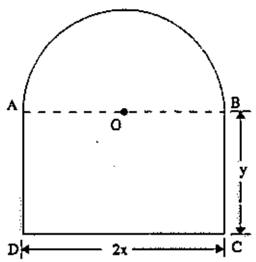


Se cada metro da fita de flutuadores custar 2 000$00, qual deverá ser o valor de x e de y para que o gasto na compra seja mínimo?

45 Um agricultor dispõe de 20 000$00 para vedar parte de um terreno rectangular.
A vedação deve ser feita do seguinte modo: um dos lados de tijolo e rede nos três lados restantes, conforme ilustra a figura:

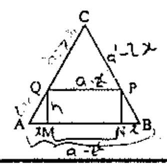


Cada metro de rede custa 200$00 e cada metro de parede em tijolo fica por 600$00.
Qual é a área máxima que se consegue vedar?



46 Uma janela é formada por um rectângulo [ABCD] e por um semi-círculo de diâmetro [AB].
Seja x o raio do semi-círculo e y a distância $\overline{BC}$ expressa em metros.
O perímetro da janela é igual a 5 metros.
Pretende-se encontrar as dimensões da janela a fim de que a abertura tenha uma área máxima.

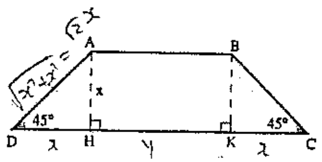
1. Exprima o perímetro da janela em função de x e de y.
2. Retire da expressão o valor de y em função de x.
3. Para que valores de x se tem $y > 0$?
4. Exprima a área da janela em função de x e de y.
5. Utilizando os resultados das questões anteriores, mostre que a área se pode escrever na forma
$A(x) = 5x - \frac{4+\pi}{2}x^2$
6. Deduza para que valores de x e de y a área da janela é máxima.
Encontre o valor exacto dessa área e em seguida um valor aproximado a menos de 10^{-2}.



47 Considere o triângulo equilátero [ABC] de lado a.
Inscreve-se neste triângulo um rectângulo [MNPQ].
Faça-se $\overline{AM} = x$
Para que valor de x a área do rectângulo é máxima?

48 Que dimensões, com aproximação a 0,1mm, deve ter uma caixa de conservas cilíndrica fechada, com a capacidade de 1 l, para que no seu fabrico se gaste o mínimo de material? (A espessura do material de que é feita a caixa não é de considerar).
Compare a altura com o diâmetro da caixa.

49 [ABCD] é um trapézio isósceles de área $5\sqrt{2}\ \text{cm}^2$
Os ângulos agudos medem 45°.
Seja x (em cm) a altura do trapézio e P(x) o seu perímetro (em cm).



1. Exprima $\overline{DH}$ e $\overline{CK}$ em função de x.

2. Exprima $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ em função de x.

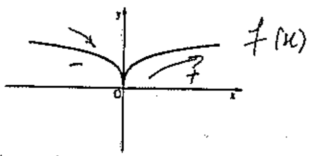
3. Utilize a área do trapézio para exprimir $\overline{AB}$ em função de x.

4. Mostre que $P(x) = 2\sqrt{2}\,x + \dfrac{10\sqrt{2}}{x}$

5. Encontre o valor de x para o qual o perímetro do trapézio é mínimo.
Qual é então a medida dos lados do trapézio? Interprete graficamente.

50 Seja f uma função de variável real cujo gráfico é:

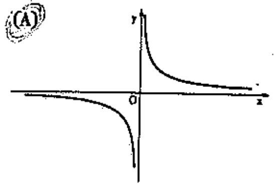
OUTROS PROBLEMAS



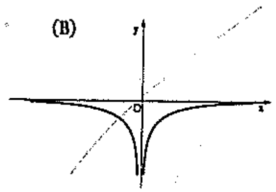
f(x)

Então o gráfico da sua função derivada pode ser representado por:

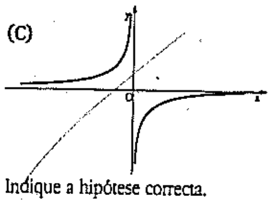
(A)



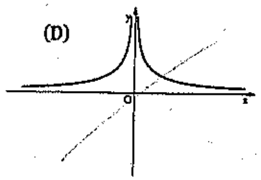
(B)



(C)



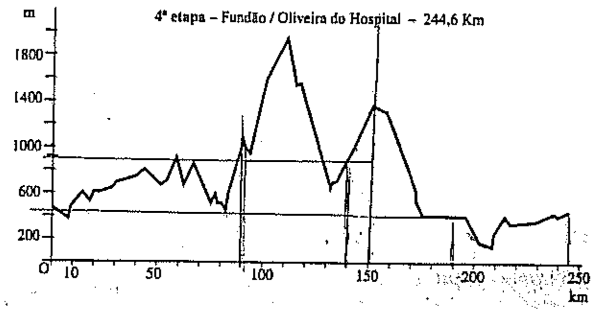
(D)



Indique a hipótese correcta.

Prova Específica de Matemática – Época normal – 1993

51 O gráfico seguinte representa a evolução das altitudes ao longo do percurso de uma etapa da Volta a Portugal em Bicicleta (etapa Fundão – Oliveira do Hospital).



Pode dizer-se que
(A) a taxa média de variação no intervalo [90, 150] é negativa.
(B) a taxa média de variação no intervalo [140, 190] é positiva.
(C) a taxa de variação no ponto de abcissa 150 é negativa.
(D) a taxa de variação no ponto de abcissa 200 é negativa.

Indique a hipótese correcta.

Prova Específica de Matemática – Época normal – 1993

52 Em Física e Engenharia Electrotécnica é comum encontrar algumas funções descontínuas.
Uma delas é a **função de Heaviside:**

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Outra é a **função rectângulo:**

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } |x| = \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{se } |x| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

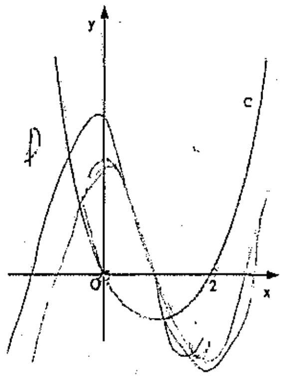
1. Esboce os gráficos destas duas funções (não é preciso fazer um estudo exaustivo; limite-se a traçar o gráfico).
2. Prove que

$$\Pi(x) = H\left(x + \frac{1}{2}\right) - H\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

3. A *função rampa* é definida por $R(x) = x\,H(x)$
Esboce o gráfico da função rampa (não é preciso fazer um estudo exaustivo; limite-se a traçar o gráfico).
4. Averigue se existe R'(0).
5. Considere a função H_n definida por
$H_n(x) = n.H(x)$, com $n \in \mathbb{N}$. Investigue se o teorema de Bolzano se pode aplicar às funções H, H_n e R no intervalo [– 4, 5].

Prova Específica de Matemática – Época normal – 1993

57 Na figura está representado o gráfico C da função f', derivada da função f, de domínio IR.



1. Indique, justificando, os intervalos de monotonia de **f** e os valores de x para os quais a função tem extremos relativos.

2. Proponha um gráfico para a função f, compatível com o gráfico de **f'**, dado.

3. Supondo que
$f(x) = x^2(x-a) + bx$, com **a**, **b** ∈ IR,

determine **a** e **b** servindo-se dos valores assinalados na figura.

Prova de Aferição de Matemática
– Época normal – 1993

58 Numa fábrica, o custo total da produção mensal de **q** centenas de peças, expresso em milhares de escudos, é dado por

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 21q + 1000$$

1. Determine a função **C' (q)**, custo marginal, e calcule o seu valor para 6 centenas de peças.

2. Estude a variação do custo total, no intervalo] 0, 8 [. Qual o número de peças que aconselha ao fabricante para que o custo total seja mínimo.

Prova de Aferição de Matemática
– Época normal – 1993

59 De uma função **f** de domínio D = IR \ {−1}, contínua em D, sabe-se que:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -5 \ ; \ \lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \ ; \ \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \ \text{ e } \ \lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$$

x	−∞	−2		−1		3		7	+∞
Sinal de f'(x)	−	0	+		+	0	+	0	−
Variação de f(x)	↘	−4	↗		↗	−2	↗	6	↘

1. Quais as coordenadas dos pontos em que **f** tem extremos? Classifique esses extremos.

2. Proponha um gráfico para a função **f**.

3. Escreva equações das rectas tangentes ao gráfico **f** que o quadro de variação lhe permita conhecer.

Prova de Aferição de Matemática
– Época normal – 1993

60 Considere a função f : IR ⟶ IR definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} & \Leftarrow x > 2 \\ x + \dfrac{1}{4} & \Leftarrow x \le 2 \end{cases}$$

1. Indique o seu domínio. IR

2. Estude a continuidade de **f** no ponto x = 2.

3. Calcule o valor de f'(3). $\frac{3}{25}$

Prova de Aferição de Matemática C
1993

61 Considere a função de variável real g tal que

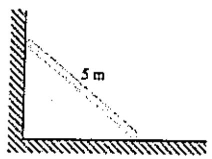
$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 6}$$

1. Escreva as equações das assimptotas do gráfico de **g**.

2. Estude a variação e os extremos de **g**.

idem

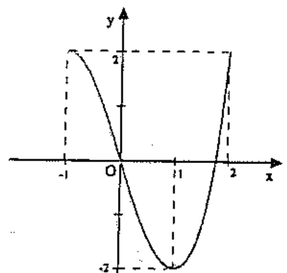
62 Num canto de um terreno murado pretende-se delimitar com uma trave de madeira a maior área de terreno possível.



Sabendo que a trave mede 5 metros, em que posição deverá ser colocada?

idem

63 Na figura está representado o gráfico da função real de variável real f, definida em [−1, 2].



1. Baseando-se no gráfico determine
f(0), f(1) e f'(1)

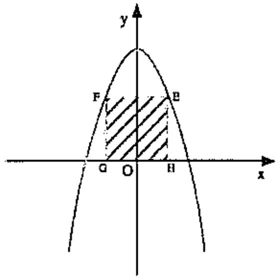
2. Determine graficamente o conjunto-solução de cada uma das condições:
$f(x) = 0$ e $f(x) \cdot f'(x) > 0$

3. Supondo que f(x) é da forma
$f(x) = ax^3 + bx + c$, com a, b, c ∈ IR determine os valores de a, b e c.

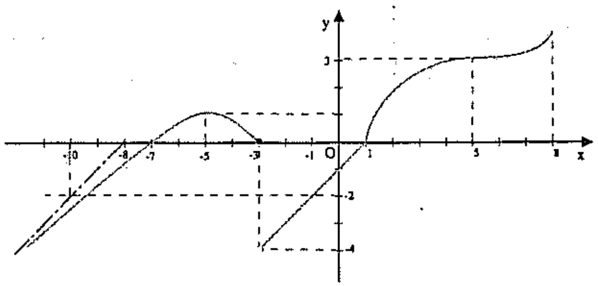
Prova de exame E.S. Filipa de Vilhena, 1993

64 Considere a parábola definida por $y = -x^2 + 9$.
Supondo que a unidade adoptada é o cm, determine as dimensões do rectângulo [EFGH] de área máxima sabendo que **E** e **F** são pontos da parábola e **G** e **H** são pontos do eixo das abcissas.

Prova de exame E.S. Filipa de Vilhena, 1993



65 Considere a função real de variável real, de domínio $]-\infty, 8]$, representada graficamente na figura.



1. Indique as soluções das seguintes condições:
a) $f(x) \geq 0$ b) $f'(x) \geq 0$ c) $f''(x) \leq 0$
$[-4, -3] \cup [1, 3]$

2. Indique, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa:
"O domínio da função derivada de f, é o conjunto dos pontos em que a função f é contínua".

3. O gráfico de f admite uma assímptota oblíqua.
Escreva uma equação dessa assímptota.

$y = mx + b$

Prova de exame E.S. Filipa de Vilhena, 1993

66 De uma função f de domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, contínua em D, sabe-se que:

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -3$ $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

x	$-\infty$	-1		2		4		8	$+\infty$
sinal de $f'(x)$	−	0	+		+	0	+	0	−
variação de f		-3				1		4	

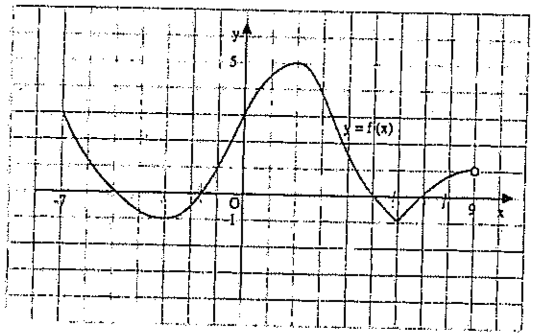
1. Quais as coordendas dos pontos em que f tem extremos relativos? Classifique esses extremos.

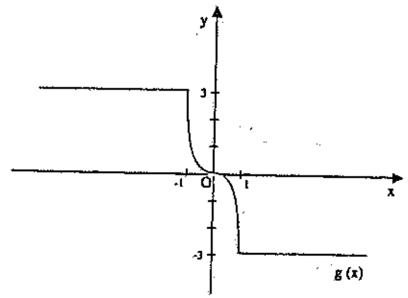
2. Proponha um gráfico para a função f.

3. Escreva equações das rectas tangentes ao gráfico de f que o quadro de variação lhe permita conhecer.

Prova de exame E.S. Filipa de Vilhena, 1993

67 Observe os seguintes gráficos, de duas funções reais de variável real:





1. Indique:
– o domínio de f; $D_f = [-7, 9[$
– o contradomínio de f e de g; $CD_f = [-1, 5]$ $CD_g = [-3, 3]$
– os zeros de f
Zeros = $\{-5, -3/2, 5, 7\}$

2. Construa o quadro de variação da função f e indique os extremos, caso existam.

3. Represente graficamente a função
$h : x \mapsto |g(x)| + 1$

Prova de exame E.S. Filipa de Vilhena, 1993

FICHA TÉCNICA

TÍTULO: [illegible]
AUTORAS: MARIA AUGUSTA FERREIRA NEVES
MARIA LUÍSA CARVALHO BRITO
CAPA: ÂNGELA MELO
ILUSTRAÇÕES: ÂNGELA MELO
ILUSTRAÇÃO DA CAPA: KASIMIR MALEVICH
DESIGN GRÁFICO: GIL MAIA
EDITOR: PORTO EDITORA

PORTO EDITORA LDA.

[illegible]

LIVRARIAS:
[illegible] – TELEF. [illegible]
[illegible] – 4000 PORTO – TELEF. [illegible]

LIVRARIAS DO PROFESSOR:
[illegible] – TELEF. (02)2015502
[illegible] – 1700 LISBOA – TELEF. (01)805338

DISTRIBUIDORES

ZONA CENTRO

LIV. ARNADO, LDA.

[illegible] – COIMBRA CODEX
[illegible]

LIVRARIA
[illegible] – COIMBRA – TELEF. (039)33528

ZONA SUL

EMP. LITERÁRIA FLUMINENSE, LDA.

[illegible] – 1700 LISBOA
[illegible]

LIVRARIAS:
[illegible] – LISBOA [illegible]
[illegible] – LISBOA [illegible]

[illegible]

MATEMÁTICA

LIVRO DE TEXTO

11.º ano
2.º volume

Maria Augusta Ferreira Neves
Maria Luísa Carvalho Brito

PORTO EDITORA

Assimptotas não verticais

$$y = mx + b \;;\; m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

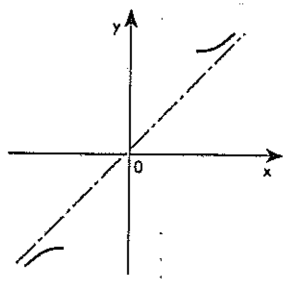
$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] .$$

Se $x \longrightarrow +\infty$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[x + \frac{1}{x} - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 .$$

Se $x \longrightarrow -\infty$ obteríamos os mesmos valores.
A recta $y = x$ é assimptota não vertical bilateral.



$$x + \frac{1}{x} - x = \frac{1}{x}$$

Se $x \longrightarrow +\infty$, o gráfico de f está «acima» da recta $y = x$.
Se $x \longrightarrow -\infty$, o gráfico de f está «abaixo» da recta $y = x$.

- **Intervalos de monotonia e extremos**

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} .$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x^2-1	+	0	−	−	−	0	+
x^2	+	+	+	0	+	+	+
f'(x)	+	0	−	s.s	−	0	+
f(x)	↗	−2	↘	s.s	↘	2	↗

$$f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

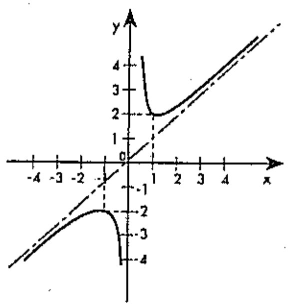
- **Sentido das concavidades**

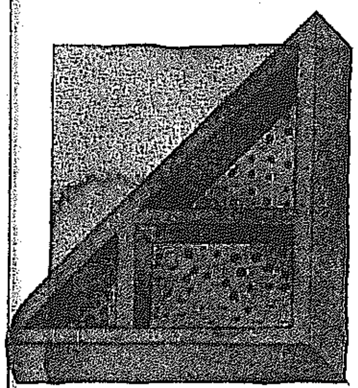
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{-2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} .$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''(x)	−	s.s	+
f(x)	∩	s.s	∪

A curva não tem pontos de inflexão.
O gráfico da função f está representado ao lado.





6.5 Problemas de optimização

O estudo das derivadas permitiu determinar com rigor os máximos e os mínimos de funções.

Na vida real é muito importante determinar o custo mínimo, o volume máximo, a área máxima, etc.

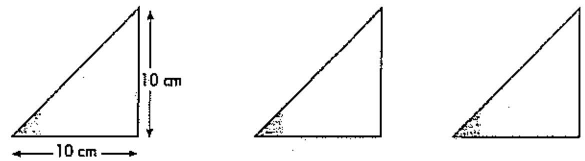
Vamos estudar alguns exemplos onde se utilizam derivadas para resolver problemas de optimização, ou seja, problemas onde se procura a solução «óptima».

Exemplos

1

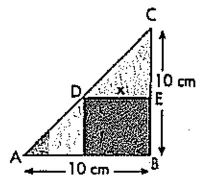
O canteiro num jardim

Num jardim com a forma de um triângulo isósceles queremos desenhar um canteiro como se indica na figura: um dos vértices do rectângulo pertence à hipotenusa e os outros aos catetos.



Um destes rectângulos terá área máxima. Qual deles é?
Para resolvermos o problema teremos de proceder do seguinte modo:

1.° **Desenhamos uma figura onde colocamos as variáveis e as constantes.**



2.° **Escrevemos a fórmula que relaciona as variáveis e a função pedida.** (Neste caso a área do rectângulo.)

$$A = xy .$$

3.° **Procuramos uma relação entre as variáveis.**

No caso temos que são semelhantes os triângulos [ABC] e [DEC]

$$\frac{10 - y}{x} = \frac{10}{10} \Leftrightarrow 10 - y = x \Leftrightarrow y = 10 - x .$$

4.° Escrevemos a função em causa como dependente de uma só variável, combinando a informação obtida.

$$A = xy$$

$$y = 10 - x$$

$$A = x \cdot (10 - x) \Leftrightarrow A = 10x - x^2 .$$

5.° Derivamos a função e determinamos os extremos.

$$A' = 10 - 2x .$$

x	0	5	$+\infty$
A'	+	0	—
A	↗	M	↘

6.° Damos resposta ao problema reflectindo sobre a viabilidade da solução.

Logo, a área máxima é

$$A = 10 \,.\, 5 - 25 = 25$$

e corresponde à situação em que o rectângulo é um quadrado de lado 5 cm.

2

O cilindro de latão

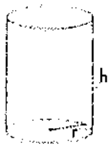
Uma empresa fabrica cilindros em latão com $1\ m^3$ de volume. Estudar as dimensões do cilindro de modo a gastar o mínimo latão possível na sua construção.

Resolução

Seguindo o processo indicado, vem:

1.° Desenhamos uma figura onde colocamos as variáveis e as constantes.

$$V = 1\ m^3 .$$



$V=1m^3$

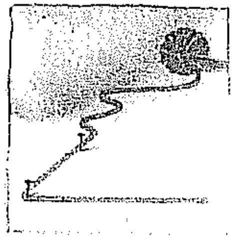
2.° Escrevemos a fórmula que relaciona as variáveis e a função pedida.

Área total = Área lateral + Área das bases

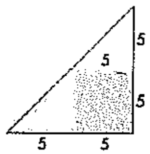
$$A = \text{Área total} = 2\pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2$$

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 .$$

13



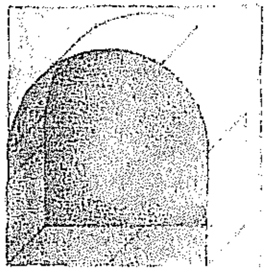
Com um fio de 150 cm de comprimento, quais são as dimensões do rectângulo de área máxima que é possível construir?



A área máxima corresponde à situação em que o rectângulo é um quadrado.

$V=1m^3$ $V=1m^3$ $V=1m^3$

14



Com 714 m de rede pretende-se vedar um terreno, com a forma indicada em cima, constituído por um rectângulo [ABCD] e um semicírculo de diâmetro [DC].
Determine as dimensões do rectângulo de modo a que a área seja máxima.

3.° Procuramos uma relação entre as variáveis.

$$V = 1 m^3 \quad ; \quad V = \pi r^2 \cdot h$$

$$1 = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi r^2} .$$

4.° Escrevemos a função em causa como dependente de uma só variável.

$$A = 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$

$$A = \frac{2}{r} + 2\pi r^2 .$$

5.° Determinamos os extremos da função.

$$A' = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r$$

$$A' = \frac{-2 + 4\pi r^3}{r^2} .$$

c.a.

$$-2 + 4\pi r^3 = 0$$

$$4\pi r^3 = 2$$

$$r^3 = \frac{2}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

r	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$	∞
A'	—	0	+
A	↘	mínimo	↗

6.° Damos resposta ao problema reflectindo sobre a viabilidade da solução.

A área total mínima corresponde a um cilindro que tem:

raio da base: $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ metros.

altura: $h = \frac{1}{\pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^2} = \frac{1}{\pi \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4\pi^2}}} = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi} .$

Logo, $h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ metros.

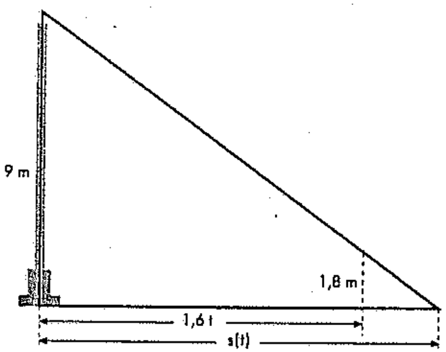
1

A velocidade da sombra

O Vítor ia a passear de noite e a sua sombra acompanhava-o. Quanto mais depressa ele andasse, mais depressa a sombra andava.
Será que a velocidade da sombra é igual à velocidade do Vítor?

Resolução

Imaginemos uma situação concreta.
O Vítor tem 1,8 m de altura e passeia a uma velocidade de 1,6 m/s. O poste tem 9 m. Em cada momento o extremo da sombra ocupa a posição $s(t)$.



Da semelhança de triângulos concluiu-se que:

$$\frac{9}{s(t)} = \frac{1{,}8}{s(t) - 1{,}6t}$$

$$9\,s(t) - 14{,}4\,t = 1{,}8\,s(t)$$

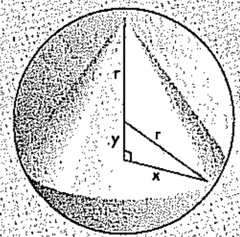
$$7{,}2\,s(t) = 14{,}4\,t$$

$$s(t) = 2t\,.$$

A velocidade da sombra é $v(t) = s'(t) = 2$.
Podemos então concluir que a velocidade da sombra é ligeiramente superior à velocidade do Vítor.
Esta diferença compreende-se porque o Vítor tem sempre a mesma altura e ao afastar-se do poste a sua sombra vai aumentando.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6



x : raio da base do cone

r : raio da esfera

y + r : altura do cone

2

Determine o volume máximo de um cone inscrito numa esfera de raio 3 cm.

Resolução

O volume do cone é igual à terça parte do produto da área da base pela altura.

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 (y + 3)\,.$$

Temos que

$$3^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 = 9 - y^2\,.$$

Substituindo na expressão do volume, vem

$$V = \frac{1}{3}\pi (9 - y^2)(y + 3)$$

$$V' = \frac{1}{3}\pi \cdot (-2y) \cdot (y + 3) + \frac{1}{3}\pi (9 - y^2)$$

$$V' = -\frac{2}{3}\pi y (y + 3) + \frac{1}{3}\pi (9 - y^2)$$

$$V' = -\pi y^2 - 2\pi y + 3\pi$$

$$V' = -\pi (y + 3)(y - 1)\,.$$

y		-3		0		1	$+\infty$
V'				0	+	0	−
V				9π	↗	Máx.	↘

O valor máximo do volume obtém-se para $y = 1$.
Temos:

$$h = y + r \quad ; \quad h = 1 + 3 = 4$$

$$x = \sqrt{9 - y^2} \quad ; \quad x = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi (\sqrt{8})^2 \cdot 4\,.$$

Logo,

$$V = \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3\,.$$

9 **O lançamento de um objecto**

A altura h de um objecto que se move verticalmente é dada pela fórmula:

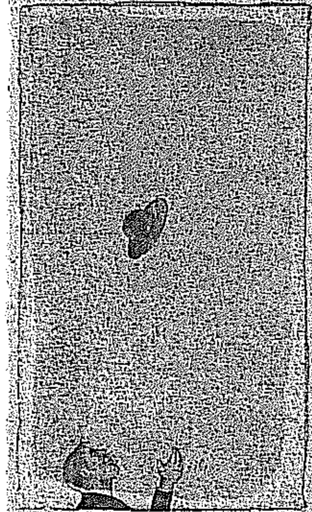
$$h = -16t^2 + 96t + 112$$

sendo t em segundos e h em metros. Determine:

9.1 a velocidade do objecto quando $t = 0$;

9.2 a altura máxima atingida pelo objecto;

9.3 a velocidade do objecto quando $h = 0$.



10 **A soma é 20**

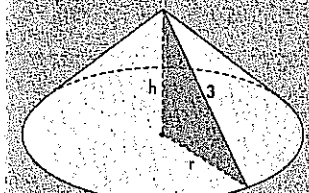
A soma de dois números positivos é 20. Determine os números sabendo que:

10.1 o seu produto é máximo;

10.2 a soma dos seus quadrados é mínima.

11 **Como gerar um cone**

Um triângulo rectângulo de hipotenusa 3 cm é rodado em torno de h para gerar um cone de revolução de raio r (ver figura ao lado). Determine o raio, a altura e o volume do cone gerado deste modo e que tenha volume máximo.



12 Para cada valor de a

$$f : x \mapsto x^2 + \frac{a}{x}$$

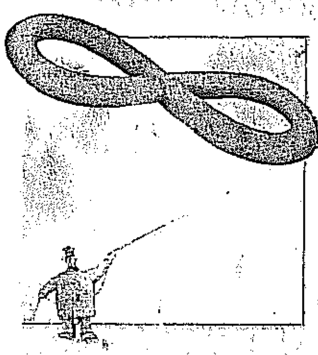
é uma função real de variável real.

Determine a de modo que:

12.1 a função tenha um mínimo para $x = 2$;

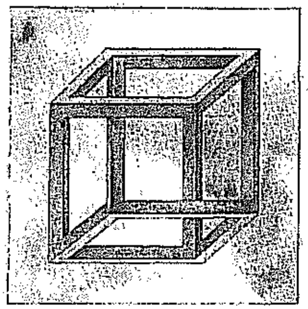
12.2 a função tenha um ponto de inflexão para $x = 1$.

Termos e conceitos



Limite de uma função
Limites laterais
Ponto de acumulação
Ponto isolado
Teorema da soma
Teorema da diferença
Teorema do produto
Teorema do produto de uma função por uma constante
Teorema do quociente
Teorema da raiz
Limites infinitos
Indeterminação
Função contínua num ponto
Função contínua num intervalo
Assimptotas verticais
Assimptotas não verticais
Teorema de Bolzano
Derivada de uma função num ponto
Derivadas laterais
Regras de derivação
Derivabilidade e continuidade
Função derivada
Extremos relativos de uma função
Sentido da concavidade do gráfico
Problemas de optimização

Verdadeiro ou falso



Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

1. $\lim_{x \to 1} (-x^2 + 2x + 3) = 4$.

2. $\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = -2$.

3. $\lim_{x \to -\infty} (-2x^2 + 3x - 10) = +\infty$.

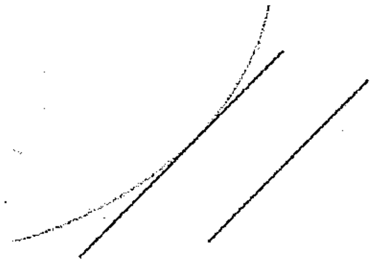
4. $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = -\infty$.

5. $\lim_{x \to 0^+} \frac{x-3}{x} = -\infty$.

6. $\lim_{x \to 0^-} \frac{x-3}{x} = -\infty$.

7. Se o domínio de uma função é $]a, +\infty[$, não é possível calcular $\lim_{x \to a} f(x)$.

5. Determine as coordenadas do ponto da curva $y = x - x^2$ em que a recta tangente à curva é paralela à recta $x + 2y - 3 = 0$.



6. A recta tangente à curva de equação:

$$y = 2x^2 + ax + b$$

no ponto $(-2, 11)$ é paralela à recta $y = -2x + 1$. Determine **a** e **b**.

7. Determine **a** e **b** de modo que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ seja uma função real de variável real que tenha:

7.1 um máximo para $x = -1$ e um mínimo para $x = 3$.

7.2 um mínimo para $x = 4$ e um ponto de inflexão para $x = 1$.

8. Faça um esboço do gráfico de uma função que, no ponto $x = 2$, satisfaça as condições:

8.1 $(2, f(2))$ seja um ponto de inflexão;

8.2 $f(2)$ é máximo mas a função não é contínua em $x = 2$;

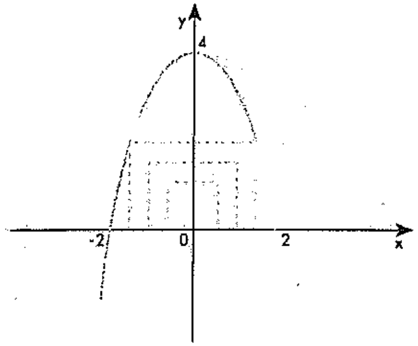
8.3 $f(2)$ é mínimo, f é contínua em $x = 2$ e as derivadas $f'(2^+)$ e $f'(2^-)$ são diferentes.

9. A resistência R de um condutor é dada pela fórmula:

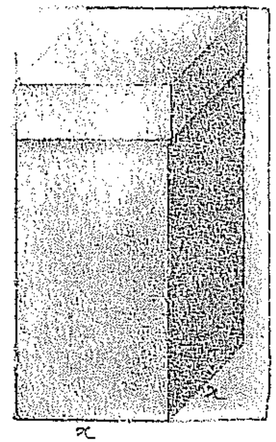
$$R = \frac{3r}{3 + r}$$

sendo r uma resistência variável.
Estude a função e esboce o gráfico para $r \in \mathbb{R}^+$.

10. Um rectângulo tem base no eixo dos xx e os outros dois vértices pertencem à parábola de equação $y = 4 - x^2$.
Qual é a área máxima que o rectângulo pode ter?



11. Uma caixa, com a forma de um paralelepípedo de base quadrada de lado x cm, tem uma área total de 150 cm^2.

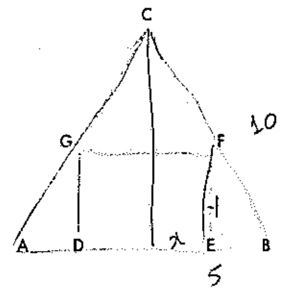


11.1 Mostre que o volume do paralelepípedo é dado pela fórmula:

$$V = \frac{75x - x^3}{2}.$$

11.2 Determine as dimensões da caixa de modo que ela tenha volume máximo.

12. O triângulo [ABC] é equilátero de lado 10 cm.
Construiu-se um rectângulo [DEFG] como se indica na figura.
Determine as dimensões do rectângulo de modo que este tenha área máxima.

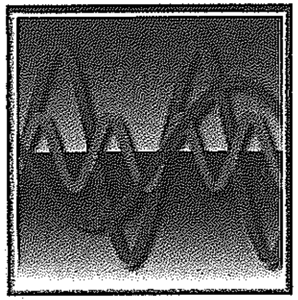


1994

YOLANDA LIMA / FRANCELINO GOMES

XEQ MAT

MATEMÁTICA
12º



EDITORIAL O LIVRO

102. Sendo
$g(x) = \text{sen}^2 x + \cos x$

a) prova que g tem pelo menos um zero em $\left]\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right[$

b) estuda a monotonia de g em $[0, 2\pi]$

c) calcula, no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a abcissa do ponto onde o gráfico de g tem tangente horizontal e escreve uma equação dessa tangente.
(Aferição, 94)

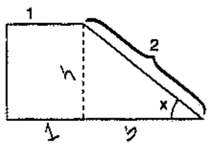
103. Seja
$h(x) = 1 - x + \text{sen}\, 2x$

a) Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \frac{h(x) - 1}{x}$

b) Estuda a monotonia de h no intervalo $[0, \pi]$

c) Mostra que $h(x) = 0$ tem uma só solução em $[0{,}5 \,;\, 2]$ e determina-a (por defeito a menos de 0,01).
(Aferição, 94, 1ª ch.)

104.



a) Exprime a área deste trapézio $\left(\frac{B + b}{2} \cdot h\right)$ em função de x.

b) Determina a área máxima.

c) Qual a taxa de variação instantânea da área quando x = 1 radiano?

Exemplo 4: *Num movimento vibratório simples, a elongação é dada, em função do tempo t, por* $e = 2\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$

(e em cm; t em segundos). A constante T é a duração duma vibração completa (período).
a) Determina o maior valor que a elongação pode ter (amplitude).

Sendo T = 0,1:

b) Calcula $e\left(\frac{1}{15}\right)$, $e\left(\frac{1}{60}\right)$, $e(0{,}01)$.

c) Mostra que $e(t + 0{,}1\,k) = e(t)$ *e calcula*

$$\lim_{t \to 0} \frac{e(t)}{t} \quad e \quad \lim_{t \to -0{,}1} \frac{e(t + 0{,}1)}{t + 0{,}1}$$

d) Calcula a velocidade com que varia e no instante $t = \frac{1}{20}$ *e qual a velocidade máxima.*

Resolução: $\quad e(t) = 2\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$

a) O máximo valor do seno é 1. Logo o maior valor de e é 2 cm.
Temos $e = 2$ quando for $t = \frac{T}{4} + kT \quad (k \in \mathbb{Z}.)$.

b) $e\left(\frac{1}{15}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}1} \cdot \frac{1}{15}\right) = 2\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$e\left(\frac{1}{60}\right) = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$; $e(0{,}01) = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{5} \approx 1{,}1756$

c) $e(t + 0{,}1\,k) = 2\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{0{,}1}(t + 0{,}1\,k)\right] = 2\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}1}\,t + 2\,k\,\pi\right) = e(t)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{e(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2\,\text{sen}(20\pi \cdot t)}{20\pi \cdot t} \cdot 20\pi = 40\pi \qquad (T = 0{,}1)$$

Analogamente $\quad \lim\limits_{\substack{t \to -0{,}1 \\ t + 0{,}1 \to 0}} \frac{e(t + 0{,}1)}{t + 0{,}1} = 40\pi$

d) $e'(t) = 2\cos(20\pi\, t) \cdot 20\pi$; $\quad e'\left(\frac{1}{20}\right) = -40\pi \quad$ (cm/s);
A velocidade é máxima quando $\cos(20\pi\, t) = 1$, o que acontece para $20\pi \cdot t = 2\,k\,\pi$, ou seja, $t = \frac{k}{10}$, $\quad k \in \mathbb{Z}$.

Velocidade máxima $= e'\left(\frac{k}{10}\right) = 40\pi$

Exemplo 5: *Um ponto P move-se sobre um eixo de forma que a sua distância algébrica à origem é dada, em cada instante, por* $s = 5\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} \cdot t\right)$.

a) Determina a velocidade e a aceleração do ponto, no instante $t = \frac{3}{4}$ *(segundos).*
b) Como interpretar o que se passa nesse instante?

Resolução: $\quad s(t) = 5\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\,t\right)$

a) $v = \frac{ds}{dt} = 5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot t\right) \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\,t\right)$

$v\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{10\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Velocidade nula.

$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{10\pi}{3}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\,t\right) \cdot \frac{2\pi}{3} = -\frac{20\pi^2}{9}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} \cdot t\right)$

$a\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{20\pi^2}{9}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = -\frac{20\pi^2}{9} \approx -21{,}93$

b) Se a velocidade se anula e está a decrescer (2ª derivada negativa), então a velocidade vai passar a ser negativa; significa que nesse instante se inverte o sentido do movimento do ponto sobre o eixo.

Exemplo 6: *Seja* $F(x) = \text{sen}\, x/2 \cdot \cos x/2$.
Determinar os pontos onde a tangente ao gráfico de F, no ponto de abcissa $\frac{x}{6}$, *corta os eixos coordenados.*

Resolução: $\quad y = \text{sen}\,\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\, x$

A tangente ao gráfico, para $x = \frac{\pi}{6}$, tem por equação

$$y - F\left(\frac{\pi}{6}\right) = F'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Logo uma equação da tangente será $\quad y - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

O ponto onde esta recta corta o eixo das ordenadas obtem-se fazendo $x = 0$: $\quad y_0 = \frac{1}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{24} = \frac{6 - \pi\sqrt{3}}{24} \approx 0{,}023$.
É o ponto (0; 0,023)

O ponto onde a recta corta o eixo das abcissas obtem-se fazendo $y = 0$: dá $x_0 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0{,}054$. É o ponto (–0,054 ; 0)

105. Seja
$H(x) = 1 - x\,\text{sen}\,\frac{1}{x}$

a) Define uma extensão de H a $\mathbb{R}$ que seja contínua.

b) Escreve uma equação da tangente ao gráfico de H no ponto da abcissa $6/\pi$.

(Aferição, Profissionais)

106. Um ponto move-se sobre uma recta de modo que a sua velocidade v é dada, em função do tempo t, por

$$v = \frac{1}{3}\,\text{sen}(2t)$$

a) Determina uma expressão geral dos instantes em que
a_1) a velocidade é nula.
a_2) a aceleração é nula.
a_3) a velocidade é mínima.
b) Esboça o gráfico da função $v(t)$ em $[0, 2\pi]$.

107. Sendo
$F(x) = 4\cos(x + 1)$

a) determinar os pontos onde a tangente ao gráfico de F, no ponto de abcissa 5, corta os eixos coordenados (Calculadora em MODO RAD)

b) determinar uma expressão geral das abcissas dos extremos relativos de F.

[illegible]

a) Determina o seu domínio.

b) Determina os zeros de h.

c) Com $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, entre que valores varia h(x)?

d) Exprime h(x) em função de $tg\frac{x}{2}$ e calcula h(α), sabendo que cos α = 0,2 e α ∈ 4.º Q.

126. Considera a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \text{sen}\frac{\pi}{x}$ com $x \neq 0$. Qual das expressões define f'(x)?

(A) $\text{sen}\frac{\pi}{x} - \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ (B) $\text{sen}\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}$

(C) $\text{sen}\frac{\pi}{x} - x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ (D) $\text{sen}\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}$

Específica 94 — Ep. Normal

127. Considera a função definida por

$g(x) = |\cos x| + \cos x$ em $[0, 2\pi]$

a) Prova que g é contínua.

b) Em que intervalo g é positiva e crescente?

c) Resolve a equação g(x) = 0.

d) Determina o contradomínio de g.

e) Esboça o gráfico de g.

f) Define g'(x). (Há dois pontos sem derivada).

128. Sendo $F(x) = 2\cos^2 x - \text{sen}\, 4x$, mostra que as tangentes ao gráfico de F nos pontos de abcissas $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$ são paralelas.

129. Sendo f a função real de variável real definida por $f(x) = \text{sen}\, x \cos x$

a) Mostra que $f(x) = \frac{\text{sen}\, 2x}{2}$ e determina a paridade, o período e os zeros de f.

b) Indica uma expressão geral dos pontos maximizantes e o valor dos máximos.

130. Considera a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + \text{sen}\, x & , \text{ se } x > 0 \\ \dfrac{x^2}{2-x} & , \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

[illegible]

b) [illegible]

c) [illegible]

d) Averigua se f tem extremo relativo para x = 0.

e) O gráfico de f tem uma única assímptota. Determina-a.

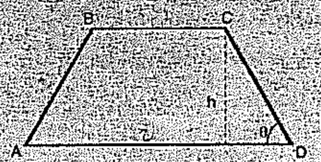
Específica 94

131. Determina os extremos locais e traça o gráfico no intervalo [0, 2π[das funções x → f(x)

a) $f(x) = \cos 2x + 2\,\text{sen}\, x$ c) $f(x) = \frac{x}{2} - \text{sen}\, x$

b) $f(x) = 1 + tg\frac{x}{2}$ d) $f(x) = \frac{1}{1 - tg\, x}$

132. A pedido de um cliente, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima, com a forma de um trapézio, em que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2$ dm.



Designando por θ a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC,

a) Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior em função de θ

b) Prove que a área A(θ) do trapézio é dada, em dm^2, por

$$A(\theta) = 4 \cdot \text{sen}\,\theta + 2\,\text{sen}(2\theta)$$

c) Determina o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima e calcula essa área.

d) Calcule $\lim_{\theta \to 0} \frac{A(\theta)}{\theta}$

Aferição 94 Ep. Normal

133. No movimento de um ponto sobre um eixo, a distância algébrica δ do ponto à origem, varia em função do tempo t, de acordo com a equação:

$$\delta(t) = \cos t - \sqrt{3}\,\text{sen}\, t \quad t \in [0, 2\pi]$$

a) Mostra que $\delta(t) = -2\,\text{sen}\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$

b) Determina o intervalo em que a distância à origem é crescente e a maior distância a que o ponto pode chegar..

[illegible]

c) [illegible] desta função pelo eixo Ox no intervalo $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

134. Considera a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ |1 - x| & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

a) Estuda a função quanto à continuidade e derivabilidade em todos os pontos do seu domínio.

b) Determina os seus extremos relativos no intervalo]−2π, 4π[

c) Esboça a sua representação gráfica no intervalo [−2π, 2π]

135. A posição de um corpo móvel sobre um eixo, em relação à origem, é dada por

$$s(t) = m\,\text{sen}(kt) + n\cos(kt)$$

onde m, n, k são constantes não nulas.

Mostra que a aceleração do movimento, s'', é proporcional à distância à origem.

Qual é a constante de proporcionalidade?

136. Seja a função $h(x) = x - 2\,\text{sen}\, x$, $x \in \mathbb{R}$

Mostra que h é uma função ímpar e contínua em $\mathbb{R}$ e que o seu gráfico não admite assímptotas.

b) Com a calculadora e recorrendo aos gráficos de y = x e de y = 2 sen x localiza os zeros de h no intervalo [0, 2π].

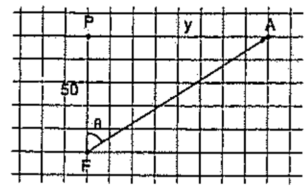
c) Determina os intervalos de monotonia, os extremos, os pontos de inflexão e o sentido da concavidade de h no intervalo [0, 2π].

d) Representa graficamente h no intervalo [0, 2π].

e) Calcula a área limitada pelo gráfico de h e pela recta y = x, no intervalo [π, 2π].

f) Mostra que a função $H(x) = \frac{h(x)}{x}$ admite uma extensão a $\mathbb{R}$, contínua.

137. Um farol está situado num ponto F, à distância de 50 m do ponto P mais próximo da costa (suposta rectilínea).



[illegible]

Determina, em função de θ, a velocidade com que o raio de luz percorre a costa.

Qual é a taxa de variação instantânea quando o raio de luz atinge A a 100 m de P?

138. Num triângulo isósceles os lados iguais têm 20 cm (cada um).

Sendo θ o ângulo desses lados exprime a área A do triângulo em função de θ.

Em seguida supõe que θ varia 2° por minuto (a partir de zero graus) e exprime, em função de t (minutos), a velocidade com que varia a área do triângulo.

Qual é a velocidade quando θ = 60°?

139. Calcula a área sob o gráfico das funções seguintes, no intervalo indicado:

a) y = cos x em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

b) y = 3 cos x em $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

c) $y = \frac{\text{sen}\, x}{2}$ em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

d) y = sen 2x + 1 em [0, π]

e) $y = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ em [0, π]

140. Traça o gráfico da função $x \mapsto f(x) = \cos x$, com $x \in [0, 2\pi]$

Aproveitando as informações que o gráfico de f fornece, traça os gráficos das funções seguintes:

a) y = | f(x) | d) y = f(x) + | f(x) |

b) y = 2 . f(x) e) y = f(x) − f(−x)

c) $y = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ f) $y = 2 - f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

141. Seja a função $x \mapsto g(x) = |\cos x|$, com $x \in [0, 2\pi]$

a) Averigua se g é contínua e se é diferenciável em [0, 2π].

b) Determina os zeros e os extremos relativos de g.

c) Resolve a inequação $g'(2x) - g'(x) \geq 0$

FICHA TÉCNICA

Director Editorial: Diogo Santos
Design Gráfico: Areal Editores
Ilustração: António Lima
Capa: Vitor Simões

MATEMÁTICA

12º ANO

INFINITO 12

PARTE 2

ANA MARIA BRITO JORGE
CONCEIÇÃO BARROSO ALVES
GRAZIELA FONSECA
JUDITE BARBEDO

AREAL EDITORES, LDA.
APARTADO 1156 – 4100 PORTO CODEX

DIRECÇÃO EDITORIAL
Rua da Torrinha, 228-H, 3º andar – 4050 PORTO – TEL. (02) 2004424 – FAX 2005708

DIRECÇÃO COMERCIAL / ARMAZÈM
Rua D. Marcos da Cruz, 1381 – 4460 PERAFITA – TELS. (02) 9959600 / 9966985 / 9967341 – FAX 9959583

LIVRARIA / MATERIAL DIDÁCTICO
Av. da Boavista, 1471 - Loja 10 – 4100 PORTO – TEL. (02) 6000362 – FAX 6068449

INFORMAÇÃO EDITORIAL / PROFESSORES
Av. da Boavista, 1471 - Loja 10 – 4100 PORTO – TEL. (02) 6008176 – FAX 6068449

AREAL EDITORES

Observando a figura, podemos concluir que a equação tem uma única solução $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
0,1	0,1	0,995
0,2	0,2	0,98007
0,3	0,3	0,95531
0,4	0,4	0,92106
0,5	0,5	0,87758
0,6	0,6	0,82534
0,7	0,7 ≈	0,76484
0,8	0,8	0,69671
0,9	0,9	0,621

Deste quadro de valores, podemos concluir que $\alpha \in]0,7; 0,8[$
Observando agora a seguinte tabela de valores

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
0,71	0,71	0,7583
0,72	0,72	0,7518
0,73	0,73 ≈	0,7451
0,74	0,74	0,7384
0,75	0,75	0,7317

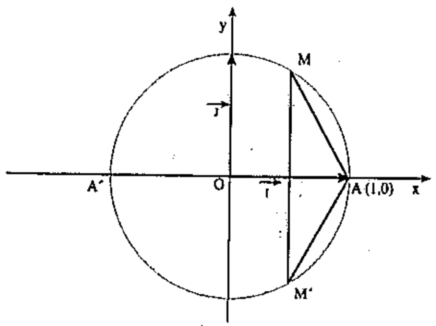
conclui-se que

$$\alpha \simeq 0,73$$

Qualquer destes dois processos poderia prolongar-se tanto quanto o necessário para se obter a aproximação pretendida.

Um problema de optimização

Seja $(O, \vec{i}, \vec{j})$ um referencial o. n.

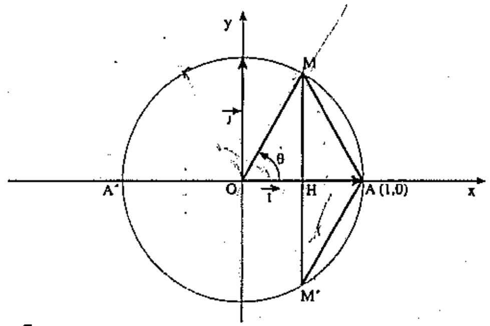


Seja $\mathcal{C}$ o círculo de centro O e raio 1, A, o ponto de coordenadas (1, 0) e A', o ponto de coordenadas (–1, 0). Seja M um ponto de $\mathcal{C}$ distinto de A e de A', de ordenada positiva e M' o seu simétrico em relação a OA.

Pretende-se determinar a posição do ponto M, de modo que a área do triângulo [AMM'] seja máxima e conhecer a natureza do triângulo.

Resolução:

Chamemos H à projecção ortogonal de M sobre OA e representemos por x a sua abcissa e por θ a amplitude do ângulo que $\vec{i}$ faz com $\overrightarrow{OM}$.



Se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, teremos que:

área de Δ [AMM'] = 2 x área de Δ [OMA] – área de Δ [OMM']

Se $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, vem

área de Δ [AMM'] = 2 x área de Δ [OMA] + área de Δ [OMM']
em qualquer dos casos, isto é,
se $0 < \theta < \pi$ temos que:

área de Δ [AMM'] = $\text{sen}\,\theta - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta$

(basta reparar que o círculo $\mathcal{C}$ é o círculo trigonométrico).

Então consideremos a função f definida em $]0, \pi[$ por $f(\theta) = \text{sen}\,\theta - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta$ e estudemos a sua variação.

$$f'(\theta) = \cos\theta - \cos 2\theta$$
$$\begin{aligned} f'(\theta) = 0 &\Leftrightarrow \cos\theta - \cos 2\theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\theta = \cos 2\theta \\ &\Leftrightarrow \theta = \pm 2\theta + k.2\pi \wedge k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow 3\theta = k.2\pi \vee -\theta = k.2\pi \wedge k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \theta = \left(k\frac{2\pi}{3} \vee \theta = k.2\pi\right) \wedge k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Fazendo k = 1, obtemos $\theta = \frac{2}{3}\pi$

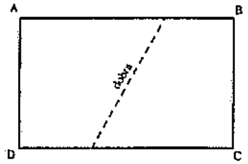
θ	0		$\frac{2}{3}\pi$		π
y'		+		–	
y		↗	M	↘	

f admite máximo para $\theta = \frac{2}{3}\pi$.
Então, o triângulo [AMM'] de área máxima é um triângulo equilátero.

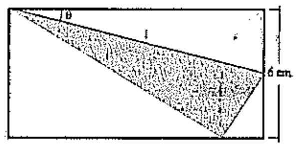
APLICAÇÃO DAS FÓRMULAS DA SOMA, DA DIFERENÇA, E DA DUPLICAÇÃO. SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÕES. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES.

1 Depois de dobrada uma folha de papel rectangular, o vértice A coincide com o vértice C.
Calcule o comprimento do vinco sabendo que

$\overline{AB} = 24$ cm e $\overline{AD} = 18$ cm



2 Uma folha de papel rectangular com 6 cm de largura é dobrada de modo que um dos cantos vai sobrepor-se ao lado oposto, conforme ilustra a figura.
Apenas uma das expressões seguintes representa o comprimento da dobra em função de θ.
Diga qual delas:



$6 \operatorname{tg} \theta$; $\dfrac{3}{\operatorname{sen}\theta \cos^2\theta}$; $\dfrac{6}{\operatorname{sen}^2\theta \cos\theta}$; $\dfrac{3}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$; $\dfrac{3}{\operatorname{sen}^3\theta}$

3 Sem calcular sen $\frac{\pi}{12}$ ou cos $\frac{\pi}{12}$, mostre que

$$\frac{\cos\frac{\pi}{12} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}} = \sqrt{3}$$

4 Sejam x e y dois números reais pertencentes ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, tais que $\cos x = \frac{3}{5}$ e $\cos y = \frac{1}{3}$.
Calcule sen (2x – y).

5 A partir das fórmulas
cos (a + b) = cos a cos b – sen a sen b e cos (a – b) = cos a cos b + sen a sen b,
deduza uma expressão para

cos p + cos q, sendo **p = a + b** e **q = a – b**.

6 A partir das fórmulas de
sen (a + b) = sen a cos b + sen b cos a e sen (a – b) = sen a cos b – sen b cos a,
deduza uma expressão para

sen p – sen q, sendo **p = a + b** e **q = a – b**.

7 Determine as soluções das equações seguintes:

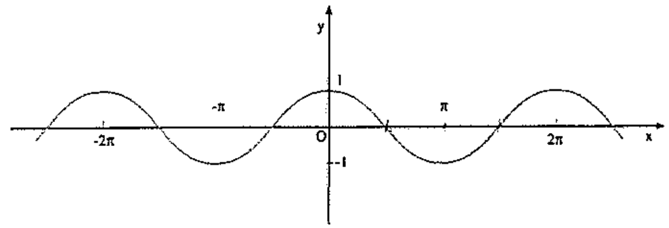
1. cos x – sen x = 1	**4.** $2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen} x$
2. sen 2x + sen x = 0	**5.** $\sqrt{3}$ sen x + cos x = 1
3. cos x + cos 2x = 0	**6.** 4 sen x – 3 cos x = 2

8 A partir do gráfico da função seno, co-seno ou tangente, represente graficamente as funções:

1. f(x) = 2 sen x	**4.** $i(x) = \cos x - \frac{\pi}{5}$
2. g(x) = – 4 cos 2x	**5.** j(x) = 3 tg x
3. $h(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$	**6.** $l(x) = 2 + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

9 Considere a função real de variável real assim definida:
$f(x) = 1 + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

1. O gráfico seguinte representa a função co-seno. Construa a partir dele o gráfico de f.



2. Calcule $f\left(\frac{7\pi}{2}\right) - f\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

3. Determine o contradomínio da função dada.
4. Determine uma expressão geral dos zeros da função.
5. Averigue se $f(x + k2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ com $k \in \mathbb{Z}$. O que pode concluir?
6. Determine os números reais x que satisfazem a condição $f(x) \geq 0$.

DERIVADA DE UMA FUNÇÃO. EQUAÇÕES DE RECTAS TANGENTES AO GRÁFICO.

10 Sendo j(x) = sen 4x, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine j'(x).

11 Recorrendo às regras de derivação caracterize a função derivada em cada um dos casos seguintes:

1. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$	**6.** $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2}$
2. f(x) = 5x cos 3x	**7.** $f(x) = \dfrac{1 - \cos 2x}{2x}$
3. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$	**8.** $f(x) = (\cos x + \operatorname{sen} x)^2$
4. $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$	**9.** $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$
5. $f(x) = \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$	**10.** $f(x) = \dfrac{3}{\cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x}$

12 Determine equações da tangente e da normal ao gráfico de f, no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$, em cada um dos casos seguintes:

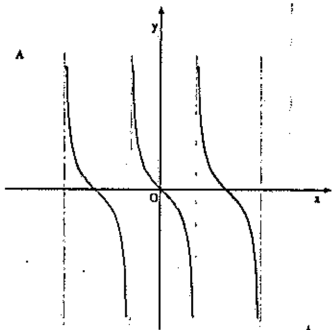
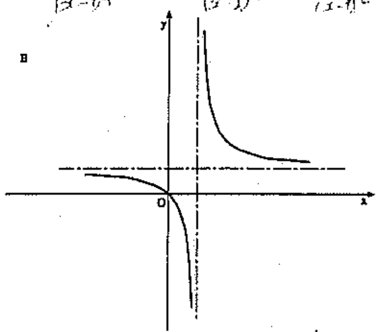
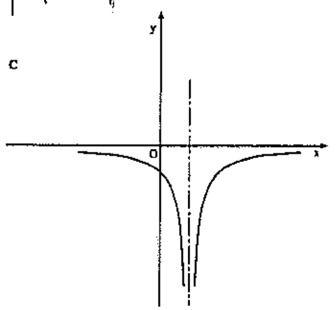
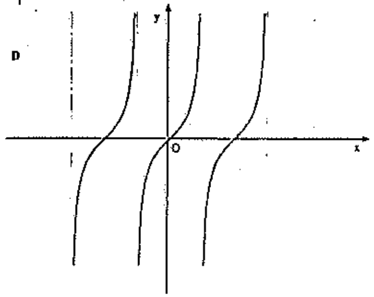
1. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ 2. $f(x) = \frac{1}{\text{sen } x} + \frac{1}{\text{tg } x}$

13 Considere as funções reais de variável real:
$f(x) = x + 2 \text{ sen } x$
$g(x) = x + \cos x$
$h(x) = x + \text{tg } x$
Determine as abcissas de todos os pontos do gráfico, de cada uma das funções dadas, em que a recta tangente é horizontal.

14 Considere os gráficos A, B, C, D e as funções f e g, reais de variável real, definidas por:
$f(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = \text{tg}(2x - \pi)$ e $h(x) = 2 \text{ sen } x$

1. Algum dos gráficos pode ser o de uma restrição da função g? D Dim f(x)
Justifique as exclusões que decidiu.
2. Algum deles pode ser da derivada de f? Justifique a escolha feita.
3. Calcule o limite de $\frac{g(x)}{x}$ quando x tende para zero.
4. B é a representação gráfica da função f. Recorrendo a B determine o contradomínio de f o h.

$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$ → sempre (C)

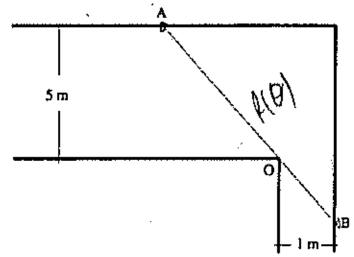
A

B

C

D


15 Dadas as funções reais de variável real:

$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ $h(x) = \frac{1}{\cos x + \text{sen } x}$

1. Averigue se a função g tem assímptotas verticais e horizontais.
2. Caracterize a função derivada de g.
3. Indique os intervalos de monotonia e o contradomínio da função g.
4. Determine o domínio goh
5. Prove que:
$\forall x \in D_{goh}, (goh)(x) = -\text{sen } 2x.$
6. Calcule o valor exacto de (goh) (α), sabendo que $\text{tg}(-\alpha) = -\frac{3}{4} \wedge \alpha \in 3^{\circ}$ Q.

16 Na figura está representado um corredor de um museu



Considere a recta que passa por O, sendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e que encontra as paredes em A e B.

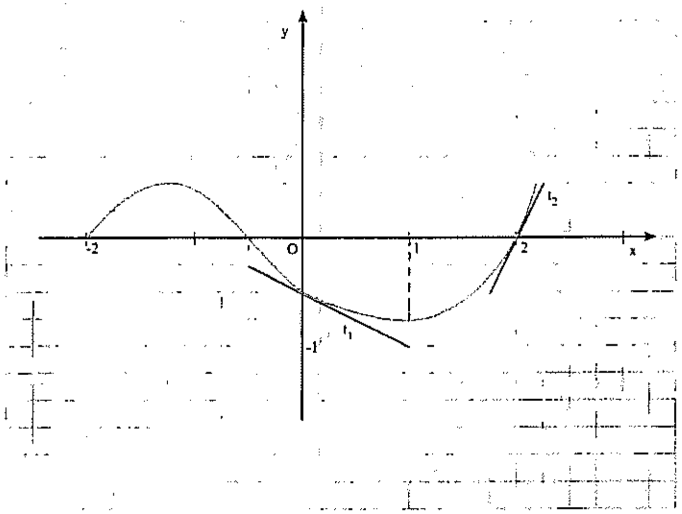
1. Exprima $\overline{OA}$ em função de α.
2. Exprima $\overline{OB}$ em função de α.
3. a) Faça $\overline{AB} = f(\alpha)$ e mostre que $f(\alpha) = \frac{5}{\text{sen } \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$

b) Determine a função derivada de f em $]0, \frac{\pi}{2}[$ e deduza recorrendo à calculadora um valor aproximado α_0 de α para o qual f admite extremo.

c) Calcule o valor de $\overline{AB}$ para $\alpha = \alpha_0$.

d) Pretende-se transportar naquele corredor um painel, em posição vertical.
Quais as consequências práticas que se podem tirar do estudo feito nas alíneas anteriores?

17 A figura representa uma parte da representação gráfica da função f derivável em IR.



Recorrendo ao gráfico:

1. Resolva a equação $f'(x) = 0$ em $[-2, 2]$.

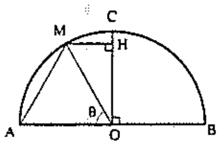
2. Determine o valor de $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2+h)}{h}$

3. Determine $f'(0)$ e a equação reduzida de t_1.

18 $\mathcal{C}$ é uma semi-circunferência de diâmetro [AB], de centro O e de raio r.

[OC] é o raio perpendicular a [AB]. M é um ponto do arco AC. Designa-se por θ a medida em radianos do ângulo AOM $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$.

H é a projecção ortogonal de M sobre OC.



Existirá um ponto M tal que $\overline{AM} = \overline{MH}$?
Sugestão:
a) Exprima $\overline{AM}$ e $\overline{MH}$ em funçao de r e θ.
b) Estude a função g definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$ por $g(\theta) = 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - \cos\theta$ e deduza a existência de um ponto M tal que $\overline{AM} = \overline{MH}$.
Dê um enquadramento de amplitude 10^{-1} de AÔM correspondente a esta posição de M.

19 Dadas as funções reais de variável real:
$f(t) = \cos^2 t + \cos t$ e $g(t) = t - \pi$

1. Sendo $\cos 2a = -\frac{1}{3}$ e $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, calcule $f(a + \frac{\pi}{2})$;

2. Determine, para $t \in [0, 2\pi]$, os extremos da função f e classifique-os.

3. Qual o contradomínio de f?

4. Seja h uma função tal que $h(t) = (f : g)(t)$.

a) Calcule se existir, $\lim\limits_{t\to\pi} h(t)$

b) Pronuncie-se sobre a existência de assímptotas verticais e horizontais ao gráfico de h.

20 Considere a função $f(x) = x + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x)$.

1. Prove que a função é ímpar.

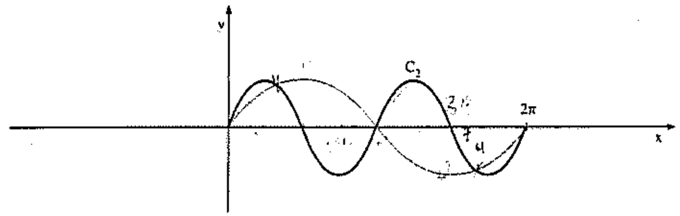
2. Prove que a equação $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x) = -x$ tem uma só solução no intervalo $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right[$.

3. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

4. Indique as abcissas dos pontos em que a recta tangente ao gráfico de f tem declive 1.

21 As curvas C_1 e C_2 da figura são as representações gráficas das funções f e g definidas em $[0, 2\pi]$ por

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x$$



1. Determine as coordenadas dos pontos de intersecção das duas curvas.

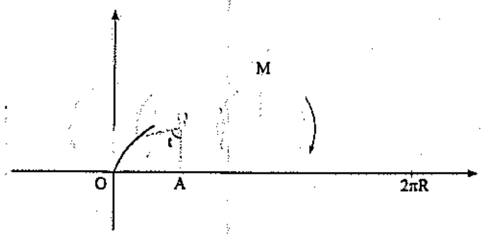
2. Resolva graficamente as inequações

a) $f(x) - g(x) \geq 0$
b) $f(x) + g(x) \geq 0$
c) $f(x) \times g(x) < 0$

3. Indique o contradomínio da restrição da função g ao intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right[$.

A CICLÓIDE

22 Uma circunferência C de centro Ω e de raio R roda sem deslizar sobre uma recta d. Pretende-se determinar a curva $\mathcal{C}$ descrita por um ponto M da circunferência.
A curva $\mathcal{C}$ pode ser considerada como a trajectória de um ponto situado sobre a circunferência de uma roda de bicicleta em movimento.
Esta trajectória é uma **ciclóide**.
À partida o ponto M está em O.
Num determinado instante designemos por A o ponto de contacto de C com d. O ponto M é então referenciado pela medida **t** (em radianos) do ângulo assinalado na figura. A medida do comprimento do arco orientado MA é então Rt que é também a abcissa de A.



1. Mostre que as coordenadas de M são
$x = f(t) = R(t - \text{sen } t)$ e $y = g(t) = R(1 - \cos t)$
2. Estude a variação de f e de g em $[0, 2\pi]$
3. Construa a parte de $\mathcal{C}$ correspondente a $t \in [0, 2\pi]$.
4. A ciclóide foi objecto de numerosos estudos. Podem citar-se, entre outros, Galileu que em 1639 a recomendou para o desenho dos arcos de uma ponte e Pascal que a baptizou de *roulette* e lhe consagrou um trabalho.
Faça uma pesquisa sobre *Pascal e o problema da ciclóide.*

QUESTÕES SAÍDAS EM PROVAS DE AFERIÇÃO

23 Considere a função **t**, real de variável real

$$t(x) = \frac{\text{sen } x}{1 - \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}$$

1. Determine o seu domínio.
2. Estude os limites laterais de **t(x)** quando x tende para zero.
3. Mostre que $t'(x) = \dfrac{1}{\cos x - 1}$ e conclua qual a variação da função **t**, no intervalo $]0, 2\pi[$.

(Prova de Aferição, Época Normal, 1993)

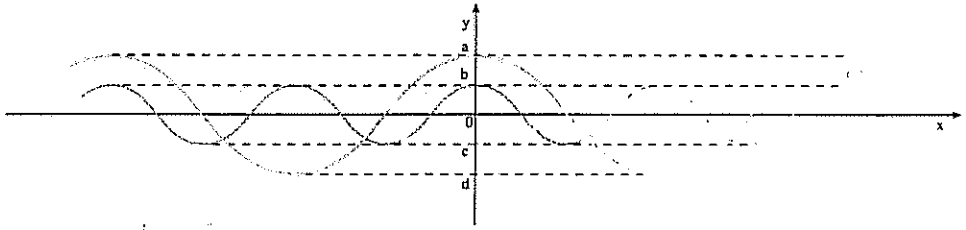
24 Considere a função g assim definida:

$$g(x) = \frac{\cos 2x}{1 - \text{tg } x}$$

1. Determine o domínio de g.
2. Sabendo que $\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{5}$ e α pertence ao 3º Q, calcule o valor exacto de g(α).
3. Calcule, se existir, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} g(x)$

(Prova de Aferição, Época Normal, 1ª chamada, 1993)

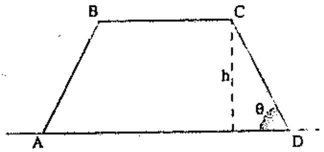
25 Na figura estão representados os gráficos C_1 e C_2 das funções de variável real f e g assim definidas:
$f(x) = 2\cos x$ e
$g(x) = \cos(2x)$



1. Faça corresponder a cada função o respectivo gráfico e justifique indicando os valores de **a**, **b**, **c** e **d** e o período de cada função.
2. Considere a função h, tal que $h(x) = (f + g)(x)$
a) Estude a paridade da função h.
b) Mostre que $h'(x) = -2\,\text{sen } x\,(2\cos x + 1)$ e determine os extremos de h no intervalo $]0, 2\pi[$.

(Prova de Aferição, Época Normal, 2ª chamada, 1993)

26 A pedido de um dos clientes, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima, com a forma de um trapézio, em que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2$ dm.
Designando por θ a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC,



1. Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior em função de θ;
2. Prove que a área $A(\theta)$ do trapézio é dada, em dm², por
$$A(\theta) = 4 \operatorname{sen} \theta + 2 \operatorname{sen} 2\theta;$$
3. Determine o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima e calcule essa área;
4. Calcule $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{A(\theta)}{\theta}$.

(Prova de Aferição, Época Normal, 1994)

27 Considere a função real de variável real assim definida
$$h(x) = 1 - x + \operatorname{sen} 2x$$

1. Calcule, se existir, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h(x) - 1}{x}$.
2. Estude a monotonia de h no intervalo $[0, \pi]$.
3. Mostre que a equação $h(x) = 0$ tem uma única solução x_0 em $[0,5;\ 2]$ e determine um valor aproximado de x_0, por defeito, a menos de uma centésima.

(Prova de Aferição, Época Especial, 1ª chamada, 1994)

28 É dada a função $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto 1 - \cos(2x) - \operatorname{sen} x$$

1. Mostre que $g(x) = 2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x$ e conclua quais os zeros de g.
2. Determine os intervalos em que g é crescente.
3. Calcule $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x-1)}{x^2 - 1}$.

(Prova de Aferição, Matemática B, Escolas Profissionais)

QUESTÕES SAÍDAS EM PROVAS ESPECÍFICAS

Dos exercícios seguintes deverá escolher a resposta correcta entre as quatro alternativas que são indicadas no enunciado.

29 Considere a função real de uma variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \dfrac{1}{\pi} \cos \dfrac{\pi x}{2} & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

no intervalo fechado $[-5,\ 4]$.

(A) O máximo de f é igual a 2 e f não tem mínimo.
(B) f não tem máximo e o mínimo de f é igual a −2.
(C) O máximo de f é igual a 2 e o mínimo de f é igual a −2.
(D) O máximo de f é igual a 2 e o mínimo de f é igual a −10.

(Prova Específica, Época Normal, 1993)

30 As coordenadas do ponto de intersecção do eixo dos XX com a tangente ao gráfico da função real de variável real, definida por $y = \cos x - \operatorname{sen}^2 x$, no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$ são:

(A) $(\frac{\pi}{2} - 1, 0)$

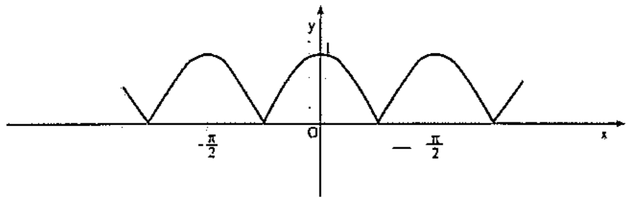
(B) $(-1 - \frac{\pi}{2}, 0)$

(C) $(-1, 0)$

(D) $(\frac{\pi}{2}, 0)$

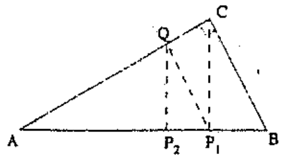
(Prova Específica, Época Especial 1993)

31 O gráfico



pode ser uma representação geométrica da função f, real de variável real definida por:
(A) $f(x) = |\cos 2x|$
(B) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$
(C) $f(x) = \operatorname{sen} |2x|$
(D) $f(x) = \cos |x|$.

(Prova Específica, Época Normal, 1994)



32 Seja [ABC] um triângulo rectângulo em C e tal que $\overline{BC} = a$.
Consideram-se os pontos P_1, P_2 e Q, definidos do seguinte modo:
P_1 é o ponto de [AB] tal que $[CP_1]$ é ortogonal a [AB];
Q é o ponto de [AC] tal que $[P_1Q]$ é ortogonal a [AC];
P_2 é o ponto de [AB] tal que $[QP_2]$ é ortogonal a [AB].

Então,

(A) $\overline{P_1P_2} = a \operatorname{sen} B \cos^2 B$

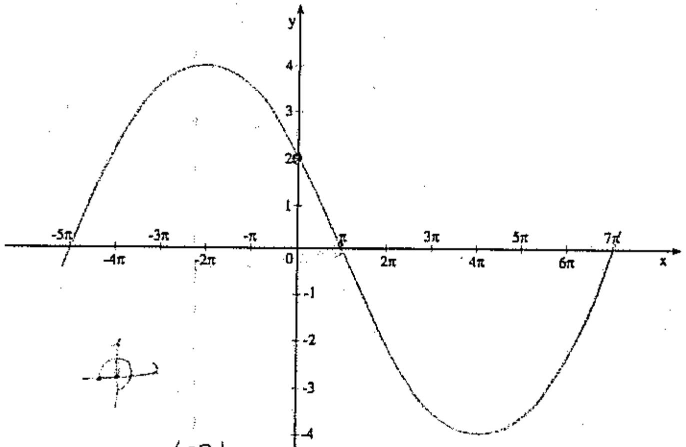
(B) $\overline{P_1P_2} = a \operatorname{sen}^3 B$

(C) $\overline{P_1P_2} = a \operatorname{sen}^2 B \cos B$

(D) $\overline{P_1P_2} = a \cos^3 B$

(Prova Específica, Época Normal, 1994)

33 A curva



é uma representação gráfica da função real de variável real definida por:

(A) $y = 4\,\text{sen}\left(\frac{x}{6} - 5\pi\right)$

(B) $y = 4\,\text{sen}\,\frac{x+\pi}{6}$

(C) $y = 4\,\text{sen}\,\frac{x+5\pi}{6}$

(D) $y = 4\,\text{sen}\,(6(x + 5\pi))$

(Prova Específica, Época Especial, 1994)

34 Seja f uma função real e contínua em IR, tal que
$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Então pode concluir que

(A) a função f é constante

(B) a função f é periódica

(C) a função f é par

(D) a função f é ímpar

Logo f é ímpar.

(Prova Específica, Época Especial, 1994)

35 O valor de $\lim_{h \to 0} \frac{\cos(\pi + h) - \cos\pi}{h}$ é igual a

(A) $+\infty$

(B) 1

(C) -1

(D) 0

(Prova Específica, Época Especial, 1994)

36 "A fronteira entre o dia e a noite". (Actividade de Grupo)

Num dado instante há sobre a Terra lugares onde é dia e lugares onde é noite.
O que se pretende neste trabalho é traçar sobre o mapa a linha que separa o dia da noite.
No momento preciso em que o Sol nasce, por exemplo em Paris, também nasce algures noutro lugar. Mas onde precisamente?
Para o saber, vamos utilizar a fórmula seguinte, válida para todos os lugares onde o Sol nasce no mesmo momento.

$$\cos(h + \lambda) = -\operatorname{tg}\delta \cdot \operatorname{tg}\varphi \quad \bullet$$

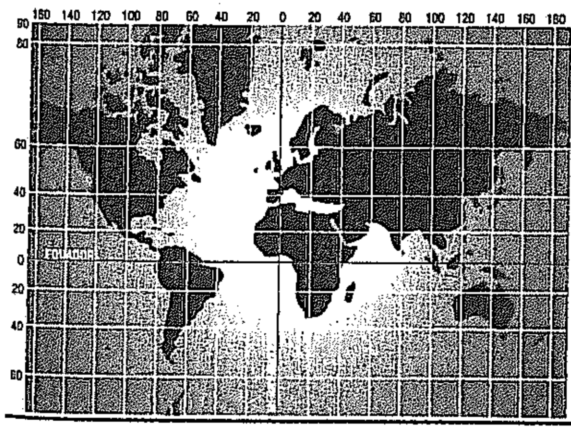
Esta fórmula relaciona quatro números h, λ, δ, φ todos expressos em graus.
- λ e φ são as coordenadas geográficas do lugar;
- λ é a longitude, contada positivamente para Este e negativamente para Oeste;
- φ é a latitude, contada positivamente para Norte e negativamente para Sul;
- h e δ não dependem do lugar mas da data;
- h é o ângulo horário que depende da hora;
- δ é a declinação do Sol que varia ao longo do ano.

Em 21 de Junho de 1993 às 3h49 m, o sol nasce em Paris (λ = 2,34°; φ = 48,° 83) e nesse dia a declinação é δ = 23,44.

1. *Determinação de h*
Usando a fórmula • determine, com a calculadora, o valor de h, em 21 de Junho de 1993 às 3h49 m, a partir dos valores de δ, φ e λ.

2. *Cálculo de longitudes*
Usando a fórmula • determine, com a calculadora, o valor de λ, a partir dos valores de δ, φ e h.

φ	– 60	– 50	– 40	– 30	– 20	– 10	0	10	20	30	40	50	60
λ													



3. *Traçado da Curva*
Localize no mapa os pontos de coordenadas (λ, φ) encontrados e una-os por uma curva.

4. *Prolongamento da Curva*
Procure, calculando, o prolongamento da curva a latitudes superiores a 60° ou inferiores a – 60°.

5. *Conclusões sobre a Curva*
Qual é, sobre o Globo Terrestre, a forma da fronteira entre o dia e a noite.
Que se passa nas antípodas, quando o Sol nasce em Paris?
Como será necessário completar a curva para que seja

ANEXO 11

MANUAIS ESCOLARES DO 5º PERÍODO

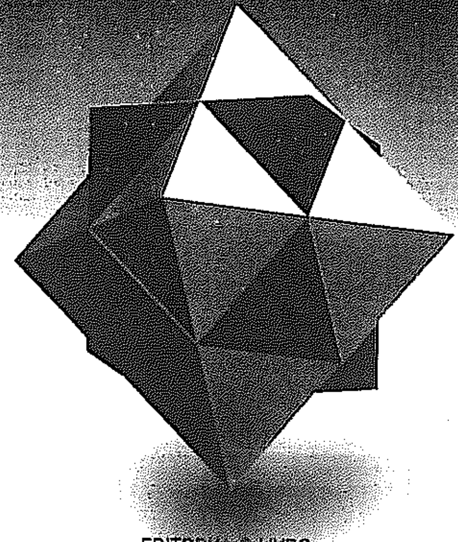
A INTRODUÇÃO DO USO DA CALCULADORA GRÁFICA NOS PROGRAMAS OFICIAIS: O REAJUSTAMENTO DE MARÇAL GRILO (1997)

YOLANDA LIMA / FRANCELINO GOMES

XEQ MAT

MATEMÁTICA

10º



NOVOS PROGRAMAS

EDITORIAL O LIVRO

76. Esboça os gráficos das funções:

a) $x \mapsto 2x - 3$; mostra que é crescente;

b) $x \mapsto 5 - 3x$; mostra que é decrescente;

c) $x \mapsto \frac{12}{x}$; mostra que é decrescente em IR^+.

77. Considera as funções

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 2 \quad e \quad g(x) = -\frac{3}{2}(x - 5)$$

a) Representa f e g no mesmo referencial.

b) Resolve analítica e graficamente as condições
(I) $f(x) = g(x)$ (II) $f(x) \geq g(x)$ (III) $g(x) < 0$

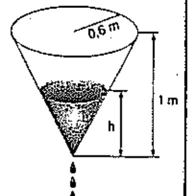
PROBLEMAS DIVERSOS

78. O raio da base de um cilindro de revolução mede 5 cm. Designando por *a* a sua altura em mm,

a) exprime a área lateral S em função de *a*, em cm^2;

b) representa graficamente a função S no intervalo [0; 80].

79. Um recipiente cónico com 0,6 m de raio da base e 1 m de altura tem o vértice voltado para baixo e está cheio de azeite. O recipiente tem um pequeno furo no vértice, por onde vai perdendo líquido.



a) Calcula o volume inicial do azeite.

b) Mostra que a expressão analítica que exprime o volume V do azeite em função da altura h que atinge no recipiente é $V(h) = 0{,}12\,\pi h^3$
e indica o domínio e o contradomínio dessa função.

c) Como procedes para calcular V (0,45) usando calculadora?

80. Um empresário organiza um espectáculo em que as despesas se elevam a 240 000$00.

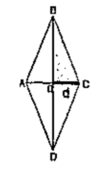
Sabendo que a sala dispõe de 600 lugares e que o preço de cada bilhete é de 800$00,

a) exprime o lucro do espectáculo em função do número n de bilhetes vendidos;

b) qual o menor número de bilhetes que é necessário vender para que não haja prejuízo?

c) quantos bilhetes precisa vender para ter um lucro superior a 100 contos?

81. Em dado losango a diagonal maior é dupla da menor. Designando por d metade da diagonal menor,



a) Exprime o perímetro P em função de d.

b) Encontras algum tipo de proporcionalidade entre P e d?

c) Esboça o gráfico da função $f: d \mapsto P$.

d) Exprime a área do losango em função de d e esboça o gráfico respectivo, para $d > 0 \wedge d \leq 8$.
Podes usar um referencial dimétrico.

82. Uma caixa com tampa, de base quadrada, tem x cm de aresta da base e 100 cm^3 de volume.

a) Exprime a área A da caixa em função de x.

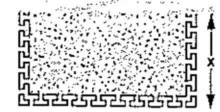
b) Indica o domínio da função A (x).

c) Calcula A (5).

d) Que acontece a A quando x se aproxima de zero?

83. Com 100 m de rede vedam-se 3 lados de um terreno rectangular à beira de um rio.

$c + 2x = 100$
$c = 100 - 2x$



Exprime a área do terreno em função do lado x.

Estuda o domínio da função; esboça o gráfico.

Faz um estudo da função relativamente a zeros, monotonia, extremos, injectividade.

Conclui qual é a área máxima que se pode vedar com os 100 m de rede.

Faz um relatório com desenhos à escala de vários rectângulos possíveis.

84. A fórmula $F = k\,\frac{M\,m}{d^2}$ exprime a força F de atracção de duas massas M e m colocadas à distância d uma da outra.

(I) Considera $k = 3$, $d = 6$ e $M = 24$ m e analisa a função $m \mapsto F(m)$.

a) Que valor toma F quando $m = 6,8 \times 10^4$?

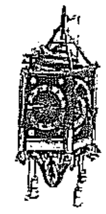
b) Averigua se a função F tem zeros, se é monótona e qual o sinal.

c) Representa graficamente a função.

(II) Considera agora $M = 6$ $m = 12$, $k = 0{,}06$ e analisa a função $d \mapsto F(d)$:

d) Indica o domínio e os valores de F (0,5) e de F $(2,5 \times 10^2)$.

e) Averigua zeros, sinal, intervalos de monotonia.



Exemplo 2.

A área de uma peça metálica é dada pela expressão $5\sqrt{6c-2c^2}$ *em função de certa medida* c, *em metros.*
Para que valores de c *esta expressão tem significado?*

> Resolução:
> Como os números negativos não têm raiz quadrada, terá de ser:
> $$6c-2c^2 \geq 0$$

Temos, de novo, uma **inequação do 2º grau.**

Neste caso, é muito fácil decompor o primeiro membro em factores:

$$2c(3-c) \geq 0$$

Se o 1º membro está decomposto em factores e o 2º membro é igual a 0, podemos usar, quer o método apresentado no exemplo 1, quer outro método baseado na «regra dos sinais» da multiplicação:

1º método: com base no estudo do sinal da função quadrática:	**2º método:** com base na «regra dos sinais»:
$c \mapsto 6c-2c^2 \begin{cases} a<0;\ \Delta>0 \\ \text{Raízes: } c=0,\ c=3 \end{cases}$	$6c-2c^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2c(3-c) \geq 0 \Leftrightarrow$
A função é positiva (sinal contrário ao de a) no intervalo das raízes, logo a resposta é: $0 \leq c \leq 3$.	$\Leftrightarrow \begin{cases} c \geq 0 \\ c \leq 3 \end{cases} \vee \underbrace{\begin{cases} c \leq 0 \\ c \geq 3 \end{cases}}_{\text{impossível}} \Leftrightarrow$
	$\Leftrightarrow 0 \leq c \leq 3$

Exemplo 3.

Para que valores de x é negativa a expressão x^2-4x+5?

> Resolução:
> $x^2-4x+5<0$ é a inequação que temos de resolver.
> Como $\Delta' = b'^2 - ac = 4-5<0$, não há zeros.
> E como $a>0$ o gráfico tem a concavidade voltada para cima. (É o caso III da pág. 157.)
> Por isso, a expressão toma sempre o sinal de a (positivo), ou seja
> $$x^2-4x+5>0,\ \forall_{x \in \mathbb{R}}\ ^{(*)}$$

É também fácil ver que $x^2-4x+5=(x-2)^2+1 \geq 1\ \ \forall_{x \in \mathbb{R}}$

Então, não há nenhum valor de x que satisfaça a condição dada; a inequação $x^2-4x+5<0$ é **impossível.**

Nota: Se a inequação a resolver fosse $x^2-4x+5 \geq 0$ todos os valores reais de x seriam soluções. Era uma condição **universal.**

109. Para que valores da variável a expressão tem significado:

a) $\sqrt{9-a^2}$

b) $\sqrt{t^2+4t-5}$

c) $\dfrac{y+1}{\sqrt{(y+2)^2-4}}$

110. Resolve em $\mathbb{R}$:

a) $t^2-3t-4<0$

b) $3<5a+2a^2$

c) $x(x+2)-5(x+2) \geq 0$

d) $\dfrac{2x(x-1)}{3} < \dfrac{x^2+4}{2}$

e) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \geq 1$

111. Considera a função de variável real

$x \mapsto m(x)=3+2x-x^2$.

a) Resolve $m(x) \leq 0$.

b) Determina o domínio da função

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{m(x)}}$$

112. a) Sendo 80 m o perímetro dum terreno rectangular, exprime a área A em função da altura h.

2c + 2h = 8
c = (80 − 2h)/2
A = h × (80 − …
(quadrática

b) Esboça o gráfico da função $h \mapsto A$ e calcula a área máxima que o terreno pode ter.

vértice é parábola

~~c)~~ Calcula para que valores de h vem $A>200\ m^2$.

(*) Ver Nota sobre quantificadores na página seguinte.

166. Traça os gráficos das funções

$$f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 \quad e \quad g: x \mapsto 5 - \frac{3}{2}x$$

no mesmo referencial e determina nestes as soluções da inequação $5 - \frac{3}{2}x \geq \frac{1}{2}x^2$.

167. Traça no mesmo referencial os gráficos de $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ e de $x \mapsto 3x - x^2$ e assinala as soluções da inequação $\frac{1}{2}x^2 \leq 3x - x^2$.

PROBLEMAS DIVERSOS

168. Um rectângulo de área A tem menos 4 cm de largura do que de comprimento (C).

a) Exprime A em função de C.

b) Sabendo que a área não pode exceder os $21\ cm^2$ qual o maior valor que C pode tomar?

169. Um dos catetos dum triângulo rectângulo tem mais 1 m que o outro:

a) Exprime a área em função do cateto menor e determina o valor deste cateto para o qual a área é superior a $10\ m^2$.

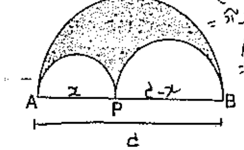
b) Determina o cateto menor sabendo que a hipotenusa tem mais 9 m que ele.

170. A figura seguinte é formada por dois quadrados, um de lado x e outro de lado y, e tem $89\ m^2$ de área e 42 m de perímetro.

a) Exprime y em função de x, sendo $x > y$.

b) Calcula o valor de x (duas soluções).

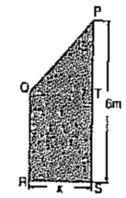
171. Na figura estão um semicírculo de diâmetro fixo $\overline{AB} = d$ e dois outros semicírculos de diâmetros $\overline{AP} = x$ e $\overline{PB}$, variáveis, sendo $P \in [AB]$.



a) Exprime em função de x a área colorida.

b) Que relação deverá existir entre d e x para que a área colorida seja máxima?

172. A secção [PQRS] dum muro tem $10\ m^2$ de área.



a) Exprime $\overline{TP}$ em função de x.

b) Exprime a área de [PQRS] em função de x.

c) Calcula o valor de x.

FUNÇÕES POR TROÇOS. MÓDULO.

173. Resolve em $\mathbb{R}$:

a) $|t^2 - 4t| - 5 > 0$

b) $y^2 \leq |y^3|$

c) $|1 - r^2| < 100$

d) $|-3 - x^2 + 5x| \leq 3$

e) $|a - 2| \geq |a - 1|^{(*)}$

f) $|x - 3| - |x - 1| \leq 0^{(*)}$

(*) quadrar ambos os membros

174. Resolve a inequação $|2x^2 + 3x| > 2$.

175. A tarifa P dum parque de estacionamento é calculada assim:

— 1ª hora ou fracção, 100\$00;

— 2ª hora ou fracção, 80\$00;

— cada hora a mais ou fracção, 50\$00.

Esboça o gráfico de P em função de t.

176. Esboça os gráficos e determina o domínio e o contradomínio de cada uma das funções f:

a) $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } t \neq 0 \\ 2 & \text{se } t = 0 \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ x + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ x - 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ x - 2 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

177. Representa graficamente

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x < -2 \\ -2x & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 4 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

e estuda-a quanto à injectividade, domínio e contradomínio.

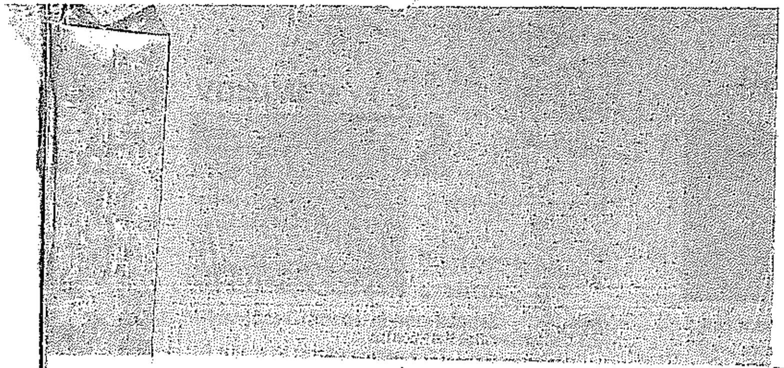
178. Seja g a função de variável real definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Calcula $g(4)$ e $g(0) - g(-1)$.

b) Traça o gráfico de g no intervalo $[-2, 9]$.

XXV
10
36



Matemática 10.º ano

27 OUT 1998 OFERTA

Infinito 10

VOLUME 2

Ana Maria Brito Jorge
Conceição Barroso Alves
Graziela Fonseca
Judite Barbedo

FICHA TÉCNICA

Director Editorial: Diogo Santos
Design Gráfico: Areal Editores
Ilustração: Cristina Souza
Fotografia: José Luís Braga
Imagens © 1996 Photo Disc Inc.
Capa: Vítor Simões

AREAL EDITORES, LDA.
APARTADO 1156 – 4103 PORTO CODEX

DIRECÇÃO EDITORIAL
Rua da Torrinha, 228-H, 3.º andar – 4050 PORTO
TEL. (02) 3393900 – FAX 2005708

DIRECÇÃO COMERCIAL / ARMAZÉM
Rua D. Marcos da Cruz, 1381 – 4460 PERAFITA
TELS. (02) 9959608 / 9966985 / 9967341 – FAX 9959583

LIVRARIA / MATERIAL DIDÁCTICO
Av. da Boavista, 1471 - Loja 10 – 4100 PORTO
TEL. (02) 6000362 – FAX 6068449

AREAL PROFESSOR
Informação Editorial, Café, Livraria, Auditório, Centro de Formação
Rua da Torrinha, 254 – loja A e B – 4050 PORTO
TEL. (02) 3393900 – FAX 3393910
Linha Verde Professor
0 800 200758

www.arealeditores.pt
Email: areal@mail.telepac.pt

Este produto ecológico não agride o meio ambiente porque é isento de cloro elementar

a paixão de aprender AREAL EDITORES

1.5 Função quadrática

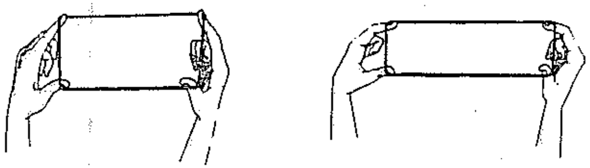
ACTIVIDADE 9

Problema de Euclides – *Um velho problema de optimização*

Entre os problemas para os quais se procura uma solução considerada *óptima* destaca-se, pela sua simplicidade e riqueza, aquele que será, porventura, o mais antigo problema de optimização conhecido e se encontra tratado na obra de Euclides:

"De todos os rectângulos com o mesmo perímetro, qual o que tem área máxima?"

Explore o problema considerando, por exemplo, os rectângulos de perímetro igual a 40 cm e tenha em conta que a solução pode ser encontrada por via geométrica, por via algébrica ou recorrendo à calculadora gráfica.



fio tem comprimento fixo.

ACTIVIDADE 10

Umas certas funções...

Q1 Considere a expressão designatória $x(k-x)$.

Atribua alguns valores diferentes ao parâmetro real k e introduza na calculadora as correspondentes funções $y_n = x(k-x)$.

Por exemplo,

$$y_1 = x(4-x)$$
$$y_2 = x(6-x)$$
$$y_3 = x(8-x)$$
$$y_4 = x(10-x)$$

a) Quais são os zeros de cada uma das funções definidas?

b) Leia as coordenadas do *vértice* de cada uma das curvas que obteve.
(Como poderá verificar, as curvas obtidas têm uma forma comum característica; recebem o nome de parábolas).

c) Faça uma interpretação dos resultados gráficos e numéricos obtidos.

Q2 Repita o estudo que fez no número anterior, considerando agora funções do tipo:

$$y_n = x(k+x)$$

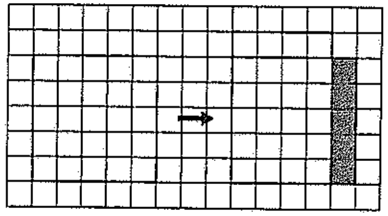
P= $2x + 2y = 40$
$y = \frac{40-2x}{2}$

Exploremos o **problema de Euclides** nas diferentes abordagens que ele permite:

I. Geometricamente

A observação de diversos rectângulos, todos eles com o mesmo perímetro, sugere-nos que o quadrado é o que tem a maior área.

A demonstração geométrica é muito simples e sugestiva:



Partindo de um quadrado, constrói-se um rectângulo, que tem uma dimensão um pouco maior e a outra, outro tanto menor do que o lado do quadrado.

A barra roxa é maior que a barra azul, logo a área do quadrado inicial é maior do que a do rectângulo.

II. Algebricamente

Se considerarmos um quadrado com 10 cm de lado e diminuirmos sucessivamente uma unidade a um dos lados acrescentando-a ao outro, obtemos áreas progressivamente menores:

$10 \times 10 = 100$
$11 \times 9 = 99$ .... $(10+1)(10-1) = 99$
$12 \times 8 = 96$ .... $(10+2)(10-2) = 96$
$13 \times 7 = 91$ .... $(10+3)(10-3) = 91$
$14 \times 6 = 84$ .... $(10+4)(10-4) = 84$
$15 \times 5 = 75$ .... $(10+5)(10-5) = 75$

Constata-se que "$10 + \star$" vezes "$10 - \star$" é menor que 10×10 e que, quanto maior for $\star$, menor é o valor do produto.

O enunciado algébrico correspondente ao resultado estabelecido geometricamente por Euclides é, então, o seguinte:

Se $p+q$ for constante, então $p \times q$ é máximo quando $p = q$.

Todos os rectângulos acima considerados têm o mesmo perímetro (40 cm); o de maior área é precisamente o quadrado com 10 cm de lado.

RECORDE

$(10+a)(10-a) = 100 - a^2$
e
$100 - a^2 < 100$ se $a \neq 0$

Calculadora

Utilize:

WINDOW	FORMAT
Xmin = 0	
Xmax = 20	
Xscl = 2	
Ymin = 0	
Ymax = 105	
Yscl = 10	

Tecle [Y=] e defina $Y_1 = x$ e $Y_2 = 20 - x$. Em seguida, defina $Y_3 = Y_1 \times Y_2$, procedendo do seguinte modo:

- Digite [2nd] [Y-VARS], [1] e novamente [1], para copiar Y_1, para o editor de funções.
- Digite o sinal [×]
- Repita o procedimento idêntico ao anterior para copiar Y_2: [2nd] [Y VARS] [1] e [2]
- Use [GRAPH] para obter os gráficos de Y_1, Y_2 e Y_3.
- Para ler as coordenadas de um ponto:

Use a tecla [TRACE] segundo o procedimento já indicado atrás.

$= 20x - x^2$
$= k_n x - x^2$
$= k_n x + x^2$

III. Recorrendo à calculadora gráfica

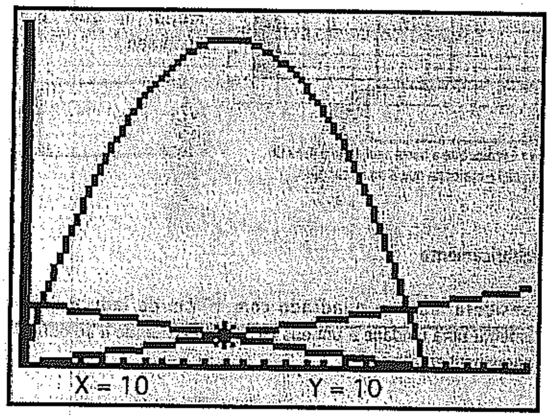
Consideremos ainda a família dos rectângulos cujo comprimento e largura somam 20 unidades.

Se considerarmos que a largura vale x, então o comprimento é igual a 20 – x.

Introduzindo na calculadora as funções

$y_1 = x$
$y_2 = 20 - x$
$y_3 = y_1 \times y_2$

obtemos, depois de definir adequadamente o rectângulo de visualização os seguintes gráficos:



A linha curva – uma **parábola** – corresponde à representação gráfica da função definida por **y = x(20 – x)** ou seja, a função que representa a área do rectângulo de largura x e comprimento **20 – x**.

A leitura das coordenadas do **vértice** da parábola – ponto correspondente ao valor máximo da função – conduz-nos a:

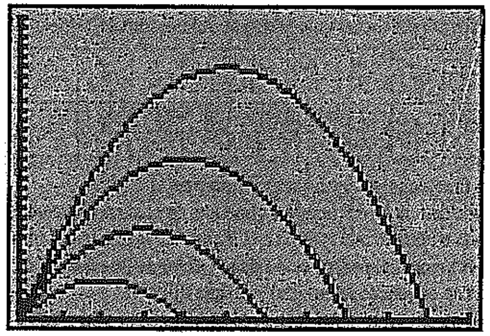
x = 10 e y = 100 (este último é o valor da área máxima).

Também na calculadora gráfica nos é possível ver o que se passa quando os dados do problema forem outros, ou seja, quando o perímetro do rectângulo tiver valores diferentes de 40.

É o que acontece ao resolvermos a ACT. 10 – *Umas certas funções...*

Obtemos novas funções com gráficos do mesmo tipo.

Definindo o rectângulo de visualização de modo que todos os vértices sejam visíveis, o aspecto dos vários gráficos é:



As funções que acabamos de tratar ao resolvermos as actividades 9 e 10 são definidas por polinómios do 2º grau e o seu gráfico é uma linha curva chamada **parábola**.

Vamos agora fazer o estudo da família de funções definida por

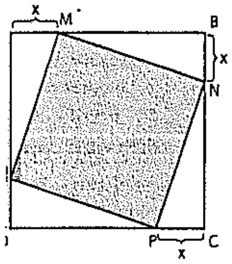
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax^2 + bx + c$$

sendo a, b e c números reais ($a \neq 0$).

Designam-se por **funções quadráticas** e revestem-se de grande importância na modelação e no estudo de diversos fenómenos no âmbito da ciência e da tecnologia.

Nesta família de funções tem particular relevância a função em que a = 1 e b = c = 0 e é com ela que iniciamos o estudo das **funções quadráticas**.

Resolução de inequações do 2.º grau



Suponhamos que nos é colocado o seguinte problema:

Considere-se o quadrado [ABCD] tal que $\overline{AB} = 6$.
Constrói-se o quadrado [MNPQ] inscrito em [ABCD] de modo que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ} = x$.

Pretende-se saber:
a) Como varia a área A(x) de [MNPQ] com os valores de x.
b) Para que valores de x é mínima a área de [MNPQ] e qual o seu valor neste caso.
c) Quais os valores de x para os quais a área A(x) é igual a 20 unidades quadradas?
d) Para que valores de x é $A(x) > 30$?

Resolução
Procuremos, então, as respostas pretendidas:
a) Comecemos por exprimir $\overline{MN}$ em função de x.
Pelo Teorema de Pitágoras, temos $\overline{MN}^2 = x^2 + (6-x)^2$, donde:

$\overline{MN}^2 = x^2 + 36 - 12x + x^2$

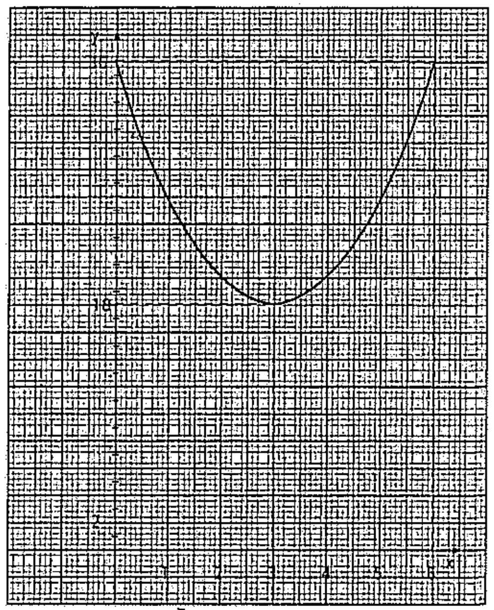
e, por fim,

$\overline{MN}^2 = 2x^2 - 12x + 36$

Ora, como [MN] é precisamente o lado do quadrado,

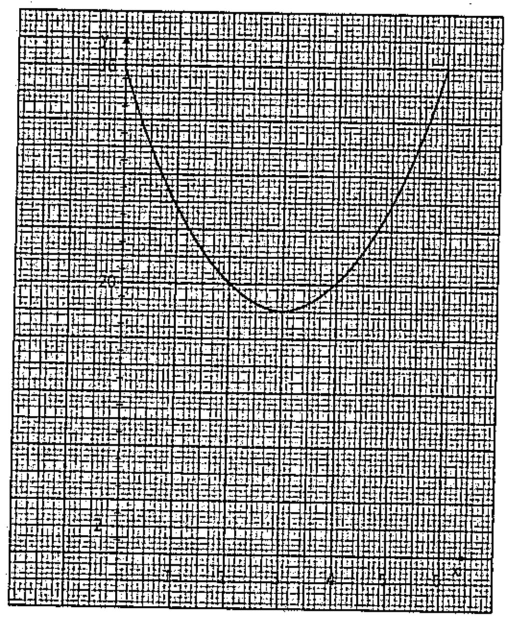
$\overline{MN}^2 = A(x) = 2x^2 - 12x + 36$ com $0 < x < 6$

Elaboremos e analisemos o gráfico desta função quadrática e retiremos dele as conclusões pedidas sobre a variação da área A(x).



b) A área será mínima quando x = 3 unidades e o valor da área será, nesse caso, 18 unidades quadradas.

c)

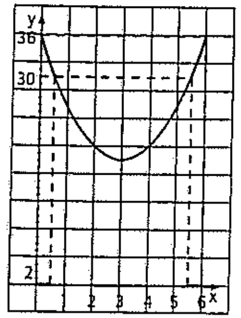


Por observação do gráfico, depois de traçada a recta horizontal y = 20, podemos concluir que a área será igual a 20 quando x = 2 ou quando x = 4, valores estes que podem ser obtidos quer recorrendo ao quadro de valores quer à resolução analítica da equação:

$$2x^2 - 12x + 36 = 20$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

e, aplicando a fórmula resolvente,
$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$.

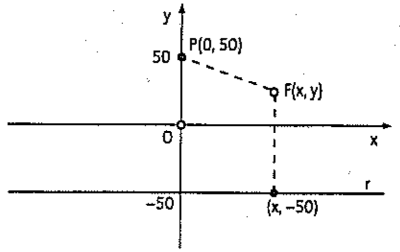


d) Podemos determinar valores aproximados de x que satisfaçam a condição $A(x) > 30$, recorrendo também à representação gráfica.

Se pretendermos, contudo, uma maior aproximação, devemos recorrer a uma tabela de valores. Desse modo concluímos que]0; 0,55[∪]5,45; 6[é uma boa aproximação da solução pretendida.

Poderíamos, no entanto, resolver analiticamente a inequação e obter valores exactos:

$2x^2 - 12x + 36 > 30$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 6 > 0$

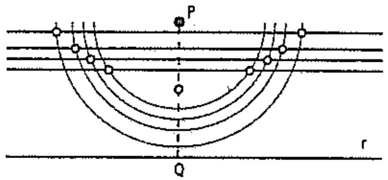


$$y + 50 = \sqrt{x^2 + (y - 50)^2}$$

ou seja

$$(y + 50)^2 = x^2 + (y - 50)^2$$

Marta – Olha, enquanto falavas, já determinei muitos furos. É só traçar circunferências com centro em P e rectas paralelas a r!



Rui – Mas eu também estou quase a chegar ao fim. É só fazer mais uns cálculos.

$$y^2 + 100y + 2500 = x^2 + y^2 - 100y + 2500 \Leftrightarrow$$

$$200y = x^2$$

$$y = \frac{1}{200} \cdot x^2$$

Com esta igualdade posso determinar os furos que quiser, atribuindo valores a x.
Marta – Parece que, por caminhos diferentes, ambos resolvemos o problema.
Rui – E a forma do tubo tem de ser a de uma parábola.
Bem agora é só pegar na calculadora introduzir a "minha" expressão, definir um rectângulo de visualização apropriado

$$[-10 \times 10] \text{ por } [-0{,}1 \times 1{,}5]$$

– e eis que a calculadora apresenta num gráfico uma curva semelhante à tua curva.
Marta – Parece magia!
Rui – É, é... sabedoria!

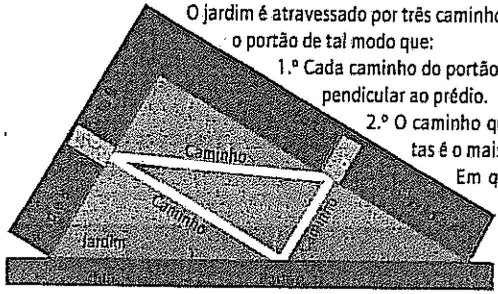
Repense as resoluções e repare que, para trabalharmos com propriedades, tivemos de usar como intermediária a linguagem simbólica matemática, noções e definições matemáticas que não aparecem explicitamente nem no enunciado (*furos-pontos, rio-recta, equidistantes, distância a um ponto* e *a uma recta*) nem na resposta (os furos têm que se dispôr sobre um arco de parábola o que foi mostrado numa figura geométrica ou por uma expressão analítica).
Ao responder a um problema, temos de executar sempre um trabalho mais ou menos complexo, em dois sentidos: o de codificar e descodificar a interacção realidade/matemática.

Outros desafios

Encontra-se à venda uma colecção muito interessante de livros intitulada "DESAFIOS" – problemas e histórias da Matemática no *PÚBLICO*, de Eduardo Veloso e José Paulo Viana e ilustração de Cristina Sampaio, das Edições Afrontamento.
Para lhe despertar o interesse por estes livros vamos pôr-lhe três problemas do "DESAFIOS 4". Depois de resolver estes, pode procurar mais nos referidos livros.

1. O caminho mais curto

As fachadas de dois prédios fazem entre si um ângulo recto.
O muro que os separa da rua limita um jardim triangular.



O jardim é atravessado por três caminhos que ligam entre si o portão de tal modo que:
1.º Cada caminho do portão até às portas é perpendicular ao prédio.
2.º O caminho que liga as duas portas é o mais curto possível.
Em que ponto do muro está o portão?

2. Dona Mafalda, a benfeitora

Dona Mafalda, mulher de D. Afonso Henriques, era uma boa alma. Em 1143, para comemorar a fundação do novo país, resolveu depositar 1 escudo no Banco de Portugal.
O banco comprometeu-se a pagar uma taxa anual de 5%.
O dinheiro acumulado destinava-se a ser distribuído pelos pobres de Portugal no ano 2000.
Quanto vai receber cada pobre?
(Não sabe quantos pobres há em Portugal?
Não faz mal, imagine que somos quase todos pobres...)

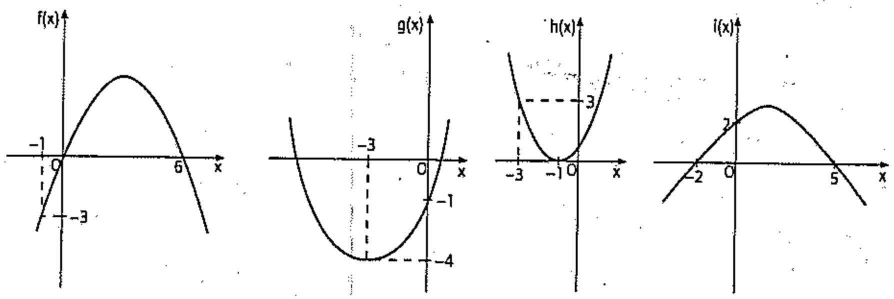
3. Cubos e cores

Dispomos de seis cores para pintar as faces de uma série de cubos. Em cada cubo, as faces terão de ser de cores diferentes.
Não esquecendo que dois cubos são iguais quando um se pode obter por rotação do outro, quantos cubos diferentes se consegue pintar?

34 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

1. $x^2 - 4 > 0$ 2. $x^2 - 9 \leq 0$ 3. $x^2 - 4x - 5 > 0$ 4. $x^2 \geq 5$
5. $3x^2 + 5x - 2 > 0$ 6. $x^2 \leq 4x$ 7. $4x^2 + 3 \geq 0$ 8. $x^2 - 5x < -6$
9. $(x-5)^2 - 9 \leq 0$ 10. $-2x^2 + 3x > -2$ 11. $-2x^2 + 4 > 0$ 12. $x^2 + 5x + 1 > 2$
13. $x(x-2) < -3$ 14. $8 - x^2 \leq 0$ 14. $(x-5)(3-x) \geq 0$ 16. $3x^2 + x \geq -3$

35 Defina analiticamente as funções quadráticas que a seguir se encontram representadas graficamente.

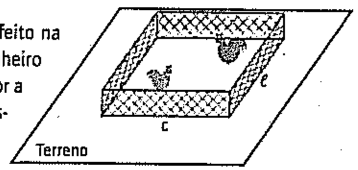


36 Represente graficamente as funções reais de variável real assim definidas:

$f: x \to |x^2 - 4|$ $g: x \to |2x^2 + 4x|$ $h: x \to \left|-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right|$

$i: x \to \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 3x - 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $j: x \to \begin{cases} (x-3)^2 + 2 & \text{se } x \leq 4 \\ -x + 3 & \text{se } x > 4 \end{cases}$ $m: x \to \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ -x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

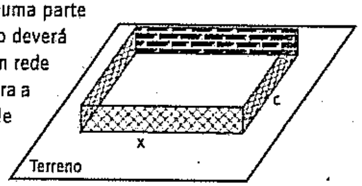
37 Um agricultor comprou 6 metros de rede para fazer um galinheiro rectangular, como ilustra a figura.



Para optimizar o empate de capital feito na compra da rede, pretende que o galinheiro tenha área máxima. Ajude o agricultor a resolver o problema seguindo os passos que a seguir se indicam:

1. Exprima ℓ em função de c.
2. Exprima a área A do galinheiro em função de c.
3. Determine o valor de c para o qual a área é máxima e o correspondente valor de ℓ.

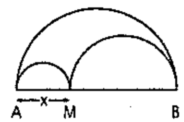
38 Dispõe-se de 20 000$00 para vedar uma parte de um terreno rectangular. A vedação deverá ser feita em tijolo num dos lados e em rede nos três lados restantes, conforme ilustra a figura ao lado. Cada metro de rede custa 200$00 e cada metro de parede em tijolo, 600$00. Qual a área máxima que se consegue vedar?



Tente resolver o problema seguindo os passos que a seguir se sugerem:

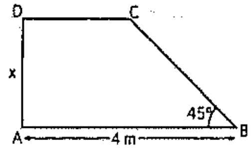
1. Exprima c em função de x, recorrendo ao capital de que se dispõe.
2. Prove que a área da parte do terreno a vedar em função de x é $A(x) = 50x - 2x^2$.
3. Determine o valor de x para o qual a área A é máxima e o valor dessa área.

39 Designando por A(x) a área do domínio limitado pelas três semicircunferências de diâmetro [AB], [AM] e [MB], onde $\overline{AB} = 6$ cm e $\overline{AM} = x$, sendo M um ponto de [AB].



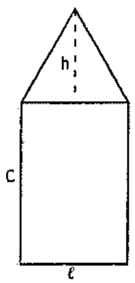
1. Mostre que $A(x) = \frac{\pi}{4}(6x - x^2)$
2. Represente graficamente a função $A: x \to \frac{\pi}{4}(6x - x^2)$ e determine x de modo que a área A seja máxima.

40 A figura representa um jardim com a forma de um trapézio rectângulo.



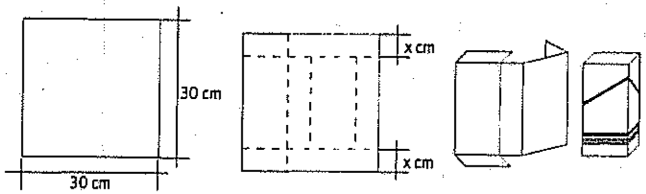
1. Escreva $\overline{DC}$ em função de x.
2. Mostre que a área do trapézio em função de x é dada pela expressão $A(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$
3. Calcule a altura x do trapézio de modo que a área seja inferior a 6m².
4. Recorrendo à representação gráfica da função A, determine o valor de x para o qual é máxima a área do jardim e indique o seu valor.

41 As janelas de uma casa têm 6 metros de perímetro e a configuração da figura – um rectângulo encimado por um triângulo equilátero.



1. Exprima c e h em função de ℓ.
2. Exprima a área A da janela em função de ℓ e represente graficamente a função $\ell \to A(\ell)$. (Utilize valores aproximados às décimas.)
3. Determine c e ℓ de modo que entre pela janela a maior quantidade de luz possível (isto é, a área seja máxima).

42 O fabrico de embalagens de cartão processa-se, numa dada fábrica, a partir de folhas quadradas com 30 cm de lado, por recorte e dobragem, conforme ilustra a figura:



1. Depois de observar atentamente a figura, construa um modelo em cartolina. (Atribua um valor a x.)
2. Calcule as dimensões da embalagem e o seu volume quando $x = 7$cm.
3. Qual o intervalo a que x deve pertencer para que a construção seja teoricamente possível?
4. Exprima as dimensões da embalagem em função de x.
5. Verifique que o volume da embalagem pode ser expresso em função de x da seguinte forma

$$V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$$

6. Será possível aquela fábrica produzir embalagens de 0,5 l usando o mesmo processo de fabrico? Investigue todas as possibilidades e comente a viabilidade prática de cada uma delas.

Sugestão

- Para responder a esta questão terá que determinar as soluções da equação $V(x) = 500$ ou $V(x) - 500 = 0$, que lhe é equivalente.
  Para isso, comece por preencher o seguinte quadro de valores, recorrendo à calculadora:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
V(x)																
f(x) = V(x) − 500																

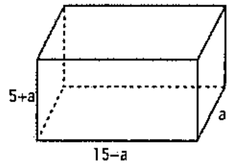
- O preenchimento do quadro permite encontrar uma solução α. Qual o seu valor? Quais são, neste caso, as outras dimensões da caixa?
- Para averiguar da existência de outras soluções, comece por verificar que f(x) se pode escrever na forma

$$(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$

(Substitua α por 10, efectue o produto indicado, determine os números reais a, b e c que tornam a expressão *idêntica* a f(x) e resolva então a equação $f(x) = 0$.)
- Pronuncie-se agora sobre a viabilidade prática das soluções encontradas.

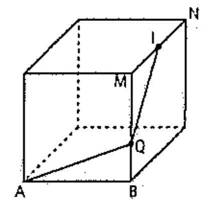
7. Com base nos cálculos já efectuados, parece-lhe possível a construção de caixas com a capacidade de um litro?
8. Represente graficamente a função V no intervalo [0, 15] e encontre sobre o gráfico as soluções pedidas em 6. e 7.

43 A figura representa uma caixa em forma de paralelepípedo, cujas dimensões, em centímetros, estão expressas na figura.



1. Prove que o volume da caixa é dado por $V(a) = -a^3 + 10a^2 + 75a$
2. Construa um quadro de valores e represente a função $a \to V(a)$ no intervalo [0, 15].
3. Recorrendo ao gráfico, determine um valor de a, aproximado às décimas, para o qual o volume da caixa é máximo, e indique o valor desse volume.

44 O cubo da figura tem 2 cm de aresta. Uma formiga desloca-se de A para I, ponto médio da aresta [MN], passando sempre por um ponto (Q) da aresta [BM] e percorrendo segmentos rectilíneos. Designando $\overline{BQ}$ por x e por D(x) a distância percorrida pela formiga:



1. Escreva uma expressão de D(x).
2. Entre que valores pode variar x?
3. Recorrendo a uma calculadora gráfica, represente a função D e apresente um valor aproximado de x a menos de 0,01 para o qual a distância percorrida pela formiga seja mínima.

45 f e g são funções definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$f : x \mapsto (x-2)^2$$

$$g : x \mapsto 5(x-2)(3x-5)$$

1. Determine, sob a forma de polinómio, a expressão da função
   $f(x) + g(x)$
2. Considere $k(x) = f(x) - g(x)$. Factorize k(x).

46 Os polinómios f(x) e g(x) são definidos por

$$f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 \quad \text{e} \quad g(x) = 2(x-3)(x+2)$$

Verifique, recorrendo ao algoritmo da divisão, que f(x) é divisível por g(x) e determine o polinómio quociente.

47

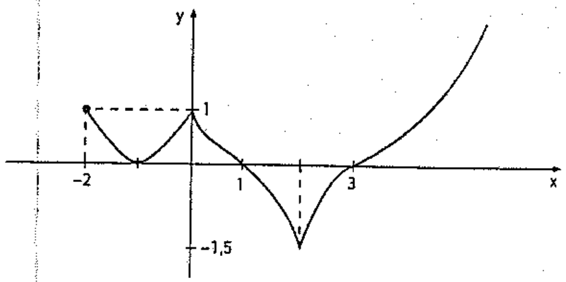
1. Verifique, recorrendo ao algoritmo da divisão, que:
   $20x^6 - 54x^4 + 32x + 2$ é divisível por $x - 1$.
2. De um modo geral, que relação deve haver entre os coeficientes de um polinómio para que este seja divisível por $x - 1$?

48 Desenvolva e ordene, segundo as potências decrescentes de x, os polinómios:

1. $(x-1)^2(x^2+x+1)^2$
2. $(x^2+1)^3 - 2(x^2+x)(x-1) - 3(x+1)^3$

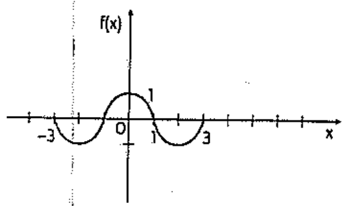
80 Sendo $t(x) = 2(x + \sqrt{3})^2 (x - \sqrt{2})$, determine quando é positiva $t(2x)$.

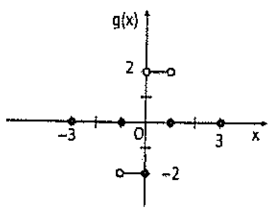
81 Considere a função S de domínio $[-2, +\infty[$ cujo gráfico é:



1. Sobre o mesmo referencial, esboce o gráfico de $S(x + 1)$.
2. Indique as soluções de $|S(x)| + S(x) = 0$.

82 Considere as funções reais de variável real f e g a seguir representadas.





Faça um esboço gráfico de cada uma das funções

1. $g(|x|) = 0$ 2. $(f + g)(x)$ 3. $(f \times g)(x)$

83 As representações gráficas das funções polinomiais *f* e *g* tais que

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \qquad g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 1$$

têm três pontos de intersecção A, B e C.

1. Determine as coordenadas desses pontos.
2. Os pontos A, B e C são colineares? Porquê?

84

1. Desenhe no mesmo referencial e determine as coordenadas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções f e g definidas por
   a) $f(x) = x^2$ $g(x) = x^4$
   b) $f(x) = x^3$ $g(x) = x^5$
2. Indique os valores de x que em cada um dos casos satisfaz a condição:
   $g(x) \geq f(x)$

85

1. Desenhe os gráficos das funções
   $f(x) = (x - 3)^2$ e $g(x) = (x - 3)^4$
   no mesmo referencial considerando os rectângulos de visualização:
   a) $[-10, 10]$ por $[-1000, 1000]$
   b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
   c) $[1, 5]$ por $[-2, 2]$
2. Graficamente, determine as soluções da condição
   $(x - 3)^2 > (x - 3)^4$
3. Confirme algebricamente a solução encontrada.

86 Indique as transformações que permitem obter, a partir do gráfico de $y = x^4$, os gráficos de:

1. $y = (x + 2)^4 + 3$
2. $y = -(x + 2)^4 - 4$

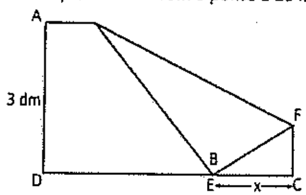
87 Resolva analiticamente as inequações confirmando de seguida a resposta através do gráfico.

1. $x^2 \cdot (x - 3) \geq 0$
2. $2x^3 > 3x$
3. $x^3 - 5x^2 - x + 5 \leq 0$
4. $x^3 - x^2 \geq 2x$
5. $|x^4 - 4x^2| \leq 0$

88 Represente a função definida por $f(x) = 33x^3 - 100x^2 + 101x + 5$, em cada um dos rectângulos de visualização:

1. $[-10, 10]$ por $[-1000, 1000]$
2. $[-1, 1]$ por $[-100, 100]$
3. $[0,9; 1,1]$ por $[20, 50]$
4. Aprofunde o estudo do comportamento da função no intervalo $[0,9; 1,1]$ recorrendo conjuntamente às funções TABLE e TRACE e ao cálculo de imagens no ecrã principal.

89 Considere uma folha rectangular de papel de 3 dm de largura.
Dobra-se o canto B de modo que coincida com o ponto E do lado oposto.



Mostre que a área A(x) do triângulo rectângulo [ECF] é dada por

$$A(x) = 0,75x - \frac{1}{12}x^3.$$

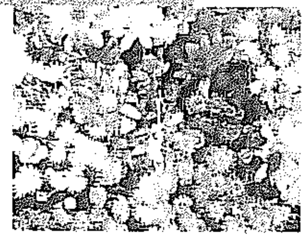
Qual o seu valor máximo?

Maria Augusta Ferreira Neves

FUNÇÕES 1

Matemática - 10º Ano

Contém:
Informação complementar sobre calculadoras gráficas



Esta obra é constituída por 3 Partes.

PORTO EDITORA

PROBLEMAS PROPOSTOS

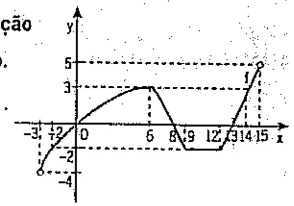
18 O corpo submerso

Considere-se que o modelo matemático que descreve a relação entre a pressão **p**, exercida sobre as paredes de um corpo submerso, e a distância **d** a que este se encontra da superfície, é uma função afim.
Sabe-se que à superfície a pressão é de uma atmosfera (1 atm) e a 10 metros de profundidade é 1,98 atmosferas.

18.1 Escreva **p** em função de **d**.

18.2 A que profundidade a pressão é o triplo da verificada à superfície? Justifique.

19 Interpretação do gráfico de uma função



Considere a função f cujo gráfico está ao lado.

19.1 Indique o domínio e o contradomínio de f.

19.2 Quais os valores de x para os quais $f(x) = 0$?

19.3 Indique os intervalos em que a função é negativa.

19.4 Identifique as soluções da equação em $x : f(x) = -2$.

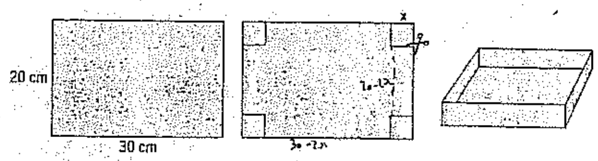
19.5 Indique os maximizantes e os minimizantes de f.
Construa a tabela de variação de função.

19.6 Indique os valores de x de modo que:

a) $f(x) > 0$; b) $f(x) > 3$; c) $-2 < f(x) \leqslant 0$.

20 O volume da caixa

Tem-se uma cartolina rectangular com 30 cm de comprimento e 20 cm de largura. Pretende-se construir uma caixa sem tampa, cortando nos quatro cantos um quadrado de lado x.



20.1 Escreva a expressão do volume da caixa. (30 - 2x)(20-2x)x

20.2 Qual é o domínio da função?

20.3 Use a calculadora gráfica para obter o gráfico de função que escreveu em 20.1.

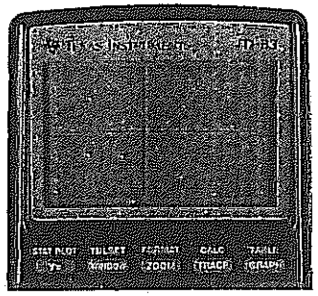
20.4 Indique um valor aproximado de x para o qual o volume da caixa é máximo. (Utilize o comando *TRACE* da calculadora gráfica.)

EXEMPLO 5 Determinar o domínio de uma função

Determine-se o domínio da função real de variável real definida por:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}}$$

Resolução

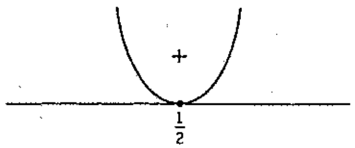


$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - x + \frac{1}{4} \geqslant 0\right\}$$

Zeros:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$



O domínio da função é $\mathbb{R}$.

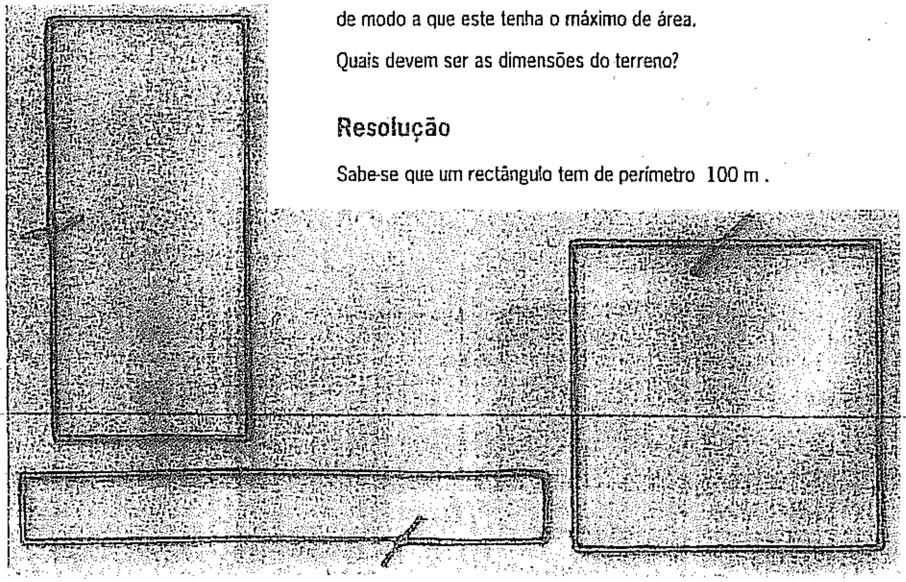
EXEMPLO 6 A importância do vértice

Com cem metros de rede pretende-se vedar um terreno rectangular de modo a que este tenha o máximo de área.

Quais devem ser as dimensões do terreno?

Resolução

Sabe-se que um rectângulo tem de perímetro 100 m.

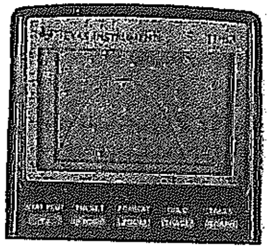


$P = 2x + 2y$

$P = 100$

$2x + 2y = 100$

$y = 50 - x$



A área do rectângulo é:

$A = xy$

$A = x(50 - x)$

$A = -x^2 + 50x$

Com a calculadora gráfica obtém-se o gráfico desta função.

Pretende-se saber qual o valor máximo de A.

Como os zeros da função são 0 e 50, o eixo de simetria é a recta $x = 25$. Para $x = 25$,

$A = 25(50 - 25)$

$A = 625$

A área máxima é $625\ m^2$. Neste caso $x = y = 25$.

O terreno terá a forma de quadrado com 25 metros de lado.

Nota

$y = -x^2 + 50x$

$y = -(x^2 - 50x)$

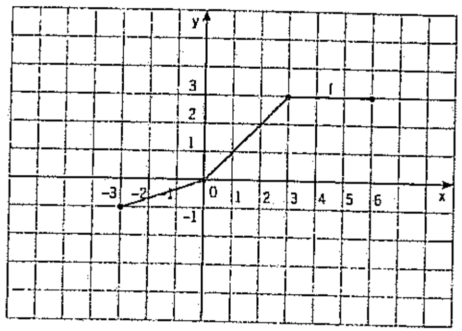
$y = -(x^2 - 50x + 625) + 625$

$y = -(x - 25)^2 + 625$

O vértice da parábola é o ponto de coordenadas $(25, 625)$.

7. FUNÇÕES DEFINIDAS POR RAMOS

Sempre que para definir uma função são necessárias duas ou mais expressões algébricas diz-se que a função está definida por ramos.



A função f, real de variável real, da figura é algebricamente definida por:

$$x \mapsto y = \begin{cases} \frac{1}{3}x & \text{se } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ x & \text{se } 0 < x < 3 \\ 3 & \text{se } 3 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$$

PROBLEMAS RESOLVIDOS

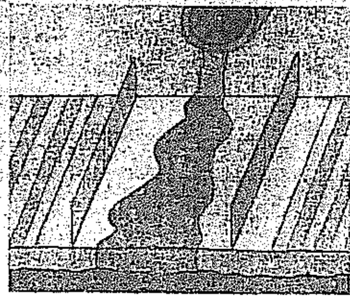
t	0		$\frac{-3+\sqrt{6}}{-2}$		$\frac{-3-\sqrt{6}}{-2}$	
x(t)	$-$		0	$+$	0	$-$

$$\frac{-3+\sqrt{6}}{-2}<t<\frac{-3-\sqrt{6}}{-2} \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{6}}{2}<t<\frac{3+\sqrt{6}}{2}$$

$0{,}2752\ldots < t < 2{,}7247\ldots$; $2{,}7-0{,}2=2{,}5$.

Conclui-se então que a bola esteve acima de três metros de altura cerca de 2,5 segundos .

3



Tem-se uma "folha" de metal com 50 cm de largura.

Pretende-se fazer uma peça para conduzir a água de uma conduta de águas pluviais, como mostra a figura, dobrando de cada lado, na vertical, uma parte da folha com a mesma altura x .

Para que a quantidade de água transportada seja máxima, qual deve ser o valor de x ?

Resolução

Para que a quantidade de água transportada seja máxima deve-se considerar máxima a secção feita por um plano perpendicular à base.

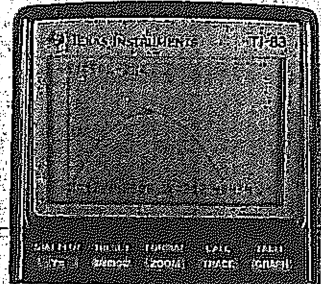
$A=(50-2x)\cdot x$

$A=50x-2x^2$

$A=-2x^2+50x$

$A=-2\left(x^2+25x+\frac{625}{4}\right)+\frac{625}{2}$

$A=-2\left(x+\frac{25}{2}\right)^2+\frac{625}{2}$



O vértice da parábola é $\left(\frac{25}{2},\frac{625}{2}\right)$.

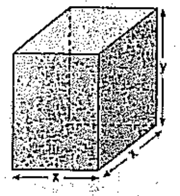
A área máxima consegue-se para $x=12{,}5$ cm e é $312{,}5\ \text{cm}^2$.

Confirme-se os cálculos usando uma calculadora gráfica.

PROBLEMAS PROPOSTOS

15 A caixa do presente

Para embalar uma peça de louça de colecção a empresa "Vista contente" produziu uma caixa com a forma de um prisma quadrangular regular.
A caixa levará uma fita dourada cobrindo todas as arestas da caixa.
Para cada caixa são necessários 160 cm de fita dourada.



De acordo com a figura:

15.1 determine o valor de x, em função de y; $8x+4y=160 \Leftrightarrow x=\frac{160-4y}{8}$
$\Leftrightarrow x = 20-\frac{y}{2}$

15.2 determine um valor aproximado, a menos de uma décima, para o volume máximo da caixa; $V = x \times x \times y = \left(20-\frac{y}{2}\right)^2 \cdot y$

15.3 se pretender um volume para a caixa de $2000\ \text{cm}^3$, qual deve ser o valor de x?

16 O míssil

Um míssil terra-ar é lançado na vertical de tal maneira que, durante os primeiros 40 segundos, deverá, em t segundos, atingir uma altura de

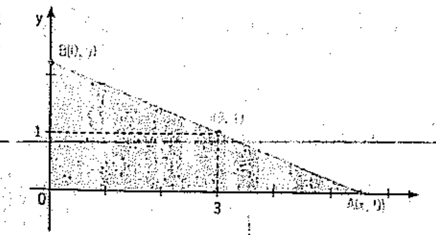
$$s = \frac{3}{2}t^2 \text{ metros}$$

16.1 Em que instante o míssil está a 12 km do solo?

16.2 Qual é a velocidade média do míssil durante os primeiros 40 segundos?

A altura do triângulo rectângulo

Na figura a recta AB contém o ponto de coordenadas (3, 1).
Os pontos de intersecção da recta com os eixos coordenados e a origem são vértices de um triângulo rectângulo do 1.° quadrante.

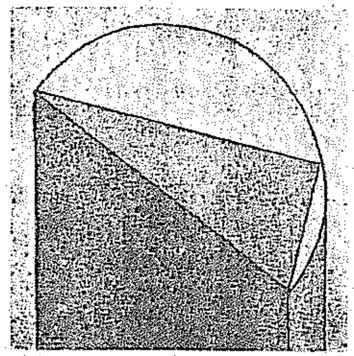


Escreva a altura do triângulo rectângulo em função de x.

PROBLEMAS PROPOSTOS

18 O triângulo rectângulo

A área de um triângulo rectângulo é $60\ \text{cm}^2$.
O triângulo está inscrito numa semicircunferência cujo diâmetro excede em 2 cm um dos lados do triângulo.
Se esse lado tem x cm de comprimento:

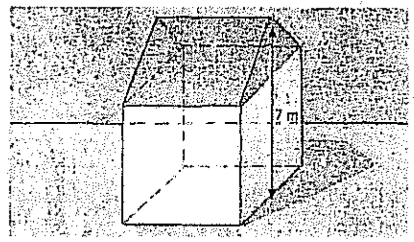


18.1 Mostre que:
$$x^3 + x^2 = 3600$$

18.2 Determine, em função de x, o perímetro do triângulo.

19 O armazém

Observe a figura.



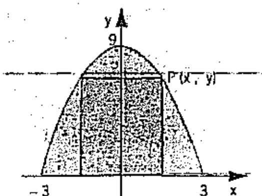
A base tem a forma de um cubo, com x metros de aresta, onde assenta um prisma triangular regular.

19.1 Mostre que o volume V é dado por:

$$V = \frac{1}{2}x^2(7-x) + x^3$$

19.2 Determine um valor aproximado de x, a menos de uma centésima, se $V = 100\ \text{m}^3$.

20 O rectângulo na parábola



$a(x-3)(x+3) = a(x^2-9)$
$= -(x^2-9)$
$A_\square = 2x \times (-x^2+9)$

Observe a figura. A unidade é o centímetro.

20.1 Escreva uma equação que represente o arco da parábola.

20.2 Escreva a área do rectângulo em função de x e determine:

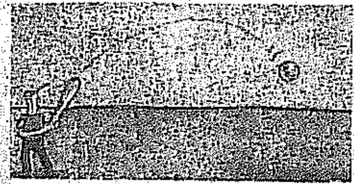
a área máxima do rectângulo, com uma aproximação às centésimas;

entre que valores de x a área do rectângulo é superior a $2\ \text{cm}^2$.

VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM

18

Uma bola de basebol foi atirada a 2 metros de altura.



A distância **d** (em metros) da bola ao solo é função do tempo **t** (segundos), sendo

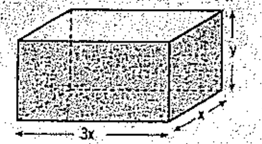
$$d = -0{,}05t^2 + 0{,}9t + 2\,.$$

18.1 Determine a altura máxima atingida pela bola.

18.2 Quanto tempo a bola permaneceu acima dos 5 m de altura?

19 A caixa fechada

Uma caixa com a forma de um paralelepípedo tem a base rectangular cujo comprimento é o triplo da largura.



Mostre que:

19.1 Se a área total da caixa é $168\ cm^2$, o volume **V** da caixa, em cm^3, é dado pela expressão:

$$V = 63x - \frac{9}{4}x^3$$

em que **x** é a medida, em cm, da largura da base da caixa.

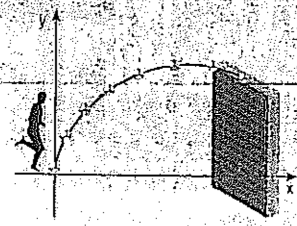
19.2 Determine um valor aproximado para o qual o volume da caixa é máximo e indique o valor do volume para essa aproximação.

20 O pontapé na bola

O Zé está situado a 6 m de um muro com 3 m de altura.

Chuta uma bola que vai bater exactamente sobre o muro.

Se a função da trajectória da bola em relação aos eixos coordenados indicados na figura é:



$y = ax^2 + (1 - 4a)\,x$, determine a altura máxima atingida pela bola.

Autores
Yolanda Lima
Francelino Gomes

Capa e arranjo gráfico
Serviços Técnicos da Editorial O Livro

Impressão
Sateilcor - Estúdio Gráfico

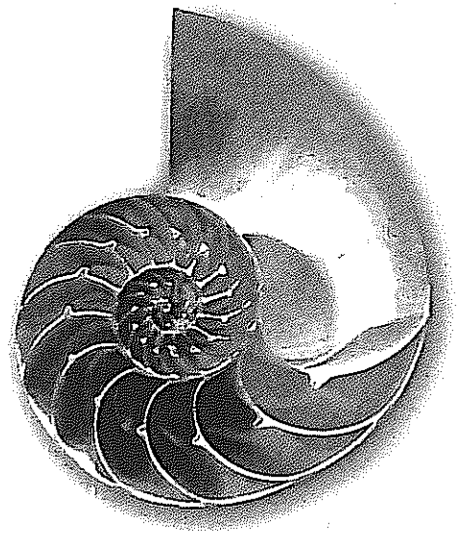
Distribuição exclusiva
Recolivro - Rede Comercial do Livro
Rua Major Neutel de Abreu, Nº18 B/C
1500 Lisboa
Telef. 778 35 34 - Fax 778 35 36

Filial
Rua da Boa Hora, 36 e 68 - 4050 Porto
Telefs. 200 57 39 / 205 53 39 - Fax 338 96 08

YOLANDA LIMA / FRANCELINO GO

XEQ MAT

MATEMÁTICA
11º



EDITORIAL O LIVRO

Extremos e derivada — exemplos

162. Dada a função polinomial

$x \smile p(x) = x^3 - 9x^2 \pm 24x$, determina:

a) Os intervalos da monotonia .

b) Os extremos relativos

c) Esboça o gráfico de p

163. a) Mostra que

$$h(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

é sempre positiva e tem um só extremo relativo. (Calcula a derivada recorrendo à definição.)

b) Esboça o gráfico de h.

164. Calcula os extremos locais das seguintes funções, usando a 1.ª derivada

a) $f(x) = x(x^2 - 3)$

b) $f(x) = x(x^2 - 4x - 3)$

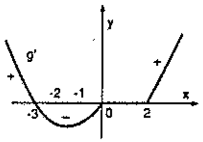
c) $f(x) = (2x + 3)^2 - 12x$

165. Calcula os extremos locais usando a derivada:

a) $g(x) = 24x + 45x^2 - 8x^3$

b) $h(x) = \dfrac{3}{x^2 - 9}$ (Calcula a derivada recorrendo à definição.)

166. É dado o gráfico da função derivada g' de certa função g:



Propõe um gráfico para g que seja compatível com este da sua derivada.

4. *Determina intervalos de monotonia e extremos da função definida por*

$$y = x + \frac{4}{x} \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

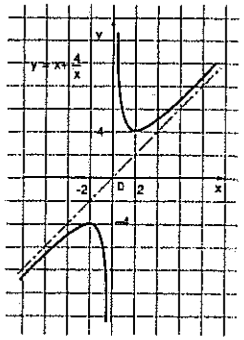
Resolução:

$$y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

Zeros da derivada: 2 e −2.

Quadro de sinais da derivada:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	×	−	0	+	
y		↗	máx. $f(-2) = -4$	↘	Não def.	↘	mín. $f(2) = 4$	↗	



Função crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[2, +\infty[$

Função decrescente em $[-2, 0[$ e em $]0, 2]$

5. *Estuda a monotonia e os extremos da função definida por* $y = x^4 - 2x^2$ *em* $[-2, 2]$.

Resolução:

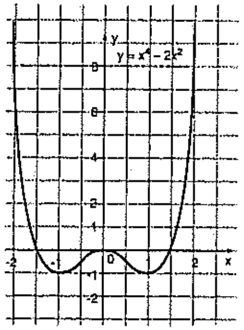
$y' = 4x^3 - 4x$ (usa a definição de derivada) ou $y' = 4x(x^2 - 1)$

Zeros da derivada: −1, 0, 1.

Extremos do domínio: −2, 2.

Quadro de sinais da derivada

x	-2		-1		0		1		2
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	M $f(-2) = 8$	↘	m $f(-1) = -1$	↗	M $f(0) = 0$	↘	m $f(1) = -1$	↗	M $f(2) = 8$



Crescente: $[-1, 0]$ e $[1, 2]$.

Decrescente: $[-2, -1]$ e $[0, 1]$.

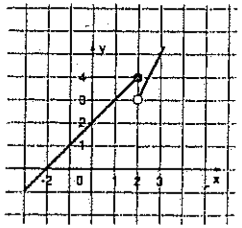
6. *A função f tal que* $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \leq 2 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ *é crescente em* $]-\infty, 2]$ *e em* $]2, +\infty[$, *mas não é crescente em* $\mathbb{R}$. *Porquê?*

Resposta:

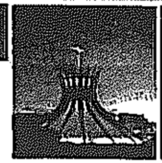
f não é crescente em qualquer intervalo que contenha o ponto de descontinuidade 2. De facto $2{,}1 > 2$ mas $f(2{,}1) < f(2)$.

A função dá um «salto para baixo» no ponto 2. O valor $f(2)$ é máximo relativo de f visto que

$f'(2^-) = +1$ e $f'(2^+) = -\infty$



Problemas de máximos e mínimos



PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS
(OPTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES)

Neste subcapítulo temos vindo a mostrar como o estudo da derivada f' permite descobrir propriedades da função f.

A derivada é como um «check-up» da função: as análises feitas à derivada revelam a evolução da função e suas «anomalias».

Esperamos agora que o aluno dê por justificado o tempo que investiu a praticar no cálculo de derivadas, especialmente depois de ver a sua utilização em problemas concretos de máximos e mínimos, uma das mais importantes aplicações da Análise Infinitesimal à Tecnologia e à Ciência.

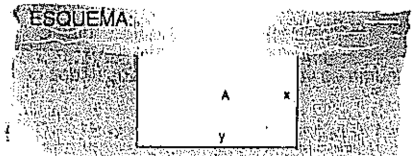
Optimizar uma função significa procurar qual o seu melhor valor para certo fim, seja **minimizar** o custo de uma produção, seja **maximizar** o volume dum contentor...

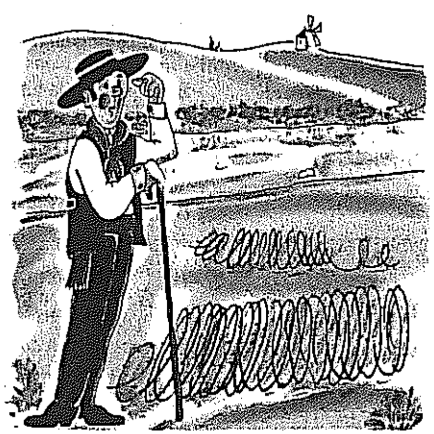
Exemplo I. A horta à beira do rio — área máxima

O Sr. Joaquim pediu-nos ajuda:

«Tem 100 metros de rede para vedar um terreno rectangular à beira do rio. Só quer vedar os 3 lados que não dão para o rio. Mas quer que a área da horta fique o maior possível...»

ESQUEMA:

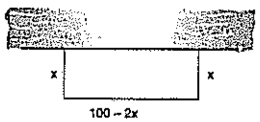




A — Função a maximizar: área do terreno

$A = y \cdot x$

B — Expressão da área A numa só variável:



O melhor é chamar x a um dos lados iguais. O outro será $100 - 2x$.

A área expressa em função de x: $A = (100 - 2x) \cdot x = 100x - 2x^2$

Encontrámos a função $f: x \smile A = 100x - 2x^2$ cujo domínio é definido pelas condições $x \geq 0$ e $100 - 2x \geq 0$: $D = [0; 50]$.

C — Procura dos extremos relativos da função recorrendo à derivada:

$$A' = 100 - 4x$$

167. De todos os triângulos rectângulos cujos catetos somam 50 cm, determina o que tem a área máxima.

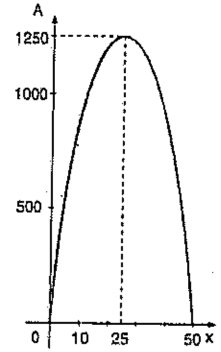
168. De entre os rectângulos com 60 dm² de área, descobre as dimensões do que tem perímetro mínimo.

169. De entre os rectângulos com 60 m de perímetro, determina as dimensões do que tem área máxima.

170. Calcula os números:

a) Cuja soma é 30 e cujo produto é máximo.

b) Cuja diferença é 20 e cujo produto é mínimo.



Quadro de sinais da derivada ▶

◀ Gráfico

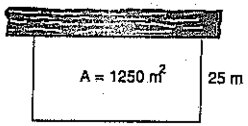
x	0		25		50
A'		+	0	−	
A		↗		↘	

m = f (0) = 0 — Máx. = f (25) = 25 × 50 = 1250 — m = f (50) = 0

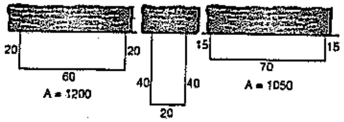
D — Interpretação dos resultados obtidos no contexto do problema.

A função A (x) tem dois mínimos (área nula) e um só máximo que corresponde às dimensões 25 x 50, o que dá uma área de 1250 m^2. Esta solução satisfaz o problema.

Solução óptima



Exemplos de outras soluções



No caso geral, a resolução de um «problema de máximos e mínimos» passa pelas seguintes fases:

A. Procurar qual a função a optimizar.

B. Exprimir essa função numa só variável recorrendo aos dados do problema.

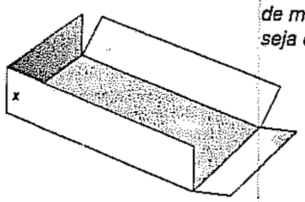
C. Derivar e calcular os extremos relativos da função encontrada.

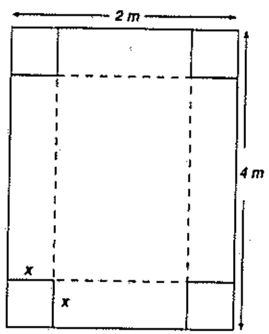
D. Interpretar os resultados face à natureza do problema.

171. De um cartão quadrado com 1 m^2 de área, tira-se um quadrado a cada canto para fazer um caixote (sem tampa).
Determina qual deva ser o lado desses quadrados para que o volume do caixote seja o maior possível.

Exemplo 2. Um pequeno contentor — volume máximo.

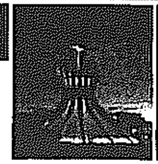
*Suprimindo um quadrado em cada canto de uma chapa metálica rectangular, de 2 por 4 metros, vai construir-se um contentor (sem tampa). Determinar o lado do quadrado a suprimir de modo que o **volume** do contentor seja o maior possível.*





Resolução:

A — Função a maximizar:
V, volume dum paralelepípedo rectângulo.
V = A_{base} x altura



B — Expressão do volume numa só variável:

Sendo x o lado do quadrado a suprimir, é também x a altura da caixa. A base da caixa (ver figura) ficará com as dimensões:

$$4-2x \quad e \quad 2-2x$$

logo $A_{base} = (4-2x)(2-2x)$ e $V = (4-2x)(2-2x)\,x$

Obtemos a função $x \mapsto V = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

cujo domínio é dado por $x > 0$ e $2 - 2x > 0$: $D =]0; 1[$

C — Cálculo da derivada e pesquisa de extremos relativos:

$V'(x) = 12x^2 - 24x + 8 = 4(3x^2 - 6x + 2)$

Zeros da derivada: $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3}$ ou seja, $x \approx 0{,}42$ ou $x \approx 1{,}58$

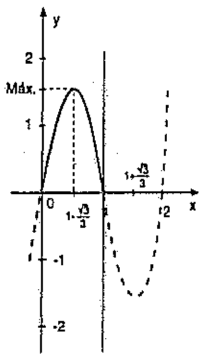
Quadro de sinais da derivada:

x	0		$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
V'		+	0	−	
V		↗		↘	

m = f(0) = 0 — Máx. = $f\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 1{,}5396$ — m = f(1) = 0

O valor 1,58 está fora do domínio desta função. (Ver gráfico da função à margem).

Restrição da função $x \mapsto 4x^3 - 12x^2 + 8x$ ao intervalo [0,1]:



D — No domínio [0,1] esta função só tem um máximo relativo e absoluto, que é $V\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx V(0{,}42) = 1{,}5396$, em m^3.

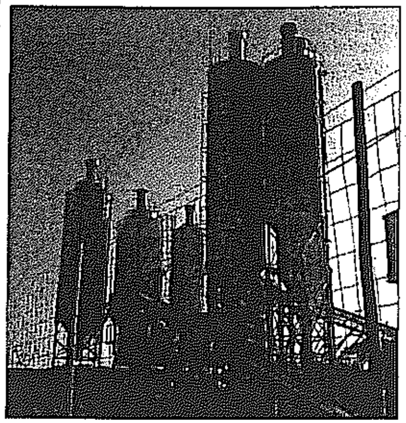
Confirma este valor na calculadora gráfica. O lado do quadrado a suprimir para obter este volume máximo é 0,42 m.

Exemplo 3. Silos para cimento — área mínima.

Os silos para conter cimento têm a forma de um cilindro de altura h e raio r sobreposto a um cone de altura e raio iguais a r. Para silos com volume total de $100 m^3$ determinar r de modo que a área lateral seja o menor possível para minimizar o custo do silo.
Fórmulas a usar:

$V_{cil} = \pi r^2 h$ $\qquad V_{cone} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

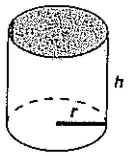
$Al_{cil} = 2\pi r h$ $\qquad Al_{cone} = \pi r g$

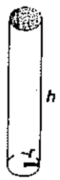


172. Considera os vários paralelepípedos de base quadrada cujas dimensões somam 1 metro.

Calcula a altura do que tem maior volume.

173. Pensa em vários gasómetros cilíndricos com capacidade de 2 m^3. Repara que podem ter formas muito diferentes:



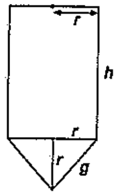


a) Prova que a área total é dada, em função do raio r, por $A = 2\pi r^2 + \frac{4}{r}$, $r > 0$.

b) Estuda a monotonia da função $r \smile A$ recorrendo à derivada.

c) O custo do gasómetro será mínimo quando a área A for mínima. Que valor deve ter o raio para obter o custo mínimo?

A – Função a minimizar:



A = Área lateral = $2\pi r h + \pi r g$

B — Expressão da área lateral A em função de r, o que implica exprimir h e g em função de r:

Ora $V = V_{\blacksquare} + V_{\blacktriangle} = 100$ logo $\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^3 = 100$

Para questões com este nível de rigor é aceitável tomar $\frac{\pi}{3} \approx 1$,

donde $\pi r^2 h + r^3 = 100 \Leftrightarrow h = \frac{100 - r^3}{\pi r^2}$ (logo $r \leq \sqrt[3]{100}$).

Quanto a g temos, pelos dados, $g^2 = 2r^2$ donde $g = r\sqrt{2}$.

Vem então A como função de r:

$A = 2\pi r \frac{100 - r^3}{\pi r^2} + \pi r \cdot r\sqrt{2}$. Simplificando:

$$F: \ r \smile A = \frac{200}{r} - 2r^2 + \pi\sqrt{2}\, r^2 \quad D:]0, \sqrt[3]{100}]$$

C — Derivada e pesquisa de extremos:

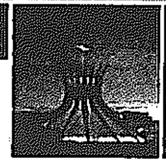
$A'(r) = -\frac{200}{r^2} - 4r + 2\pi\sqrt{2}\, r$ ou $A'(r) \approx 4{,}89\, r - \frac{200}{r^2}$

Zeros da derivada: $4{,}89\, r^3 - 200 = 0 \quad r \approx \sqrt[3]{\frac{200}{4{,}89}} \approx 3{,}45$

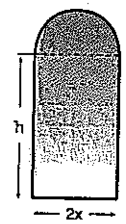
Quadro de sinais da derivada:

r	0		3, 45		$\sqrt[3]{100}$
A'	X	−	0	+	
A		↘	m = A (3, 45)	↗	M

D — O valor 3,45 está no domínio da função e é adequado ao problema, logo a área lateral do silo será mínima quando o raio for 3,45 metros.



Exemplo IV — Janela com vão máximo.



Um edifício vai ter janelas com a forma dum semicírculo sobreposto a um rectângulo.

O perímetro da janela não pode exceder 4 metros. Determina o formato óptimo da janela para obter o vão máximo (isto é, área máxima).

Resolução:

A — Função a maximizar:

$$\text{Área} = A_{\blacksquare} + A_{\blacktriangle} = 2\,x\,h + \frac{\pi x^2}{2}$$

B — Expressão de A numa só variável:

Como o perímetro máximo é 4 metros temos:

$2x + 2h + \pi x = 4 \Leftrightarrow 2h = 4 - 2x - \pi x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow h = 2 - x - \frac{\pi}{2}x$$

Logo, a área é dada por $A = 2x\left(2 - x - \frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi}{2}x^2$ ou

$$A = 4x - 2x^2 - \frac{\pi}{2}x^2 \qquad D = \mathbb{R}^+$$

C — Derivada e extremos: $A' = 4 - 4x - \pi x$

Zero da derivada: $4 - 4x - \pi x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{4 + \pi} \approx 0{,}56$

Quadro de monotonia:

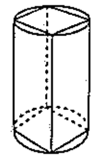
x	0		0, 56		$+\infty$
A'	X	+	0	−	
A		↗	Máx = $A\left(\frac{4}{4+\pi}\right)$	↘	

O valor do raio que torna a área máxima é $x \approx 0{,}56$ m.

D — Dimensões óptimas da janela: largura $\frac{8}{4 + \pi} \approx 1{,}12$ (em m).

Altura total $= h + x \approx 2 - \frac{0{,}56\,\pi}{2} \approx 1{,}12$. Quer dizer que a solução óptima tem a largura igual à altura total.

Desenha essa solução óptima à escala de 1/20 e verifica como a forma é diferente da do esquema inicial.



174. Um prisma quadrangular regular está inscrito num cilindro. A secção desse cilindro por um plano contendo o eixo tem 30 cm de perímetro.

a) Exprime o volume do prisma em função do diâmetro x do cilindro.

b) Determina o domínio da função e o valor de x que torna o volume máximo.

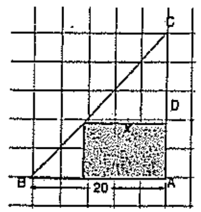
175. Uma pistola dispara uma bala verticalmente de baixo para cima, à velocidade inicial de 98 m/s. Sabendo que a lei do movimento é

$$s = -4{,}9\,t^2 + 98\,t \ (\text{m; s})$$

Calcula a altura máxima atingida pela bala.

176. Na figura um rectângulo em cor está inscrito no triângulo rectângulo isósceles cujos catetos medem 20 cm.

Determina as dimensões do rectângulo de área máxima.



LIMITES

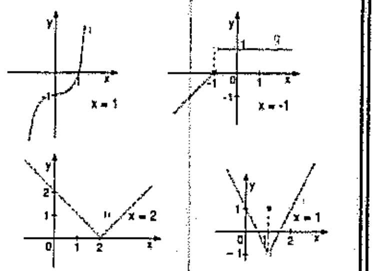
177. Considera a função $f: x \mapsto 2x^2 - 1$

a) Completa a tabela

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
f (x)	6,22					

b) Indica o $\lim_{x \to 2} f(x)$

178. Observa os gráficos das funções seguintes



a) Indica o limite de cada função no ponto indicado.

b) Diz se há continuidade no ponto indicado.

179. Traça os gráficos das funções f, g e h e determina $\lim_{x \to a}$ de cada uma das funções:

a) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 3 \\ 7 - 2x & \text{se } x < 3 \end{cases}$ $\quad a = 3$

b) $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \\ -(x+1) & \text{se } x < -1 \end{cases}$ $\quad a = -1$

c) $h(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad a = 0$

180. Sendo $f(x) = \frac{3}{2}x - 1$, calcula os valores de x para os quais

a) $|f(x) - 5| < 0{,}03$; b) $|f(x) + 4| < 0{,}006$

181. Calcula:

a) $\lim_{x \to 2} (5x - 3)$

b) $\lim_{x \to -3} (9 - x^2)$

c) $\lim_{t \to 2{,}5} \frac{t - 3/2}{t - 3}$

d) $\lim_{h \to 2} \frac{h^2 - 4}{h - 2}$

TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA

182. Os valores das velocidades (m/s) duma partícula, em diferentes instantes, são dados pela tabela junta.

t (s)	v (m/s)
10	5
20	8
30	12
50	20
120	50
200	30

a) Calcula a aceleração média nos intervalos
[10, 20], [20, 30], [50, 120], [120, 200]

b) Que concluis acerca deste movimento?

183. A equação do movimento dum ponto material é $e(t) = t^2 + 2t - 3$ (m; s)

a) Qual o espaço percorrido entre os instantes $t = 2$ e $t = 4$? E entre $t = 2$ e $t = 2 + h$?

b) Calcula a velocidade média do ponto, no intervalo $[2, 4]$ e no $[2, 2 + h]$.

184. Dois pontos A e B deslocam-se na mesma recta e as suas posições em relação a um ponto fixo no instante t são dadas pelas leis

$A \to e = 0{,}25\,t^2$; $B \to e = 1{,}5\,t - 2$ (m; s)

a) Representa graficamente as duas funções, no mesmo referencial.

b) Determina os instantes em que um deles ultrapassa o outro.

c) Calcula a velocidade média de A e a de B entre os instantes referidos na alínea anterior.

185. A velocidade duma partícula material que se move sobre uma recta é dada pela equação (m/s; s) seguinte; calcula a aceleração média no intervalo $[t_1, t_2]$:

a) $v = 3t^2$ $\quad t_1 = 2$ e $t_2 = 2{,}5$;

b) $v = t^2 + 2t$ $\quad t_1 = 1$ e $t_2 = 4$;

c) $v = \frac{24}{t}$ $\quad t_1 = 4$ e $t_2 = 6$.

186. Calcula e simplifica a expressão

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

nos seguintes casos:

a) $f(x) = x - 5$

b) $f(x) = 20 - x$

c) $f(x) = 5x^2$

d) $f(x) = x^2 - 5x$

e) $f(x) = 3x - x^2$

f) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

DERIVADA

187. Um corpo move-se em linha recta segundo a lei dos espaços $s = f(t) = t^2 + 3t$ (m; s)

a) Calcula a velocidade média nos intervalos

$[1; 2]$, $[1; 1{,}2]$ e $[1; 1{,}05]$

b) Calcula a velocidade instantânea no ponto $t = 1$.

188. Uma esfera de metal de raio R é aquecida e dilata-se. Determina:

a) a t.m.v. do volume V da esfera, quando o raio R passa de 2 cm para 2, 02 cm.

b) A taxa de variação do volume V, quando R = 2 cm.

189. O volume V (dm^3) dum gás à temperatura t graus centígrados e pressão constante é dado pela fórmula $V = 0{,}0075\,t$.

Determina a taxa de variação do volume à temperatura t_0.

190. A intensidade I (amperes) duma corrente eléctrica varia em função do tempo t (segundos) de acordo com a lei $I = 0{,}6\,t^2$

Determina a taxa de variação da intensidade

a) entre 0 s e 3 s (média); b) no 4º segundo.

191. Calcula, usando a definição, as derivadas das funções seguintes, nos pontos indicados:

a) $f(x) = 5x - 200$ no ponto $x = 4$;

b) $g(x) = -5x^2$ no ponto $x = -2$;

c) $h(x) = 8x - x^2$ no ponto $x = -3/2$;

192. Seja f a função de variável real definida por $f(x) = x^2 + a$, $a \in \mathbb{R}$

a) Calcula as t.m.v. relativas aos intervalos $[1,3]$, $[1,2]$, $[1; 1{,}5]$, $[1; 1{,}1]$, $[1; 1{,}01]$.

Usa os valores obtidos para concluir qual o declive da recta tangente à curva no ponto $A(1; 1 + a)$.

b) Seja $P(x, x^2 + a)$ um ponto do gráfico de f e Q um ponto do gráfico, vizinho de P e de abcissa $x + h$:

(I) Calcula a ordenada do ponto Q.

(II) Mostra que o declive da secante PQ é $2x + h$.

(III) Determina o declive da recta tangente ao gráfico no ponto P.

193. $f(x)$ define uma função contínua no intervalo $[a, a + h]$, com $h > 0$. Apresenta uma interpretação dos valores

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

nos seguintes casos:

a) x designa o tempo e $f(x)$ a população de coelhos numa dada reserva de caça no instante x;

b) x designa o tempo e $f(x)$ a produção de uma empresa no tempo x;

c) x designa a altitude e $f(x)$ a pressão atmosférica à altitude x.

194. Escreve uma equação cartesiana da recta tangente ao gráfico da função $f(x) = 5x^2 - 2x$

a) no ponto (2, 16);

b) paralela à recta de equação $y = 3x + 1$

195. Dadas as funções f e g tais que $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$ e $g(x) = x^3 - 2x + 7$ e ainda o ponto P (2, 11).

a) Mostra que P é ponto comum aos gráficos de f e g.

b) Determina as rectas tangentes aos dois gráficos no ponto P. Que concluis?

196. Usa a definição de derivada para calcular a função derivada de cada uma das funções seguintes num ponto qualquer x do seu domínio:

a) $f(x) = mx + b$

b) $f(x) = x^2 - 5x$

c) $f(x) = (x - 3)^2 + (x + 3)^2$

d) $f(x) = ax^2 + bx$

e) $f(x) = 2x^3$

f) $f(x) = -\frac{5}{x}$

197. Usa as regras de derivação dadas para obter as funções derivadas de:

a) $f(x) = 5x$

b) $f(x) = 8 - 3x$

c) $f(x) = x^2 + 4x$

d) $f(x) = 5x^2 - \pi x$

e) $f(x) = x^3 - 4x^2$

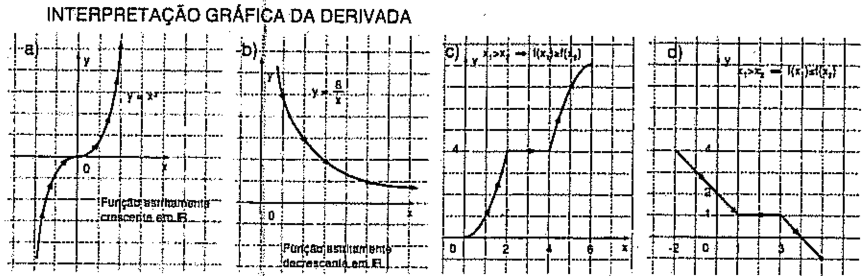
f) $f(x) = 10 + \frac{3}{x}$

g) $f(x) = \frac{5}{x - 1} + 5x$

h) $f(x) = \frac{x}{x - 2}$

198. Escreve uma equação cartesiana da recta tangente e outra da recta normal à curva de equação $y = \frac{6}{x}$, no ponto P (2, 3).

INTERPRETAÇÃO GRÁFICA DA DERIVADA



199. Observa cada gráfico e pronuncia-te sobre o sinal da derivada:

200. Dada a função g tal que $g(x) = x^3 - 12x$

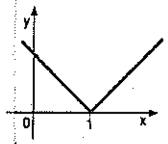
a) Calcula $g'(x)$.

b) Determina os zeros de $g'(x)$ e o conjunto dos pontos em que $g'(x) > 0$.

c) Indica os intervalos de monotonia de g.

201. A figura representa um gráfico da derivada de uma função real f, de domínio IR.

Indica qual das afirmações é verdadeira:



(A) A função f é decrescente em $]-\infty, 1]$;

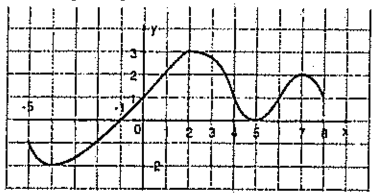
(B) A função tem um extremo relativo em $x = 1$

(C) A concavidade do gráfico de f está sempre virada para cima.

(D) A função f é crescente em IR.

Prova específica — Época normal, 94

202. Na figura, C é o gráfico da função f de domínio $[-5, 8]$.

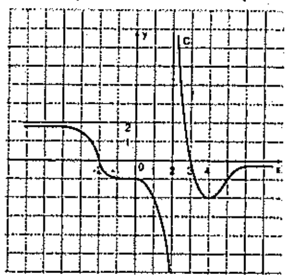


a) Recorre ao gráfico para resolveres as equações: (I) $f(x) = 0$; (II) $f(x) = 2$; (III) $f(x) = -1$

b) Determina o conjunto solução da condição $-1 < f(x) < 0$

c) Recorre ao gráfico para resolver as inequações:
(I) $f'(x) \geq 0$;
(II) $f(x) \cdot f'(x) < 0$

203. C é o gráfico de f de variável real.



a) Indica o domínio e o contradomínio de f.

b) Determina o conjunto solução de cada uma das condições:
(I) $f(x) = 0$; (II) $f'(x) \leq 0$; (III) $|f(x)| + f(x) = 0$

c) Indica o valor de

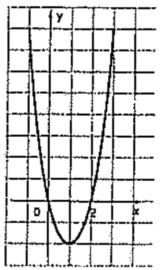
(I) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$; (II) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$; (III) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

(IV) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$; (V) $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$; (VI) $\lim_{x \to 2^+} f'(x)$

d) Constrói um quadro de sinais da função f'.

e) Esboça o gráfico de $|f|$.

204. Na figura está representado o gráfico C da função f', derivada da função f, de domínio IR.



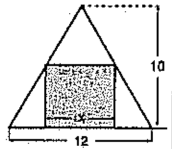
a) Indique, justificando, os intervalos de monotonia de f e os valores de x para os quais a função tem extremos relativos.

b) Proponha um gráfico para a função f, compatível com o gráfico de f' dado.

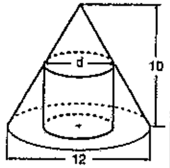
Prova de aferição, 1993.

MÁXIMOS, MÍNIMOS

205. Quais são as dimensões do rectângulo de área máxima que se pode inscrever, como indica a figura, num triângulo isósceles com 12 cm de base e 10 cm de altura?



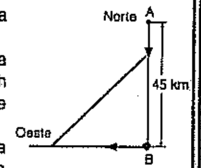
206. Calcula o diâmetro do cilindro de revolução, de volume máximo, que se pode inscrever, como indica a figura junta, num cone de revolução com 12 m de diâmetro da base e 10 m de altura.



207. Em dado momento o barco A está a 45 km a norte do barco B.

O barco A dirige-se para Sul à velocidade de 9 km/h e o barco B vai para Oeste à velocidade de 12 km/h.

No seu movimento qual a distância mínima que separa os barcos?



Sugestão: Estuda a função $f: t \mapsto d^2(t)$ visto que d mínima equivale a d^2 mínima.

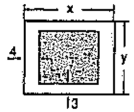
208. Determina a altura do cone de revolução com 30 cm de geratriz cujo volume é máximo.

209. Um triângulo equilátero [ABC] tem 6 m de perímetro. Sendo M um ponto de [BC] determina a sua posição de forma que o produto das distâncias de M às rectas AB e AC seja máximo.

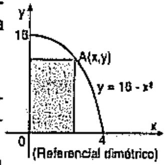
Sugestão: Recorre à Trigonometria (sen 60°).

210. Um editor decidiu que as páginas dum livro a editar deveriam ter margens de 3 cm em cima e em baixo e de 4 cm de cada lado e que a área da página seria de $432\ cm^2$.

Determina as dimensões da página para que a área impressa seja o maior possível.



211. Um rectângulo de área A não nula tem dois lados sobre os eixos coordenados sendo a origem um dos vértices. O vértice oposto é ponto da parábola de equação $y = 16 - x^2$.



a) Exprime a área do rectângulo em função de x indicando o domínio de A (x).

b) Para que valores de x a área do rectângulo é máxima?

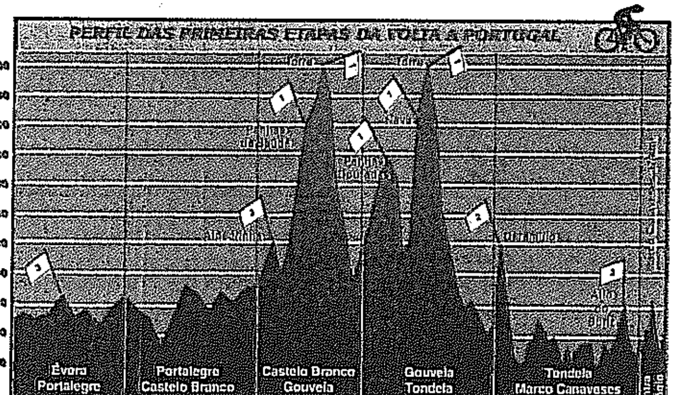
212. Observa o gráfico abaixo, publicado no «Expresso»:

a) Justifica que a função não tem derivada nos pontos assinalados com 1,2,3.

b) Dos locais assinalados indica dois entre os quais a função é monótona.

c) Dos troços de declive positivo, indica o de maior declive e o de menor.

d) Assinala com M três máximos e com m três mínimos.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

217. Determina o domínio de:

a) $x \mapsto \sqrt{1+3x}$

b) $x \mapsto \sqrt{1-4x^2}$

c) $x \mapsto \sqrt{x}-\sqrt{1-x}$

d) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x-6}}$

218. Determina Df e $D'f$:

a) $f(x)=\sqrt{2-x}$

b) $f(x)=1-\sqrt{x}$

c) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

d) $f(x)=\sqrt{x^2+x}$

e) $f(x)=\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x-2}$

219. Obtém o gráfico na calculadora e estuda o domínio, a paridade e a injectividade das funções dadas por:

a) $x \mapsto \sqrt{x-1}$

b) $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

c) $x \mapsto \sqrt{|x|}$

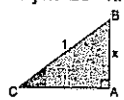
d) $x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x-2} \text{ se } x \geq 2 \\ x^2-2 \text{ se } -2 \leq x < 2 \\ -\sqrt{2-x} \text{ se } x < -2 \end{cases}$

5.2 Funções com radicais quadráticos ou cúbicos

Exemplo I.

Num triângulo rectângulo de hipotenusa 1, um dos catetos mede x. Exprimir a área A e o perímetro P do triângulo em função de x.

Resolução:



Pelo teorema de Pitágoras é $\overline{AC}=\sqrt{1-x^2}$

A área é dada por: $A(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$

O perímetro é dado por: $P(x)=1+x+\sqrt{1-x^2}$

• Qualquer destas funções é irracional porque nem $A(x)$ nem $P(x)$, pode ser escrita sob a forma de quociente de polinómios.

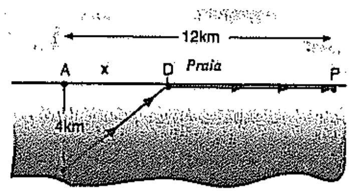
• O domínio de A, tal como o de P, é tal que

$1-x^2>0 \wedge x>0 \Leftrightarrow x^2<1 \wedge x>0$ ou seja $x \in\,]0,1[$.

Então $D_A = D_P = \,]0,1[$

Exemplo II.

Observa a figura:



O tripulante do barco B tem de levar uma mensagem urgente a um ponto P a 12 km de A, ponto da praia mais próximo de B. O barco só dá 6 km/h mas o tripulante pode correr na orla da praia a 10 km/h.

Exprime o tempo que leva de B a P em função da distância x de A ao ponto D de desembarque na praia.

Resolução:

Como se tem $\overline{BD}=\sqrt{16+x^2}$, $\overline{DP}=12-x$ e $t=\dfrac{e}{v}$,

o barco demora $\dfrac{\sqrt{16+x^2}}{6}$ e o tripulante $\dfrac{12-x}{10}$ horas.

O tempo pedido é $t(x)=\dfrac{\sqrt{16+x^2}}{6}+\dfrac{12-x}{10}$ que corresponde à função irracional $t: x \mapsto t(x)=\dfrac{\sqrt{16+x^2}}{6}+\dfrac{12-x}{10}$

O domínio de t é $D_t=[0,\,12]$ visto que $x<12$ km e $16+x^2>0\ \forall x$.

Exemplo III.

Os volumes de dois cubos, o maior de aresta x e o menor de aresta y, diferem de $8\ cm^3$.

a) Indicar uma expressão analítica de $f: x \mapsto y$

b) Determinar D_f

c) Simplificar $\dfrac{f(x)}{\sqrt[3]{x-2}}$

Resolução:

a) $x^3-y^3=8 \Leftrightarrow y^3=x^3-8 \Leftrightarrow y=\sqrt[3]{x^3-8}$

$f: x \mapsto f(x)=\sqrt[3]{x^3-8}$

b) Como $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (arestas de cubos) vem:

$y \geq 0 \Leftrightarrow x^3-8 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq 8 \Leftrightarrow x \geq 2$ donde $D=[2,+\infty[$

d) $\dfrac{f(x)}{\sqrt[3]{x-2}}=\dfrac{\sqrt[3]{x^3-8}}{\sqrt[3]{x-2}}$, logo $\sqrt[3]{\dfrac{x^3-8}{x-2}}=\sqrt[3]{x^2+2x+4}$ com $x \neq 2$

Exemplo IV.

Uma esfera metálica desliza sobre um eixo e a sua temperatura T (em graus C) varia com a abcissa x do seu centro, de acordo com a lei $T=2\sqrt[3]{x}$. Estuda a função $x \mapsto T(x)$.

Resolução:

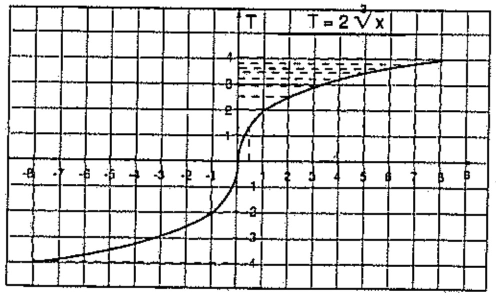
• A função $T: x \mapsto T(x)=2\sqrt[3]{x}$ é irracional e tem como domínio $\mathbb{R}$ porque a esfera pode ocupar qualquer posição no eixo.

• $T(x)$ é injectiva, porque

$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{x_1} \neq 2\sqrt[3]{x_2} \Leftrightarrow T(x_1) \neq T(x_2),\ \forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}}$

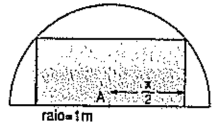
• $T(0)=0$; $T(x)>0$ sse $x>0$; $T(x)<0$ sse $x<0$.

• Sendo $T(-x)=2\sqrt[3]{-x}=-2\sqrt[3]{x}=-T(x)$, $\forall_{x \in \mathbb{R}}$, $T(x)$ é função ímpar e o seu gráfico é simétrico em relação à origem:



x	T
0,5	1,6
1	2
2	2,5
3	2,9
4	3,2
6	3,6
8	4
−1	−2
−2	−2,5
...	...

220.



Exprime, em função da base x, a área dum rectângulo inscrito no semicírculo de raio 1 metro. Estuda o domínio e a monotonia da função recorrendo à calculadora gráfica.

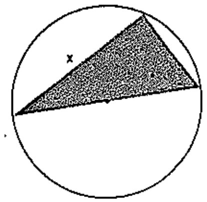
221. O semiperíodo T de oscilação dum pêndulo relaciona-se com o seu comprimento C pela fórmula

$$\frac{T^2}{\pi^2}=\frac{C}{g}$$

em que g é a aceleração da gravidade.

Exprime T como função de C e esboça o gráfico da função ($g=9,8$) recorrendo à calculadora gráfica.

222. Os triângulos inscritos numa circunferência, tendo um lado a passar no centro, são rectângulos:



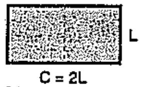
Sendo o raio = 5, exprime a área A dum triângulo desses em função do cateto x e pesquisa qual será o valor de x maximizante.

Sugestão: a raiz é máxima quando o radicando o for.

5.3 Operações com radicais quadráticos ou cúbicos e com potências de expoente fraccionário.

Problema: *Calcular as medidas dum rectângulo com 72 cm² de área, sabendo que o comprimento é o dobro da largura.*

Resolução:



$2L \cdot L = 72 \Leftrightarrow L^2 = 36$

$\Leftrightarrow L = \sqrt[2]{36}$; $\vee L = -\sqrt[2]{36}$

Como a solução é positiva, $L = 6$, a largura é 6 cm e o comprimento $2L$ é 12 cm.

O radical quadrático $\sqrt[2]{\ }$ escreve-se, em geral, apenas $\sqrt{\ }$.
Logo $L = \sqrt{36}$.

$\sqrt{36} = 6$ e $-\sqrt{36} = -6$ são as raízes quadradas ou raízes de índice 2 de 36. De facto $6^2 = (-6)^2 = 36$

Cada número positivo a tem duas raízes quadradas simétricas que se designam por

$$\sqrt{a} \quad e \quad -\sqrt{a}$$

Logo, por definição $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$

Um número negativo não tem raiz quadrada e zero tem só uma: $\sqrt{0} = 0$

Problema: *Calcular as medidas dum prisma quadrangular regular com 192 cm³ de volume, sabendo que a altura é o triplo da aresta da base.*

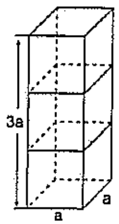
Resolução:

$V = (a^2) \cdot 3a = 3a^3$

$3a^3 = 192 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^3 = 64 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \sqrt[3]{64} = 4$



4 é a raiz cúbica de 64.
A aresta da base mede 4 cm e a altura 3 a mede 12 cm.

Cada número a, positivo, zero ou negativo, tem uma única raiz cúbica real que se designa por

$$\sqrt[3]{a}$$

(raiz cúbica ou raiz de índice 3)

Logo, por definição $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ e $\sqrt[3]{a^3} = a$

$(\sqrt[3]{-a})^3 = -a$
$(-\sqrt[3]{a})^3 = -a$
$\rightarrow \sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$

Os números que têm raiz quadrada inteira dizem-se **quadrados perfeitos**.

Exemplos: 1, 4, 9, 16, ...

Nota:
$\sqrt{a^2} = |a|, \ \forall_{a \in \mathbb{R}}$
Exemplo $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$

Os números que têm raiz cúbica inteira dizem-se **cubos perfeitos**.

Exemplos: 1, 8, 27, 64,...

Nota:
Para qualquer índice n é válida a definição:
$\sqrt[n]{X}$ é um número que elevado a n dá X.

OPERAÇÕES

É possível multiplicar, dividir e, também, adicionar ou subtrair radicais quadráticos ou cúbicos. Vejamos algumas propriedades em que se baseiam estas operações.

RADICAIS QUADRÁTICOS

- O produto das raízes é a raiz do produto e vice-versa.
- O quociente das raízes é a raiz do quociente e vice-versa.
- A potência da raiz é a raiz da potência e vice-versa.
- Para passar um factor para dentro do radical eleva-se ao quadrado.
- Para somar ou subtrair monómios onde figura o mesmo radical põe-se o radical em evidência (propriedade distributiva).

Propriedades ($a, b \in \mathbb{R}_0^+$)	Exemplos
$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a\,b}$	$\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \ b \neq 0$	$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}}$
$(\sqrt{a})^p = \sqrt{a^p}$	$(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2^4}$
$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$	$3\sqrt{7} = \sqrt{9 \times 7}$
$m\sqrt{a} + n\sqrt{a} = (m+n)\sqrt{a}$	$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2+5)\sqrt{3}$

Estas propriedades facilitam os cálculos permitindo até, muitas vezes, prescindir da calculadora para operar com números irracionais.

Exemplos:

a) $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$

b) $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = \sqrt{100} = 10$

c) $5\sqrt{2} - \sqrt{8} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

d) $\sqrt{2^6} = \sqrt{(2^3)^2} = 2^3 = 8$

RADICAIS CÚBICOS

- O produto das raízes cúbicas é a raiz cúbica do produto e vice-versa.
- O quociente das raízes cúbicas é a raiz cúbica do quociente e vice-versa.
- A potência da raiz cúbica é a raiz cúbica da potência e vice-versa.
- Para passar um factor para dentro dum radical cúbico, eleva-se ao cubo.
- Para somar ou subtrair monómios onde figura o mesmo radical cúbico, põe-se este em evidência (usa-se a propriedade distributiva).

Propriedades	Exemplos
$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a\,b}$	$\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{216}$
$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}, \ b \neq 0$	$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{\frac{54}{16}}$
$(\sqrt[3]{a})^p = \sqrt[3]{a^p}$	$(\sqrt[3]{64})^2 = \sqrt[3]{64^2}$
$a \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 \cdot b}$	$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8 \times 5}$
$m\sqrt[3]{a} + n\sqrt[3]{a} = (m+n) \cdot \sqrt[3]{a}$	$3\sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{7} = 5\sqrt[3]{7}$

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{27\,a} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{a} = 3\sqrt[3]{a}$

b) $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{8} = -2$

c) $\frac{\sqrt[3]{16\,a}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16\,a}{2}} = \sqrt[3]{8\,a} = 2\sqrt[3]{a}$

223. Completa:

a) $1{,}2^3 = 1{,}728 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\ldots} =$

b) $2^5 = 32 \Leftrightarrow \sqrt[5]{\ldots} =$

224. Completa:

a) $x^3 = 30 \Leftrightarrow x =$

b) $x^4 = 81 \Leftrightarrow x =$

c) $a^5 = 32 \Leftrightarrow a =$

225. Simplifica:

a) $\sqrt{49 \times 4}$

b) $\sqrt{\frac{25}{49}}$

c) $\sqrt{9^3}$

d) $\sqrt{16\,x^2}$

e) $2\,|u| - \sqrt{9\,u^2}$

FUNÇÃO INVERSA

246. Considera a função f tal que $f(x) = x^2 - 2x$, com $x \in [1, +\infty[$

a) Mostra que f é injectiva.

b) Caracteriza a função inversa f^{-1} e calcula $f^{-1}(3)$.

247. Dada a função $g : x \mapsto g(x) = x^3 + 8,\ x \in \mathbb{R}$

a) Justifica que g é injectiva.

b) Caracteriza g^{-1} e calcula $g^{-1}(16)$.

248. Verifica se as funções f e g são inversas uma da outra, nos seguintes casos:

a) $f(x) = 4x - 8$ e $g(x) = 0{,}25x + 2$;

b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4},\ x \neq -4$ e $g(x) = \dfrac{4x-3}{2-x},\ x \neq 2$

249. Determina a função f^{-1} inversa de f e verifica a resposta calculando $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$:

a) $f(x) = 4x + 1$ d) $f(x) = \dfrac{4}{x},\ x \neq 0$

b) $f(x) = 1 - 0{,}5x$ e) $f(x) = \dfrac{-3}{x-2},\ x \neq 2$

c) $f(x) = x^3 - 27$ f) $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x-3},\ x \neq \dfrac{3}{2}$

250. Determina a função inversa de:

a) $y = \dfrac{1}{2}x + b$, b constante.

b) $y = \sqrt{R^2 - x^2},\ 0 \leq x \leq R$, R constante.

251. A função f tem por inversa f^{-1}.

Em que quadrante se situa o gráfico de f^{-1} quando o gráfico de f está

a) no 1º quadrante acima da recta $y = x$?

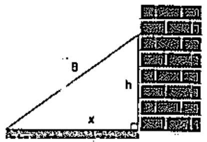
b) no 4º quadrante?

252. A função $F(x) = 2|x|$ não é injectiva. Indica uma restrição f de F que seja injectiva e determina a função inversa dessa restrição.

253. Que podes afirmar acerca da função inversa, duma função ímpar? E de uma par?

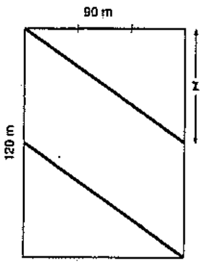
FUNÇÕES COM RADICAIS

254. Uma escada com 8 m vai ser apoiada a uma parede vertical. A escada assenta no solo horizontal a x metros da parede.



Exprime a altura h a que chega a escada em função da distância x e estuda a função $h(x)$.

255. Numa feira industrial, uma empresa dispõe de um espaço rectangular de 90 por 120 metros que quer dividir em três áreas, usando tabiques paralelos como indica a figura.



a) Exprime em função de x o comprimento total de tabique que é necessário.

b) Calcula esse comprimento no caso das três áreas serem iguais.

256. Dada a função $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{16 - 4x^2}$,

a) indica D_f e D'_f.

b) por simples observação da expressão de $f(x)$ indica as coordenadas do ponto em que f é máxima.

c) Usa a calculadora gráfica para descobrir os intervalos de monotonia de f.

257. Considera a função $x \mapsto g(x) = -\sqrt{4 - 4x^2}$

a) Indica D_g e D'_g

b) Qual o valor máximo de g? E o mínimo?

c) Indica os intervalos de monotonia de g, por observação do seu gráfico obtido na calculadora.

258. Num triângulo isósceles os lados iguais medem 13 cm cada um e a altura relativa ao 3º lado mede x cm.

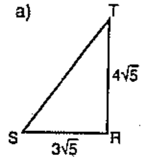
a) Exprime a área A e o perímetro P em função de x.

b) Quando $P = 36$ cm que valor tem A?

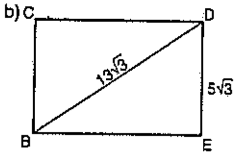
OPERAÇÕES COM RADICAIS

259. Calcula nos dois casos a área A e o perímetro P.

a)



b)



260. Simplifica:

a) $5\sqrt{7} + 7\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$ b) $\sqrt{12} - \sqrt{48} + 2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{27a} \cdot \sqrt{3a},\ a \geq 0$ d) $(-0{,}5\sqrt{x}) \cdot (6\sqrt{x}),\ x \geq 0$

e) $(25\sqrt{24}) : (5\sqrt{3})$ f) $\sqrt{12a^3} : \sqrt{3a} + 5a,\ a \geq 0$

261. Calcula:

a) $\sqrt{49t^2}$ d) $\sqrt[3]{8a^6}$

b) $\sqrt{0{,}81x^2}$ e) $\sqrt[3]{-a^6b^3}$

c) $\sqrt{0{,}01a^2m^4}$ f) $\sqrt[3]{2m^3}$

262. Calcula usando a calculadora:

a) $(3 + \sqrt{3})^2$ c) $(\sqrt[3]{5})^5 - \sqrt{8^3}$

b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ d) $\sqrt[3]{3^0 + 3^2 - 3^3 + 3^4}$

263. Simplifica:

a) $\sqrt[3]{2700} : \sqrt[3]{100}$ d) $\sqrt[3]{x^2} : \sqrt[3]{x^5}$

b) $\dfrac{\sqrt{15}}{5\sqrt{5}} + 0{,}1 \times \sqrt{3}$ e) $2^{1/3} : \sqrt[3]{128}$

c) $\sqrt[3]{40} : \sqrt[3]{5} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

264. Simplifica:

a) $\sqrt{5 - 3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{5 + 3\sqrt{2}}$

b) $(\sqrt{x^2+1} + 3) \cdot (\sqrt{x^2+1} - 3)$

c) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ d) $(2\sqrt{3} - \sqrt{15})^2$

265. Resolve as equações:

a) $x(x^2 - 5) = 5(2 - x)$ b) $2(x^3 - 8)(x^2 - 9) = 0$

266. Determina o ponto P do arco de parábola de equação $y = \sqrt{2x}$ que fica mais próximo do ponto $A(3, 0)$. (Recorrer à distância entre 2 pontos)

POTÊNCIAS DE EXPOENTE FRACCIONÁRIO

267. Calcula:

a) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^0$ c) $8^{\frac{2}{3}}$ e) $(27m^6)^{\frac{2}{3}}$

b) 10^{-2} d) $0{,}1^{-3}$ f) $(8a^3)^{-\frac{1}{3}}$

268. Calcula:

a) $64^{5/6}$ c) $36^{-1/2}$ e) $3^{-1/2} \cdot 3^{1/4} : 3^{-5/4}$

b) $0{,}01^{-3/2}$ d) $\pi^{2/3} \cdot \pi^{5/6}$ f) $64^{-1/5} : 2^{-1/5}$

269. Simplifica:

a) $\left(\dfrac{0{,}4}{0{,}9}\right)^{\frac{1}{2}}$ c) $x^{\frac{3}{2}} : x^{\frac{1}{2}}$ e) $y^{4m-1} : y^{1+4m}$

b) $\left(-\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$ d) $r^{-1} : r^{-\frac{3}{2}}$ f) $a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{1}{6}}$

270. Completa:

a) $2^{3/4} \cdot 2^{1/4} = \ldots$ e) $x^{3/4} = 1000 \Rightarrow x = \ldots$

b) $13^{3/5} : 13^{-2/5} = \ldots$ f) $y^{1/3} = 1{,}2 \Rightarrow y = \ldots$

c) $6^{1/3} \times 36^{1/3} = \ldots$ g) $\sqrt{\dfrac{7}{2}} : 2^{-\frac{1}{2}} = \ldots$

d) $(16^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}} = \ldots$ h) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}\right]^{\frac{1}{3}} : \sqrt[3]{2} = \ldots$

271. Calcula:

a) $9^2 \times (2+1)^{-3} - 4^{-\frac{1}{2}} \times 4$

b) $5 \times 3^{\frac{1}{4}} \times 2^{-5} \times 2^8$

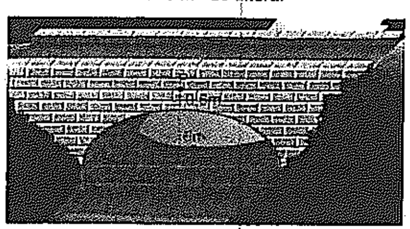
272. A folha de ouro compra-se em blocos de 15 folhas com a espessura 5×10^{-3} cm cada; há duas capas de espessura 0,3 cm e folhas de papel de 0,02 cm a separar as folhas de ouro e a separar a 1ª e a última folha das capas. Calcula a espessura do bloco.

273. Racionaliza os denominadores das fracções (facultativo neste programa)

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$ d) $\dfrac{5\sqrt{6}}{2\sqrt{12}}$

ELIPSE

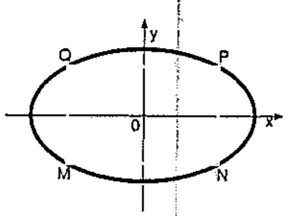
274. O arco duma ponte sobre um rio com 20 m de largura tem a forma de uma semielipse e o centro do arco está a 6 m de altura.



a) Escreve uma equação da elipse num referencial xOy em que Ox está à superfície da água e Oy passa no centro do arco.

b) A estrada é horizontal e passa no ponto P a 60 cm do ponto mais alto da semielipse.
Determina a distância (vertical) da estrada ao arco num ponto a 4 m de P.

275. A figura representa uma elipse na qual se inscreveu um rectângulo [MNPQ].



A elipse tem centro na origem 0 do referencial, distância focal 6 (cm) e eixo maior sobre o eixo das abcissas, com 10 cm de comprimento.

a) Escreve uma equação cartesiana da elipse.

b) Sendo (x, y) as coordenadas do ponto P da elipse prova que a área do rectângulo representado se pode exprimir em função de x do seguinte modo

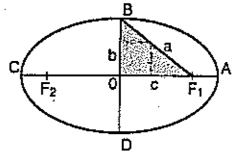
$$A(x) = \frac{16\,x}{5}\sqrt{25 - x^2}$$

c) Determina o valor de x para o qual é máxima a área do rectângulo e calcula essa área.

Sugestão: A área é máxima quando $25\,x^2 - x^4$ o for.

Alerição, 94 — 1ª chamada — Época Especial

276. Escreve a equação reduzida desta elipse em que $\overline{F_1F_2} = 10$ e $\overline{BF_1} + \overline{BF_2} = 13$



277. A intersecção da bissectriz dos quadrantes pares com a cónica de vértices (– 2, 0), (2, 0), (0, 1) e (0, – 1) é

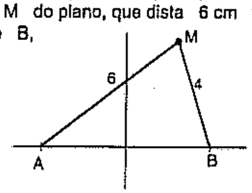
(A) $\left\{\left(\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}\right), \left(-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)\right\}$

(B) $\{(\sqrt{0{,}8}, -\sqrt{0{,}8}), (-\sqrt{0{,}8}, \sqrt{0{,}8})\}$

(C) $\{(0{,}8; 0{,}8), (-0{,}8; -0{,}8)\}$

(D) $\left\{(1, -1), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$

278. Dados os pontos A (– 3, 0) e B (3, 0) e o ponto M do plano, que dista 6 cm de A e 4 cm de B,



a) calcula a abcissa do ponto M. (Sugestão: recorre ao coseno de $\hat{ABM}$).

b) Supõe que M se desloca no plano, mantendo fixa a soma das distâncias $\overline{MA} + \overline{MB} = 10$.

b_1) Qual é a figura descrita pelo ponto M?

b_2) Escreve uma equação cartesiana dessa figura.

b_3) Quais as coordenadas dos pontos da curva situados nos eixos coordenados?

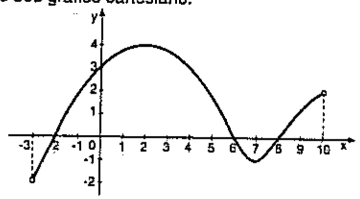
279. F_1 (3, 2) e F_2 (– 3, 2) são os focos duma elipse com 10 de eixo maior. Determina:

a) O centro, os eixos de simetria e o eixo menor da elipse.

b) A equação reduzida da elipse e faz um esboço da posição da curva no referencial.

GENERALIDADES SOBRE FUNÇÕES E GRÁFICOS

280. Considere a função f definida em]– 3, 10[pelo seu gráfico cartesiano:



a) Determine f (– 2), f (2) e f (6).

b) Indique os intervalos de monotonia extremos e extremantes.

c) Indique o contradomínio de f e os zeros.

d) Resolva no gráfico a condição
$f(x) \geq 3 \wedge |x| < 2$

281. Representa na calculadora gráfica a função polinomial $f: x \mapsto x^4 - 3\,x^3 - 4\,x^2$, em [– 2, 4] e determina:

a) Os pontos onde a curva intersecta os eixos coordenados.

b) Os extremos locais, com aproximação até às centésimas.

282. Para que valores de k se tem:

a) F (– 1) = 12, com $f(x) = 3\,x^2 - k\,x + 4$

b) g (0) = – 32, com $g(x) = (x - 2\,k)(3\,x + 8)$

283. Dada a função f tal que $f(x) = 2\,x^2 - x + 1$, calcula $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ e simplifica o quociente.

284. Calcula $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ nos seguintes casos:

a) $f(x) = 2 - 3x$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = x^2 + 3$ d) $f(x) = \frac{2}{x + 1}$

285. Sendo $g(x) = \frac{3}{1 + x^2}$

a) Determina o domínio e o contradomínio de g;

b) Averigua se g é par ou ímpar.

c) Indica zeros e sinal de g.

d) Calcula g (3x), g (x + 2) e g (x^2 + 1)

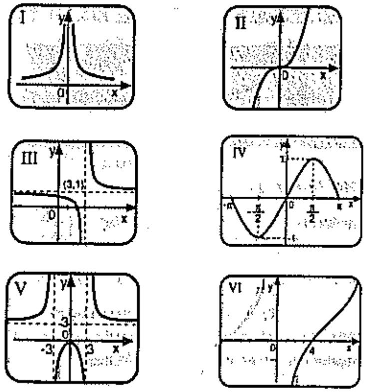
286. Observa os gráficos das funções e indica em cada caso,

a) o domínio e o contradomínio;

b) os intervalos de monotonia e extremos;

c) os pontos em que o gráfico intersecta os eixos;

d) se é par ou ímpar e se é injectiva.



287. Representa graficamente, na calculadora, as funções

a) $y = 2x - 3$ c) $y = \frac{1}{3}x^3$ e) $y = \sqrt{x}$

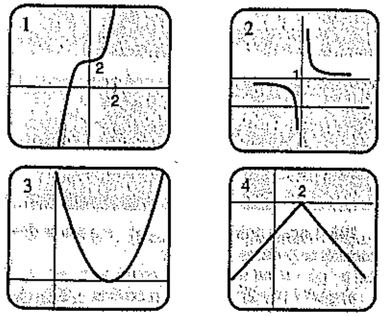
b) $y = x^2 + 1$ d) $y = \frac{1}{x^2}$ f) $y = |x|$

e indica D, D' e a monotonia de cada uma.

288. Identifica o gráfico que corresponde a cada uma das funções:

A. $x \mapsto y = (x - 2)^2$ C. $x \mapsto y = 1 + \frac{1}{x}$

B. $x \mapsto y = x^3 + 2$ D. $x \mapsto y = -|x - 2|$



1. Uma equação da parábola que contém A0B.

2. As coordenadas dos pontos da parábola cuja distância ao solo é 90 m.

3. A altura do poste [AS] sabendo que ST é a tangente à parábola com declive 1.

Aferição 94 — Época normal

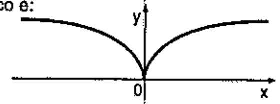
DERIVADAS

324. Calcula, usando as regras de derivação, a função derivada de cada uma das funções:

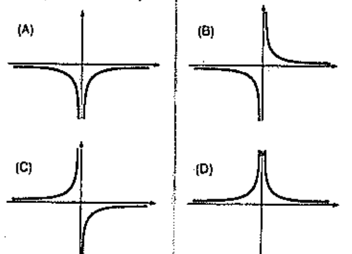
a) $x \mapsto f(x) = 2x + 8$ b) $x \mapsto i(x) = -\frac{3}{2}x^2$

c) $t \mapsto h(t) = -\frac{9}{5}t$ d) $t \mapsto j(t) = t^2 - 5t$

325. Seja f uma função real de variável real cujo gráfico é:



Então, o gráfico da sua função derivada f' pode ser representado por:



Prova Específica 1993 – Época Normal

326. Determina os zeros de f' sendo:

a) $f(x) = 2(x-1)^2$ b) $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{8}{x}$

c) $f(x) = x^3 - 6x$ d) $f(t) = -10t^2 + 4t - 5$

e) $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{9}{t+2}$ f) $f(x) = x + \frac{x+5}{2x+3}$

(Sugestão para f): usar a definição de derivada)

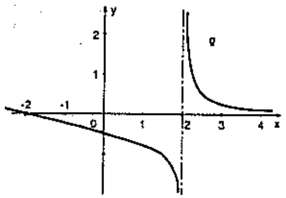
327. Esboça um gráfico possível da função contínua f, de domínio $[-3, 7]$, sabendo que:

$f(-3) = 4$, $f(0) = 0$, $f(2) = 2$, $f(4) = 5$ e $f(7) = 3$

$f'(x) < 0$ se $x \in]-3, 0[\cup]5, 7[$

$f'(x) > 0$ se $x \in]0, 5[$

328. O gráfico seguinte é da função g:



a) Será g monótona? Porquê?

b) Que podes afirmar do sinal da derivada?

c) Indica o domínio e as assímptotas do gráfico.

329. Segue-se o quadro de variação de uma função real f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; sabe-se ainda que $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -5$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$;

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

x	$-\infty$		-2		-1		3		7		$+\infty$
sinal f'(x)		−	0	+		+	0	+	0	−	
f(x)			-4				-2		6		

1. Quais as coordenadas dos pontos em que f tem extremos? Classifique esses extremos.

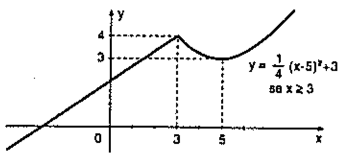
2. Averigúe a existência de zeros de f e, caso existam, localize-os.

3. Proponha um gráfico para a função f.

4. Escreva equações das tangentes ao gráfico de f que o quadro permite conhecer.

Prova de aferição – 1993, 1.ª chamada

330. A figura é um gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Responde às questões:

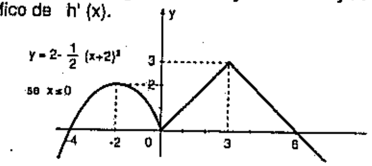


a) Mostra que f é contínua e não tem derivada para $x = 3$.

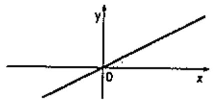
b) Indica intervalos de monotonia e extremos de f.

c) Traça um gráfico da função derivada de f.

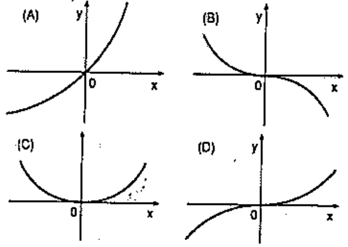
331. Observa o gráfico da função h e traça o gráfico de h' (x).



332. Supondo que o gráfico da função derivada f' é



então um gráfico de f pode ser



Prova Específica 1993 – Novo Programa, Época especial

MÁXIMOS E MÍNIMOS

333. A altura (em metros) atingida por um rocket t segundos após o lançamento na vertical é dada por $s = f(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 32t^2 + 65t + 2$

a) Calcula uma expressão para a velocidade v do rocket no instante t_0.

b) Calcula a velocidade ao fim de 0,1 s, 32 s, 50 s, 65 s, 70 s e interpreta os resultados.

c) Usando o resultado obtido em a) calcula a altura máxima que o rocket atinge, tendo em conta que esta corresponde a um instante em que a velocidade se anula.

334. São dados, num referencial o.n. os pontos $A \mapsto (0,1)$, $B \mapsto (6,1)$ e $P \mapsto (x,0)$. Determina x de forma que $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ seja mínima.

335. Seja f uma função de variável real tal que

$$f(x) = x^3 - 2x - 2.$$

a) Prova que f tem pelo menos um zero em $]1,2[$.

b) Determina os pontos em que a recta tangente ao gráfico de f tem inclinação de 45° e escreve equações cartesianas dessas rectas.

c) Indica os intervalos de monotonia e os extremos relativos de f.

d) Esboça o gráfico desta função.

336. Determina as dimensões do rectângulo

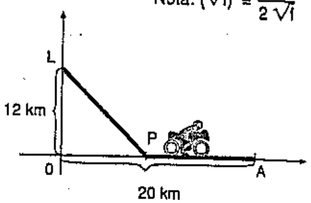
a) com 100 cm² de área e cujo perímetro é o menor possível.

b) de maior área que se pode contornar com 1200 m de rede.

(*)**337.** Um ciclista está na localidade L a 12 km do ponto O mais próximo de uma estrada, rectilínea e alcatroada, e pretende ir à aldeia A que dista 20 km de O sobre essa estrada.

O ciclista desloca-se a 10 km/h na estrada alcatroada e a 8 km/h fora da estrada. Determina o ponto P em que deve atingir a estrada alcatroada para fazer o percurso no menor tempo possível.

Nota: $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$



338. Numa fábrica, o custo total da produção mensal de q centenas de peças, expresso em milhares de escudos, é dado por

$$c(q) = q^3 - 12q^2 + 21q + 1000$$

a) Determine a função c' (q), custo marginal, e calcule o seu valor para 6 centenas de peças.

b) Estude a variação do custo total no intervalo]0,8[. Qual o número de peças que aconselha ao fabricante para que o custo total seja mínimo?

Prova de aferição 1993 — Época especial

339. Um arame com 24 cm vai ser cortado em duas partes, uma para formar um quadrado e outra para formar uma circunferência. Em que ponto deve ser cortado o arame para que a soma das áreas do quadrado e da circunferência seja mínima?

Exercícios de revisão geral do Tema 2

340. Um trapézio tem três lados com 8 cm cada um. Determina o comprimento do 4.º lado de forma que a área seja máxima. Sugestão: Exprima a área em função de metade da diferença das bases.

FUNÇÃO INVERSA

341. A área $A\ m^2$ dum balão de ar quente, de raio r metros é dada por $A = 4\pi r^2$. O raio varia com o tempo (t segundos) de acordo com a fórmula $r(t) = \sqrt{\frac{1}{4}t^2 + 2}$, $t \geq 0$ (t segundos).

a) Calcula A em função de t e t em função de A;

b) Calcula a área ao fim de 2 s.

342. Para converter graus C em graus F usa-se $F = f(C) = 1{,}8\,C + 32$.

Determina f^{-1} e calcula $f^{-1}(41)$.

343. O período T (segundos) de oscilação dum pêndulo simples, em função do seu comprimento c metros é dado por $T(c) = 2\pi\sqrt{\frac{c}{g}}$.

Considera $g = 10\ m/s^2$

a) Exprime c em função de T;

b) Calcula $c(2\sqrt{2}\,\pi)$

RADICAIS

344. Diz para que valores de x se tem:

a) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3 - x$

b) $\sqrt[3]{a^3 - 6a^2 + 2ax - 8} = a - 2 \quad (a \neq 0)$

345. Simplifica:

a) $(2\sqrt{6}) \cdot (3\sqrt{2})$ e) $(5\sqrt{3} + 4\sqrt{6})(2\sqrt{8} - 3)$

b) $\sqrt[3]{18x^2} \cdot \sqrt[3]{12x}$ f) $6\sqrt{2} - \sqrt{50} - \frac{3}{4}\sqrt{8}$

c) $\sqrt[3]{\frac{27a}{8a^4}}$ g) $\sqrt[3]{8a} - \sqrt[3]{27a^3} + 5\sqrt[3]{a}$

d) $(\sqrt{3} - 1{,}5)(\sqrt{3} + 1{,}5)$

346. Mostra que:

a) $\frac{-\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{81}} = -\frac{2}{3}$ c) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7} + 2} = \sqrt{14} - 2\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt{3} - 1}{3\sqrt{3} + 3} = \frac{1}{6}(4 - 2\sqrt{3})$

EXPOENTE FRACCIONÁRIO

347. Simplifica:

a) $\left(\frac{2a^{1/3}}{b^{2/3}}\right)^{-3}$ b) $(m^{3/2} - 1)(m^{3/2} + 1)$

c) $(x^{5/2} + 1)^2 + (x^{5/2} - 1)^2$

d) $6x^{\frac{1}{2}}(3 - 2x) + 8x^{\frac{3}{2}}$

348. Simplifica:

a) $(a^3x^6)^{\frac{2}{3}}$ b) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ c) $x^{\frac{4}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{4}}$

d) $(9x^{\frac{1}{3}}y^{-2})^{\frac{3}{2}}$

ELIPSE

349. Considere uma elipse de focos $F(-3, 0)$ e $F'(3, 0)$ e tal que a maior distância entre dois dos seus pontos é 8. Quais das seguintes afirmações é verdadeira:

(A) Uma equação da elipse é $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

(B) A elipse intersecta o eixo Oy nos pontos $(0, -4)$ e $(0, 4)$

(C) A excentricidade da elipse é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(D) O ponto $P(0, \sqrt{7})$ pertence à elipse.

Prova Específica 95 — Época normal

350. Considere num referencial o.n. os pontos $A(-2, 0)$ e $B(2, 0)$. Então pode deduzir-se que o conjunto de pontos P do plano tais que $\overline{PA} + \overline{PB} = 4$ é:

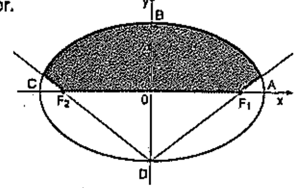
(A) Uma elipse; (B) O conjunto vazio;

(C) [AB]; (D) {A, B}

Exame Nacional 96 — 1ª fase, 2ª chamada

ACTIVIDADE

Caracterizar o domínio plano colorido e a respectiva fronteira sabendo que a elipse está centrada na origem, tem 10 de eixo maior e 6 de eixo menor.



Nota Histórica

1. O CÁLCULO ALGÉBRICO

Na escola de Alexandria

• Euclides (séc. III a.C.), nos «Elementos» faz o estudo de equações do 1.º e do 2.º graus com as vestes da Geometria, uma vez que já dispunha duma teoria geométrica das grandezas, mas não de uma teoria aritmética dos números reais. De facto, na resolução dos problemas considerava segmentos de recta em vez de números.

• Diofanto de Alexandria (séc. III d.C.) revela, na sua «Aritmética», uma grande familiaridade com as propriedades dos números racionais e o domínio de técnicas de natureza algébrica, como transformação de expressões, substituição, eliminação, etc.

Estas operações representam algo de novo nas Matemáticas gregas, tanto a nível de conteúdo, como de métodos, e deixam ver Diofanto como um percursor da Álgebra.

• A partir de um conjunto de regras ou de técnicas para resolver certos problemas práticos e graças ao uso progressivo de símbolos para representar números arbitrários e também incógnitas, foram-se estabelecendo expressões gerais para as operações e para as regras do cálculo algébrico abstracto. Embora coexistindo com a Aritmética, a Álgebra foi ganhando alguma identidade própria.

Essas regras iniciais evoluíram para uma metodologia cujo objectivo central apontou, até ao séc. XIX, para uma teoria das equações. Mais tarde esse objectivo seria alargado com o desenvolvimento da Álgebra Abstracta.

Na escola de Bagdad

• Pode dizer-se que a Álgebra é uma criação dos matemáticos árabes. Apoiando-se em conhecimentos colhidos nas culturas [illegible] e helénica, a sua contribuição fundamental verifica-se no domínio da elaboração do cálculo algébrico, da construção da teoria das equações, dos métodos e dos algoritmos válidos para Álgebra a par da Aritmética, [illegible] ultrapassar os métodos geométricos que eram tradicionais. Desta forma contribuíram para o progresso do carácter autónomo da Álgebra em relação à geometria.

• AL-KHWARIZMI (780-850 d.C.) foi o primeiro grande sábio árabe da Escola de Bagdad.

Divulgou o sistema hindu de numeração decimal de posição e foi autor de um importante tratado de cálculo «Al-jabr w'al-muqabala» que é considerado obra de referência da Álgebra em língua árabe e teve inúmeras traduções em latim, a primeira das quais em 1440 por João de Sevilha.

Esta obra influenciou fortemente toda a Ciência ocidental na Idade Média. Nela o autor resolve, por via algébrica, equações do 1.º e 2.º graus de coeficientes numéricos.

Embora não usasse símbolos para os números (a sua álgebra era completamente descritiva), dava nomes às incógnitas (say, gerr, ...), usava "mal" para o quadrado da incógnita, etc.

• Estudou a resolução de equações que, na linguagem simbólica actual, seriam dos tipos

$ax^2 = bx \qquad bx = c \qquad ax^2 + c = bx$

$ax^2 = c \qquad ax^2 + bx = c \qquad bx + c = ax^2$

e usou as seguintes transformações na resolução:

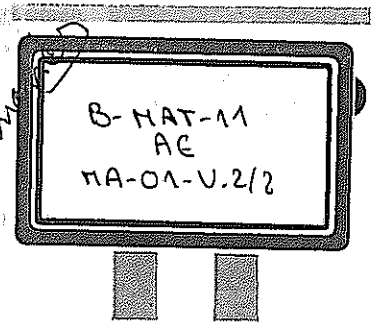
– al-jabr que significa reunir, juntar, restaurar, e que consiste em desembaraçar de termos subtractivos por adição da mesma expressão aos dois membros da equação.

Por exemplo:

De [illegible] Ou [illegible]

vinha [illegible] vinha [illegible]

Carlos Rafael da Costa Fernandes



VOLUME 2

Ana Maria Brito Jorge
Conceição Barroso Alves
Graziela Fonseca
Judite Barbedo

AREAL EDITORES, S. A.
EC PEDRO HISPANO – 4102-811 PORTO

DIRECÇÃO EDITORIAL
Rua da Torrinha, 228-H, 3.º andar – 4050-610 PORTO
TEL. 223 393 900 – FAX 222 005 708

DIRECÇÃO COMERCIAL – ARMAZÉM
Rua D. Marcos da Cruz, 1361 / 1395 – 4455-482 PERAFITA
TELS. 229 959 608 / 229 966 985 / 229 967 341
FAX 229 959 583

ESCOLA VIRTUAL
Rua da Torrinha, 254 – Loja C – 4050-610 PORTO
TEL. 223 393 900 – FAX 223 393 910

LIVRARIA – MATERIAL DIDÁCTICO
Av. da Boavista, 1471 – Loja 10 – 4100-131 PORTO
TEL. 226 000 362 – FAX 226 068 449

AREAL PROFESSOR
Informação Editorial, Café, Livraria, Auditório, Centro de Formação
Rua da Torrinha, 254 – Lojas A e B – 4050-610 PORTO
TEL. 223 393 900 – FAX 223 393 910

Linha Verde Professor
800 200 758

www.arealeditores.pt
Email: areal@arealeditores.pt

FICHA TÉCNICA

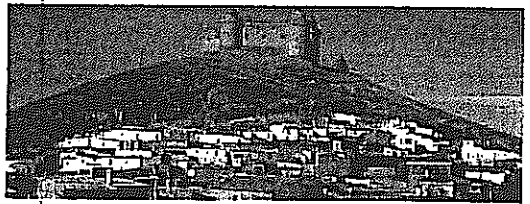
Director Editorial: Diogo Santos
Design gráfico: Areal Editores
Ilustração: Cristina Souza
Capa: Vítor Simões
Imagens: © PhotoDisc, Inc.
© Digital Vision, © John Foxx

Este produto ecológico não agride o meio ambiente porque é isento de cloro elementar

Aplicações

Variação populacional

1. Uma urbanização tinha, a certa altura, uma população de, aproximadamente, 500 pessoas.
Foi estimado uma aumento anual de 100 habitantes.



a) Encontre uma expressão para a população P da cidade, t anos após a sua inauguração.

Determine $\frac{dP}{dt}$ e explique o que representa.

b) Por várias razões, o aglomerado populacional não cresceu como estava previsto e a evolução da população tem um modelo mais ajustado na expressão:

$$P(t) = 100(5 + t - 0{,}25t^2)$$

Qual a taxa de variação da população depois de 1, 2 e 3 anos?
Qual foi o maior número de habitantes atingido na urbanização? O que aconteceu?

a) $P(t) = 500 + 100\,t$ (t expresso em anos)

$\frac{dP}{dt} = 100$. Esta razão representa a taxa de crescimento anual da população.

b) Como $P(t) = 500 + 100t - 25t^2$, então a taxa de variação da população é

$\frac{dP}{dt} = 100 - 50t$

Estudando agora o sinal de P'(t), podemos concluir sobre a variação de P(T):

Depois de 1 ano: $\left(\frac{dP}{dt}\right)_{t=1} = 50$

Depois de 2 anos: $\left(\frac{dP}{dt}\right)_{t=2} = 0$

Depois de 3 anos: $\left(\frac{dP}{dt}\right)_{t=3} = -50$

t	0		2	
100 – 50t		+	0	–
P	500	↗	600	↘

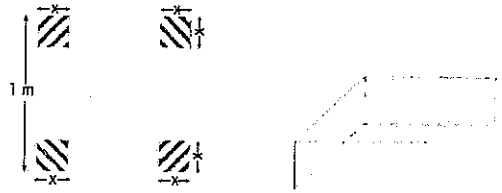
A população aumentou inicialmente, parou de crescer passados dois anos e começou, então, a decrescer.
O número máximo de habitantes foi: $P(2) = 100(5 + 2 - 0{,}25 \times 2^2) = 600$

A população cresceu inicialmente até 600 e, em seguida, decresceu até 0 (ao fim de quase 9 anos, como pode verificar com a calculadora, por exemplo), e a urbanização ficou abandonada.

Aplicações

2. Economia no fabrico

2.1. Considere-se uma placa de cartão de forma quadrada com 1 m de lado.
Corta-se em cada canto um quadrado de lado x, com o fim de fazer uma caixa paralelepipédica sem tampa.



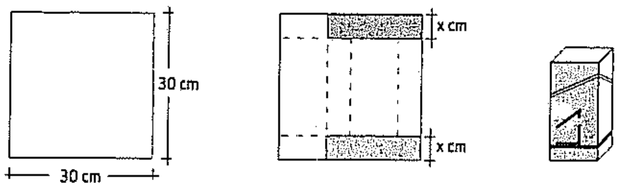
Qual o valor de x que torna o volume da caixa máximo? E qual é, nesse caso, o volume?

O volume da caixa assim construída é
$V(x) = x(1 - 2x)^2 = 4x^3 - 4x^2 + x$ com $0 \le x \le \frac{1}{2}$
Tem-se, portanto:
$V'(x) = 12x^2 - 8x + 1$
Os zeros de V'(x) são $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{2}$ e o quadro de variação da função V é, então:

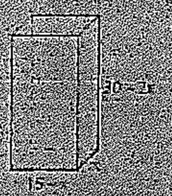
x	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$
V'(x)		+	0	–	
V	0	↗	$\frac{2}{27}$	↘	0

O volume máximo será, aproximadamente, 74 dm³ para $x \simeq 0{,}167$ m.

2.2. Uma empresa fabrica caixas em cartão cortando duas faixas da mesma largura numa folha quadrada.



A medida do lado da folha é 30 cm e designa-se por x a medida, em centímetros, da largura da faixa que se retira.
Determinemos o valor de x que torna o volume da caixa máximo e, seguidamente, calculemos esse volume.



Designemos por V a função que nos dá o volume da caixa.
Então,

$$V(x) = x(15 - x)(30 - 2x) =$$
$$= 2x^3 - 60x^2 + 450x \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq 15$$

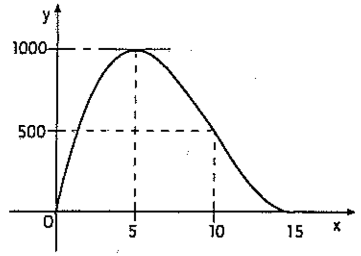
visto que as dimensões da caixa são, em centímetros, x, $15 - x$ e $30 - 2x$ e o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto da área da base pela altura.
Teremos então que

$$V'(x) = 6x^2 - 120x + 450$$

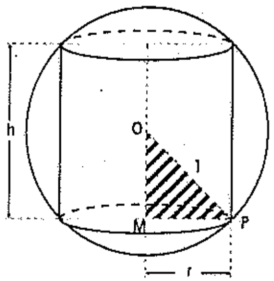
Os zeros de $V'(x)$ são 5 e 15 e o quadro de variação de V é:

x	0		5		15
$V'(x)$		+	0	−	0
V	0	↗		↘	0

O volume será pois máximo para $x = 5$, e o valor do volume máximo é 1000 cm³.
Para confirmarmos os resultados encontrados, representemos graficamente a função $x \mapsto V(x)$ no intervalo $[0, 15]$.



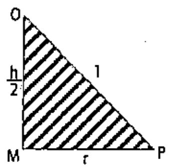
3. O maior cilindro inscrito numa esfera



Consideremos uma esfera de raio 1 dm e um cilindo de altura h e raio da base r inscrito na esfera (as suas duas bases são círculos da esfera).

**Qual o valor de h para o qual o volume do cilindro é máximo?
E qual é o valor desse volume?**

A função cujo máximo queremos determinar é definida por
$V = \pi r^2 h$, onde V representa o volume do cilindro e πr^2, a área da base do cilindro.
Procuremos exprimir V à custa unicamente da variável h.
Para isso é necessário exprimir r em função de h.
Observemos o triângulo rectângulo [OMP] que aparece tracejado na figura.
Por aplicação do teorema de Pitágoras, temos:



$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = 1 \qquad \text{donde} \qquad r^2 = 1 - \frac{h^2}{4}$$

Substituindo r^2 na expressão do volume do cilindro, obtém-se

$$V(h) = \pi\left(1 - \frac{h^2}{4}\right) . h$$

ou seja,

$$V(h) = \pi h - \frac{\pi h^3}{4} = -\frac{\pi}{4}h^3 + \pi h$$

Procuremos agora o valor de h para o qual é máximo o volume V.
Para isso teremos de determinar a função derivada de V e os seus zeros.

$$V'(h) = -\frac{3}{4}\pi h^2 + \pi \quad \text{e} \quad V'(h) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}\pi h^2 + \pi = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow h = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{pois } 0 < h < 2$$

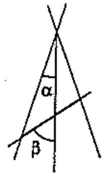
Como o quadro de variação de V no intervalo $]0, 2[$ é:

h	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		2
$V'(h)$		+	0	−	
V		↗		↘	

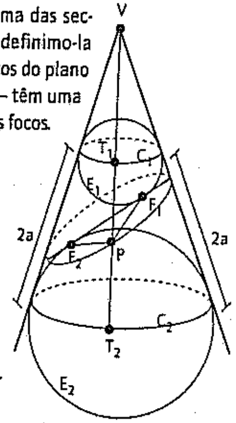
podemos concluir que, para $h = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ dm, o volume do cilindro é máximo e o seu valor é

$$V_{máximo} = V\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \pi\left(1 - \frac{\frac{4}{3}}{4}\right) . \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}4 \text{ dm}^3$$

Elipse – de secção cónica a lugar geométrico



No 10.º ano ficámos a conhecer a elipse como uma das secções cónicas já caracterizadas por Apolonius e definimo-la posteriormente como o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a dois pontos distintos – os focos – têm uma soma constante e superior à distância entre os dois focos.



Vamos agora confirmar que a secção produzida na superfície cónica por um plano cujo ângulo β com o eixo seja maior que o ângulo α de qualquer geratriz com esse eixo é uma elipse, de acordo com a definição dada.

Observe atentamente a figura ao lado.

Sejam E_1 e E_2 duas esferas tangentes à superfície cónica ao longo das circunferências C_1 e C_2, respectivamente.
As duas esferas são também tangentes ao plano da secção nos pontos F_1 e F_2.
Vamos provar que F_1 e F_2 são os focos da elipse determinada na superfície cónica pelo plano secante, pois provaremos que a secção curva é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

sendo **2a** o comprimento do segmento de geratriz compreendido entre as duas circunferências C_1 e C_2.

Para um qualquer ponto P da elipse, consideremos a geratriz VP, e sejam T_1 e T_2 os seus pontos de tangência às esferas E_1 e E_2.
Então, T_1 pertence à circunferência C_1, e T_2, à circunferência C_2, donde resulta que o comprimento $\overline{T_1T_2}$ é o comprimento do segmento de geratriz compreendido entre os planos das circunferências C_1, C_2.
Este comprimento não depende do ponto P considerado e tem o valor constante que atrás designámos por **2a**.
Temos então que

$$\overline{T_1T_2} = 2a$$

Como as semi-rectas $\dot{P}F_1$ e $\dot{P}Q_1$ são ambas tangentes à esfera E_1 partindo de P, então, como se sabe,

$$\overline{PF_1} = \overline{PT_1}$$

e, por um raciocínio idêntico em relação à esfera E_2, conclui-se que também

$$\overline{PF_2} = \overline{PT_2}$$

Adicionando ordenadamente estas duas últimas igualdades, obtemos:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PT_1} + \overline{PT_2}$$

Ora, $\overline{PT_1} + \overline{PT_2}$ é igual a $\overline{T_1T_2}$ e, como $\overline{T_1T_2} = 2a$, conclui-se, como pretendíamos, que

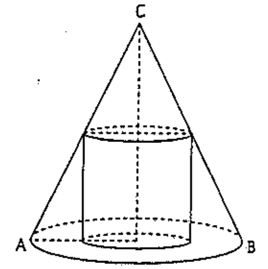
$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

Sugestão: Reveja toda esta demonstração e volte a fazê-la, desdobrando a figura utilizada em fases que acompanhem, em esquema, o raciocínio seguido, à imagem do que se fez com a hipérbole (pág. 42).

Resolução de Problemas

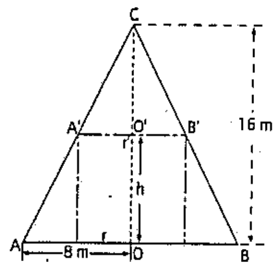
À medida que aprendemos mais, mais problemas podemos resolver.
Também, por vezes, a resolução de problemas que executamos torna-se mais flexível, pelo recurso a outros conhecimentos e à sua interligação criativa.
Isso ocorre com mais facilidade quando se trabalha com mais alguém também interessado na resolução desses problemas.
Resolvendo problemas a dois, ou três, com colegas seus, pode desenvolver mais facilmente a capacidade de comunicação matemática, a par da capacidade de flexibilizar o pensamento e, muitas vezes, desenvolver uma atitude de persistência, ao ajudarem-se nos momentos em que apetece desistir ou deixar para trás algo que parece mais complicado de enfrentar.
Com a colaboração de alguém, resolva o problema seguinte, discuta a resolução apresentada e não se esqueça de, individualmente, redigir, no fim, a sua proposta de resolução.

Num circo, uma lâmpada emite um cone de luz de altura 16 m e raio da base 8 m. Para o trabalho dos trapezistas, é preciso saber que espaço é utilizado dentro desse cone de luz. Chegou-se à conclusão que interessaria o espaço limitado pelo cilindro interior ao cone de volume máximo.



Conhecer a altura e o raio da base desse cilindro é essencial para o trabalho dos trapezistas.

Analisemos o que ficou registado da resolução do Tiago e da Rita.
R – *Por onde começar?*
T – Colocando os dados: 16 m de altura, 8 m de raio da base do cone e as incógnitas, h e r, na figura.
R – Observando a figura, parece que basta raciocinar num esboço dum corte plano, pois o que está em jogo são as alturas e os raios dos dois sólidos.



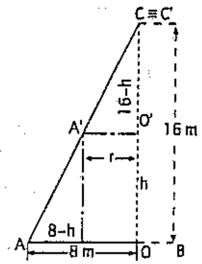
Resolução de Problemas

Esbocemos e usemos variáveis.

T – h, altura do cilindro, e r, raio da base do cilindro, estão relacionados com a altura do cone e o seu raio por meio de uma relação de semelhança entre o triângulo A'O'C' e AOC, dado que são triângulos de lados respectivamente paralelos, isto é, de ângulos respectivamente iguais. Então:

$\frac{r}{8} = \frac{16-h}{16}$, donde podemos exprimir r em função de h (altura)

$$r = \frac{8\,(16-h)}{16} = \frac{16-h}{2} \qquad (1)$$



R – Mas há uma condição para o volume: é a de ele ser máximo.

O volume é a área da base (πr^2) vezes a altura (h), então $V = \pi \left(\frac{16-h}{2}\right)^2 . h$
V é uma função de h

T – Para sabermos para que valor de h é máximo...

Vou já meter na calculadora $y_1 = \left(\frac{16-x}{2}\right)^2 . x$ e depois pesquiso com o TRACE ou a TABLE.

R – Está bem, mas não pensas no rectângulo de visualização?
T – Vamos lá ver qual é o que convém.

O raio só pode variar de 0 a 8 m e h (altura) só pode variar de 0 a 16.
Então, para o eixo das abcissas, temos que ver pelo menos o domínio, que é]0, 16[(vê como pode variar a altura).

R – E, para o eixo das ordenadas, o mínimo volume que nos interessa é zero, e o máximo é, quando muito, o volume do cone, que toma o valor de um terço da área da base vezes a altura.

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 64 \times 16 \simeq 1072$$

Resolução de Problemas

... um bom rectângulo de visualização pode ser [–1, 20] × [–1, 1000]

T – Já meti a função $y_1 = \pi\left(\frac{16-x}{2}\right)^2 . x$

Também já teclei GRAPH e depois TRACE
Para h, ou seja $x = 5{,}32$, vem V, isto é $y_1 = 476{,}5$
Com um ZOOM IN obtenho $h \simeq 5{,}42$ e $V \simeq 475{,}2$
Com dois ZOOM IN obtenho $h \simeq 5{,}32$ e $V \simeq 476{,}54$
Com três ZOOM IN obtenho $h \simeq 5{,}33$ e $V \simeq 476{,}59$

A altura é de 533 cm, a menos de 1 cm, e o volume é 476,6, a menos de uma décima de m^3.

R – Mas acho que podemos experimentar o processo analítico.
Eu acho que se quero alguma coisa com variação, como o máximo de uma função, penso na derivada. A derivada não é quem "traduz" a variação duma função?
T – Espera, tens razão, e se quero o máximo, quero um extremo, e se há derivada aí, ela é zero!
R – Há derivada porque a função é polinomial!
T – É?
R – Olha, desenvolvendo o quadrado de

$$y = \pi\left(\frac{(16-x)}{2}\right)^2 . x \quad \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}(256 - 32\,x + x^2)\,x$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}(256\,x - 32\,x^2 + x^3)$$

Vês? É uma função de 3.° grau e, queres ver?...

T – Agora também já vejo: $V = 256\frac{\pi}{4}h - 32\frac{\pi}{4}h^2 + \frac{\pi}{4}h^3$

E então a derivada é
$$V' = \frac{\pi}{4}(256 - 64\,h + 3\,h^2)$$

E agora, igualando a zero e resolvendo

$h = \frac{64 \pm \sqrt{4096 - 4 \times 3 \times 256}}{6}$, obtemos $h = \frac{16}{3} \vee h = 16$.

R – Mas obtivemos dois valores!
T – Pois, mas temos que ver o domínio!
R – Tens razão, 16 não pertence ao domínio, pois um cilindro com essa altura no interior do cone de 16 m de altura *não teria raio*, isto é, não existe! $\frac{16}{3}$ é o valor exacto e a aproximação às décimas é 5,3 m, obtido pela calculadora.
T – Voltemos a ler, para saber o que fazer.
R – Acho que só falta responder ao problema, não é?

Resolução de Problemas

T – Falta calcular o raio da base.

Calculando r em (1) vem:

$$r=\frac{16-\frac{16}{3}}{2}=\frac{16}{3}\simeq 5{,}3$$

T e R – E agora a resposta: *O espaço que interessa ao trapezista é o interior dum cilindro cuja altura é 5,3 m e a base tem de raio 5,3 m.*

Arranje um parceiro, relembre as sugestões dadas sobre a resolução de problemas e discuta com ele o texto proposto pelo Tiago e pela Rita.

Outros desafios

1. Observe a sequência de igualdades:

$2^2+3^2+6^2=7^2$
$3^2+4^2+12^2=13^2$
$4^2+5^2+20^2=21^2$

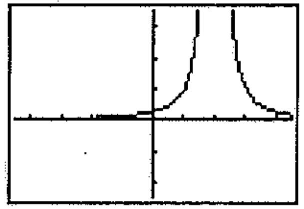
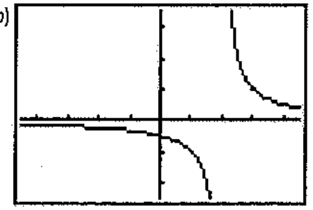
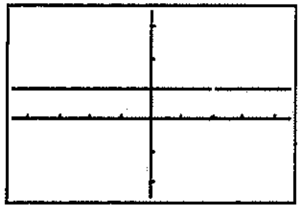
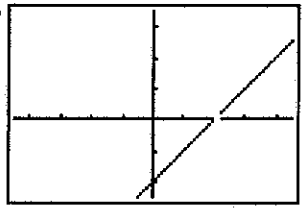
Comece por verificar que são verdadeiras, escreva mais duas "para a frente", experimente ver se pode escrever uma igualdade anterior à primeira. Procure uma expressão que as generalize.

2. Investigue:
Dado um rectângulo qualquer, que tipo de polígono é definido pelos pontos de intersecção das bissectrizes dos seus ângulos consecutivos?
Prove a conjectura que formulou.
(O uso do *sketchpad* torna esta investigação um desafio muito fácil e entusiasmante).

1 A partir da equação $y=\frac{1}{x}$ escreva a equação de uma curva que satisfaça cada uma das condições seguintes:
1. tenha duas assímptotas, uma de equação $y=2$ e outra de equação $x=0$;
2. tenha duas assímptotas cujas equações sejam $y=-4$ e $x=2$.

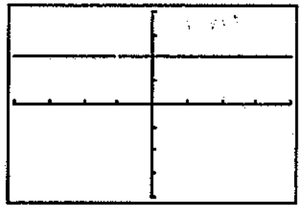
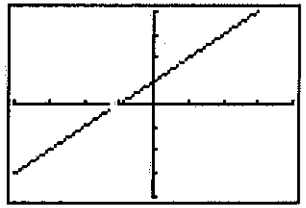
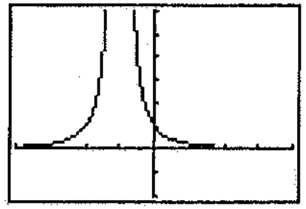
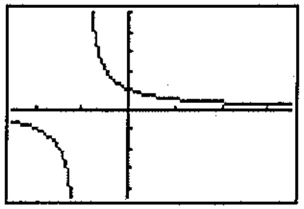
Predizendo assímptotas e "buracos"

2 Nesta investigação considere os gráficos de quatro funções racionais e o comportamento de cada uma delas na vizinhança do ponto 2 e faça corresponder a cada gráfico uma das funções racionais definidas abaixo:

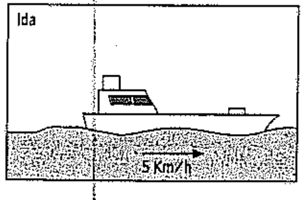
a)

b)

c)

d)


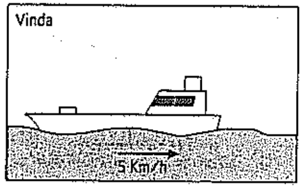
(i) $y=\frac{1}{(x-2)^2}$; (ii) $y=\frac{1}{x-2}$; (iii) $y=\frac{(x-2)^2}{x-2}$; (iv) $y=\frac{x-2}{x-2}$

3 Caracterize uma função racional cujo gráfico possa ser:

1.

2.

3.

4.


10 Um barco desce um rio desde a cidade A até à cidade B situada a 75 km e em seguida regressa a A.
Sabe-se que a duração total do percurso (ir de A a B e voltar), não incluindo o eventual tempo de paragem em B, é de 8 horas, que a velocidade da corrente é 5km/h e que v representa a velocidade (constante) do barco, independentemente da corrente.





1. Exprima, em função de v, a velocidade com que se desloca o barco, devido à influência da corrente, à ida e à vinda.
2. Exprima, em função de v, a duração do trajecto à ida e à vinda.
3. Calcule a velocidade v do barco.

Nota: Admite-se que, se o barco navega no sentido da corrente, a velocidade v do barco e a da corrente se adicionam, subtraindo-se no caso contrário. Admite-se, ainda, que v é constante.

11 Para que um remédio produza o efeito desejado, a sua concentração na corrente sanguínea deve estar acima de um certo valor, o nível terapêutico mínimo.
Suponhamos que a concentração de um remédio t horas após ser ingerido, é dada por:

$$c(t) = \frac{20t}{t^2+4}, \quad \text{em mg/l}$$

Se o nível terapêutico mínimo é de 4 mg/l, determine quando este nível é excedido.

12 Sejam as funções racionais definidas por:

$$f(x) = \frac{1}{4x+3} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{2x-1}{(4x+3)(x-7)}$$

1. Indique o seu domínio.
2. Caracterize $f+g$.
3. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq g(x)$.

13 Sejam $f: x \mapsto \frac{3x-4}{(x-1)^2}$ e $g: x \mapsto \frac{4}{x^3-1}$.

Mostre que $f+g$ é uma função racional e determine o seu domínio.

14 Sejam $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-4}$ e $g: x \mapsto \frac{1}{x-2}$.

1. Mostre que $f+g$ e $f-g$ são funções racionais e determine o seu domínio.
2. Indique para que valores reais de x se tem $g(x) \geq 1$.

15 Sejam $f: x \mapsto \frac{2x+2}{x^2-3x+2}$ e $g: x \mapsto \frac{4x-4}{x-2}$.

1. Mostre que $f \times g$ e $\frac{f}{g}$ são funções racionais e determine o seu domínio.
2. Determine os valores reais de x tais que $f(x) \leq \frac{1}{2}$.

16 f é uma função racional definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ por $f(x) = \frac{-2x^2+6x-3}{2(x-1)^2}$.
Encontre os reais a, b e c tais que, para todo o $x \neq 1$,

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{2(x-1)^2}$$

17 f é a função racional definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ por $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Encontre os reais a e b tais que, para todo o $x \neq 1 \wedge x \neq -1$,

$$f(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

18 1. Determine os números reais a, b e c tais que:

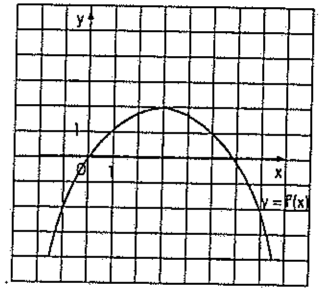
$$\frac{3x^2-5x-7}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

2. Conjecture se o gráfico da função racional definida por $f(x) = \frac{3x^2-5x-7}{x-2}$ tem uma assímptota oblíqua e, no caso afirmativo, indique a sua equação.

19 Um aquário aberto em cima, de forma paralelepipédica, de 45 cm de altura, deve ter o volume de 170 litros.
Sejam x e y o comprimento e a largura da base, respectivamente.

1. Exprima y como função de x.
2. Exprima, em função de x, a área total de vidro necessária.
3. Determine para que valor de x essa área é mínima.

2. O gráfico de uma função cúbica f passa no ponto (0, 2) e o gráfico da função derivada, f', é o representado na figura.



Proponha um gráfico para f.

Problemas de optimização

48 A densidade populacional (número de habitantes por unidade de área) de muitas cidades depende, grosseiramente, da distância ao centro da cidade.
Para uma determinada cidade, a densidade populacional, em milhares de pessoas por km^2, à distância de r quilómetros do centro, é dada, aproximadamente, por:

$$P = 5 + 30r - 15r^2$$

1. Qual a densidade populacional no centro da cidade?

2. Para que valores de r deixa definitivamente de ter significado a expressão dada?

3. Encontre $\frac{dP}{dr}$ e calcule a taxa de variação da função para o raio de

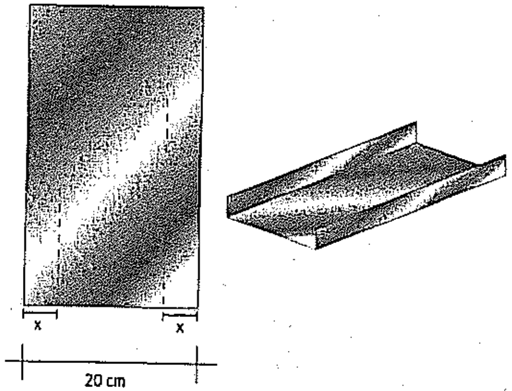
0,5 km ; 1 km ; 2 km,

a partir do centro da cidade.

4. Esboce o gráfico de P e o gráfico de $\frac{dP}{dr}$ e use-os para descrever, por palavras, como varia a densidade populacional com a distância ao centro.

5. Qual é a densidade populacional máxima?
Qual o valor da taxa de variação da densidade populacional para esse raio?

49 Uma folha rectangular de metal com 20 cm de largura vai ser dobrada para se fabricarem caleiras, como mostra a figura:



Por onde devem ser feitas as dobragens para que a caleira transporte a maior quantidade possível de água?

50 Como resultado de uma pesquisa de mercado, o director de uma empresa verificou que a procura dos seus produtos era dada, aproximadamente, por uma função linear de equação

$$v = 30 - 2p$$

em que v representa a procura, ou seja, o número de artigos (em milhões) que serão vendidos ao preço de p escudos.

Se forem vendidos v artigos ao preço de p escudos então, o rendimento r da empresa (em milhões de escudos) será dado por:

$$r = vp = (30 - 2p)\,p = 30p - 2p^2$$

1. Encontre $\frac{dr}{dp}$ e explique o que significa;

2. Calcule $\frac{dr}{dp}$ para $p = 5$ e para $p = 10$;

3. Para que preços, p, de venda é o rendimento crescente?
4. Qual é o *melhor* preço?
5. Qual é a taxa de variação para esse preço?

51 Caracterize a função inversa das seguintes funções reais de variável real:

1. $x \mapsto 3x + 2$ 2. $x \mapsto \frac{2 - x}{x}$

3. $x \mapsto \frac{x - 5}{x + 2}$ 4. $x \mapsto x^3 - 3$

74 Considere as funções definidas em IR por:

1. $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4}$ 2. $f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$ 3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

4. $f(x) = |x^2 - 4|$ 5. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$ 6. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$

1. Determine o domínio das funções dadas.
2. Calcule, para cada uma delas,

a) $f(-x)$ b) $f(x - 2)$ c) $- f(x)$

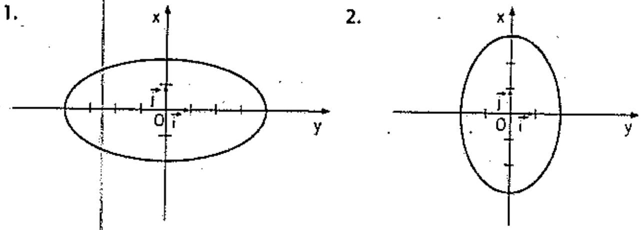
3. Alguma das funções é par? E ímpar?

75 O triângulo [ABC] está inscrito num semicírculo de diâmetro 15 cm.

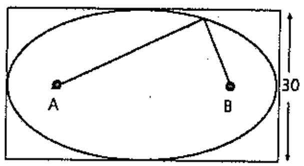
1. Exprima a área do triângulo [ABC] em função do cateto de medida x.
2. Determina para que valores de x essa área é máxima.
Qual é o valor dessa área?

76 Escreva as equações reduzidas das elipses representadas nas figuras seguintes:

1. 2.



77 Um jardineiro traçou uma elipse inscrita num terreno rectangular de 30 m de largura, como indicado na figura:



Para isso usou um fio de 50 m de comprimento, esticado e preso, nas suas extremidades, a duas estacas, situadas nas posições A e B.
A distância entre as estacas é (escolha a opção correcta):

[A] 30 m [B] 35 m [C] 40 m [D] 45 m

78 Escreva uma equação que defina o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano, cuja soma das distâncias a $F_1(8, 0)$ e a $F_2(-8, 0)$ é 20 unidades.

79 Escreva uma equação da elipse de focos $F_1(0, 1)$ e a $F_2(0, -1)$, sabendo que o seu eixo maior tem 10 unidades de comprimento.

80 Escreva a equação reduzida da elipse centrada na origem e da qual se conhecem dois pontos: $(-4, -3)$ e $(6, 2)$.

81 Considere uma elipse de focos $F(-3, 0)$ e $F'(3, 0)$ e tal que a maior distância entre dois dos seus pontos é 8. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A elipse intersecta o eixo dos YY nos pontos $(0, -4)$ e $(0, 4)$.
(B) O ponto $P(0, \sqrt{7})$ pertence à elipse.
(C) uma equação da elipse é $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

82 Considere, marcados num eixo, os pontos $A(-2, 0)$ e $B(2, 0)$. Então, pode deduzir-se que o conjunto de pontos P do plano tais que $\overline{PA} + \overline{PB} = 4$ é (escolha a opção correcta):

[A] uma elipse [B] O conjunto vazio

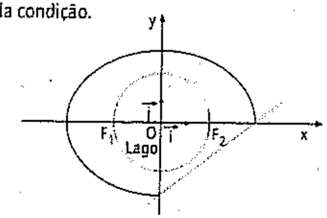
[C] [AB] [D] {A, B}

83 Considere, num referencial o.n. xOy, a elipse de focos $(-3, 0)$ e $(3, 0)$ a que pertence o ponto $(0, 4)$. Um outro ponto que pertence à elipse é (escolha a opção correcta):

[A] (5, 0) [B] (3, 4)

[C] (4, 0) [D] (0, −5)

84 Na figura está representado o canteiro que ganhou o concurso de canteiros organizado pela Junta de Freguesia, para um dado espaço verde.
Para fazer o desenho em computador necessita-se da condição que define a superfície do canteiro (a sombreado) no referencial o.n. dado.
O arco exterior é de uma elipse de focos F_1 e F_2 e eixo maior 8 m.
O arco interior é uma circunferência de diâmetro $\overline{F_1F_2} = 4$ m.
Determine a referida condição.



FICHA TÉCNICA

TÍTULO: MATEMÁTICA 11.º ANO - PARTE 2: FUNÇÕES 2
AUTORA: MARIA AUGUSTA FERREIRA NEVES
COLABORAÇÃO: ANTÓNIO MACHADO E MOURA
ALBINO PEREIRA
CONCEIÇÃO VALENTE
LUÍS GUERREIRO
SÓNIA SOUSA
DESIGN GRÁFICO E CAPA: ANTÓNIO MODESTO
ILUSTRAÇÃO: ANA LÚCIA
EDITORA: PORTO EDITORA

PORTO EDITORA LDA.

[illegible]

LIVRARIAS

[illegible] (351) 22 200 76 [illegible]
[illegible] PORTUGAL - TELEF. [illegible]

e na internet em: [illegible]

LIVRARIAS DO PROFESSOR

[illegible] TELEF. (351) 22 [illegible]
[illegible] COIMBRA PORTUGAL - TELEF. (351) [illegible]
[illegible] PORTUGAL - TELEF. (351) 21 843 09 10

e na internet em: [illegible]

E-mail: [illegible]

DISTRIBUIDORES

ZONA CENTRO

LIV. ARNADO, LDA.

[illegible] Manuel [illegible] 20 (à Pedrulha)
[illegible] COIMBRA PORTUGAL
TELEF. [illegible]
FAX (351) [illegible]

LIVRARIA

R. de João Machado, 9 - 3000-226 COIMBRA PORTUGAL - TELEF. (351) 239 83 35 28

ZONA SUL

EMP. LITERÁRIA FLUMINENSE, LDA.

Av. [illegible] Coutinho [illegible] - 1700-027 LISBOA PORTUGAL
TELEF. [illegible]
FAX [illegible]

LIVRARIA

Av. [illegible] Coutinho, 59 D - 1700-027 LISBOA PORTUGAL - TELEF. (351) [illegible]

[illegible]

Maria Augusta Ferreira Neves
Professora Coordenadora

FUNÇÕES 2

Matemática · 11.º Ano
Parte 2

Colaboradores:

António Machado e Moura
Professor Catedrático

Albino Pereira
Professor Ens. Secundário

Conceição Valente
Professora Ens. Secundário

Luís Guerreiro
Professor Ens. Secundário

PORTO EDITORA

EXEMPLO 2 Estudar o sentido de concavidade

Estude o sentido da concavidade e determine, se existirem, os pontos de inflexão do gráfico da função:

2.1 $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x - 50$

2.2 $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$

Resolução

2.1 $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x - 50$

$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 48$

$f''(x) = 12x^2 - 72x$

$f''(x) = 0 \iff 12x^2 - 72x = 0 \iff x(12x - 72) = 0 \iff$

$\iff x = 0 \lor x = 6$

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
f''(x)		+	0	–	0	+	
f(x)		∪	– 50	∩	– 1058	∪	

Os pontos $(0, -50)$ e $(6, -1058)$ são pontos de inflexão. A curva tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0[$ e $]6, +\infty[$.

A curva tem a concavidade voltada para baixo em $]0, 6[$.

2.2 $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$g''(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g''(x)		–	s.s.	+	
g(x)		∩	s.s.	∪	

A curva não tem pontos de inflexão. Tem a concavidade voltada para cima em $]0, +\infty[$ e voltada para baixo em $]-\infty, 0[$.

5. Estude o sentido da concavidade e determine, se existirem, os pontos de inflexão do gráfico de cada uma das seguintes funções:

5.1 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;

5.2 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$.

5.4 PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

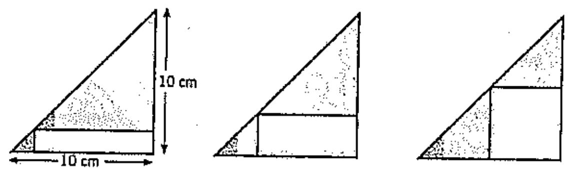
O estudo das derivadas permitiu determinar máximos e mínimos de funções.

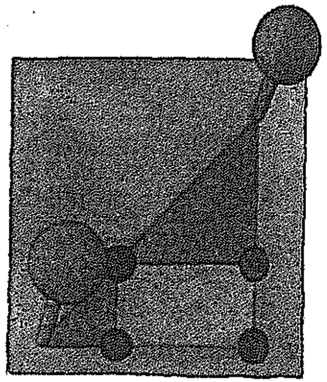
Na vida real é muito importante determinar o custo mínimo, o volume máximo, a área máxima, etc.

Vamos estudar alguns exemplos onde se utilizem derivadas para resolver problemas de optimização, ou seja, problemas onde se procura a solução "óptima".

EXEMPLO 3 O canteiro num jardim

Num jardim com a forma de um triângulo rectângulo isósceles queremos desenhar um canteiro com se indica na figura: um dos vértices do rectângulo pertence à hipotenusa e os outros aos catetos.



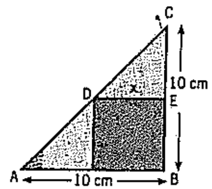


Um destes rectângulos terá área máxima. Qual deles é?

Resolução

Para resolvermos o problema procederemos do seguinte modo:

1.º Desenhamos uma figura onde colocamos as incógnitas e os dados.



2.º Escrevemos a fórmula que relaciona as variáveis e a função pedida. (Neste caso a área do rectângulo.)

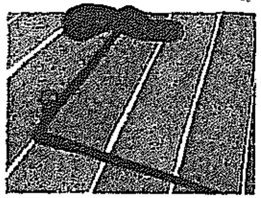
$$A = xy.$$

3.º Procuramos uma relação entre as variáveis.

No caso temos que são semelhantes os triângulos [ABC] e [DEC]

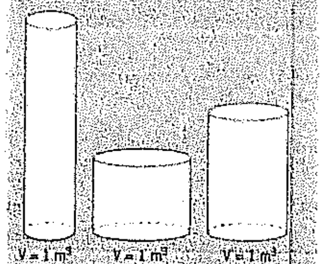
$$\frac{10-y}{x} = \frac{10}{10} \iff 10 - y = x \iff y = 10 - x.$$

6.



Com um fio de 150 cm de comprimento, quais são as dimensões do rectângulo de área máxima que é possível construir?

Nota



Os cilindros podem ter o mesmo volume e formas muito diferentes.

4.º Escrevemos a função em causa como dependente de uma só variável, combinando a informação obtida.

$$A = xy$$
$$y = 10 - x$$
$$A = x \cdot (10 - x) \iff A = 10x - x^2$$

Poderíamos agora procurar a solução com a calculadora gráfica, mas vamos usar o método algébrico e apenas confirmar o resultado com a calculadora.

5.º Derivamos a função e determinamos os extremos.

$$A' = 10 - 2x$$

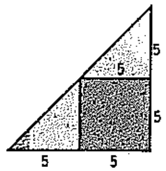
x	0		5		$+\infty$
A'		+	0	+	
A		↗	M	↘	

6.º Damos resposta ao problema reflectindo sobre a viabilidade da solução.

Logo, a área máxima é

$$A = 10 \cdot 5 - 25 = 25$$

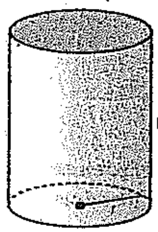
e corresponde à situação em que o rectângulo é um quadrado de lado 5 cm.



A área máxima corresponde à situação em que o rectângulo é um quadrado.

EXEMPLO 4 O cilindro de latão

Uma empresa fabrica cilindros em latão com $1\ m^3$ de volume. Estudar as dimensões do cilindro de modo a gastar o mínimo possível de latão na sua construção.



V = 1 m³

Resolução

Seguindo o processo indicado, vem:

1.º Desenhamos uma figura onde colocamos as variáveis e as constantes.

$$V = 1\ m^3$$

2.º Escrevemos a fórmula que relaciona as variáveis e a função pedida.

Área total = Área lateral + Área das bases

$$A = \text{Área total} = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2$$

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

3.º Procuramos uma relação entre as variáveis.

$$V = 1\ m^3; \quad V = \pi r^2 \cdot h$$

$$1 = \pi r^2 h \iff h = \frac{1}{\pi r^2}$$

4.º Escrevemos a função em causa como dependente de uma só variável.

$$A = 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$

$$A = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$$

5.º Determinemos os extremos da função.

$$A' = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r$$

$$A' = \frac{-2 + 4\pi r^3}{r^2}$$

Cálculo auxiliar

$$-2 + 4\pi r^3 = 0$$
$$4\pi r^3 = 2$$
$$r^3 = \frac{2}{4\pi}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \iff r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

r	0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$		∞
A'		−	0	+	
A		↘	Mínimo	↗	

6.º Damos resposta ao problema reflectindo sobre a viabilidade da solução.

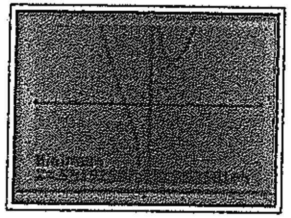
A área total mínima corresponde a um cilindro que tem:

raio da base: $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ metros $\approx 0{,}542$ m

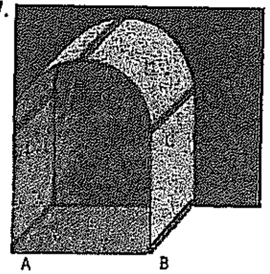
altura: $h = \frac{1}{\pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^2} = \frac{1}{\pi \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4\pi^2}}} = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$

Logo, $h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ metros.

Confirmamos, ao lado, com a calculadora.



7.

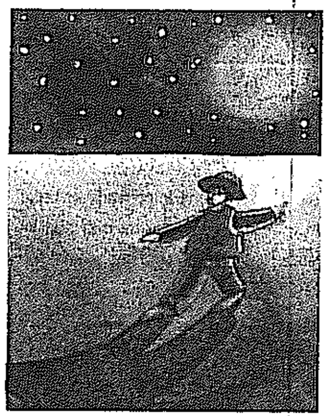


Com 714 m de rede pretende-se vedar um terreno, com a forma indicada na figura, constituído por um rectângulo [ABCD] e um semicírculo de diâmetro [DC].

Determine as dimensões do rectângulo de modo a que área seja máxima.

EXEMPLO 5 A velocidade da sombra

O Vitor ia a passear de noite e a sua sombra acompanhava-o. Quanto mais depressa ele andasse, mais depressa a sombra se movia.



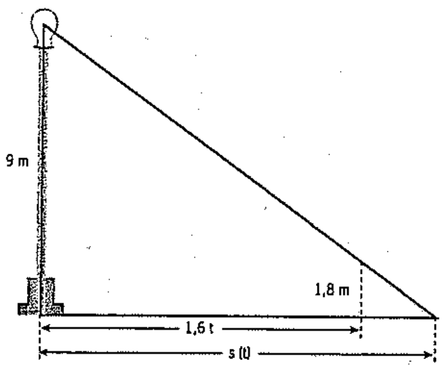
Será que a velocidade da sombra é igual à velocidade do Vitor?

Resolução

Imaginemos uma situação concreta.

O Vitor tem $1{,}8\ m$ de altura e passeia a uma velocidade de $1{,}6\ m/s$.

O poste tem $9\ m$. Em cada momento o extremo da sombra ocupa a posição $s(t)$.



Da semelhança de triângulos concluiu-se que:

$$\frac{9}{s(t)} = \frac{1{,}8}{s(t) - 1{,}6t}$$

$$9\,s(t) - 14{,}4t = 1{,}8\,s(t)$$

$$7{,}2\,s(t) = 14{,}4t$$

$$s(t) = 2t.$$

A velocidade da sombra é $v(t) = s'(t) = 2$.

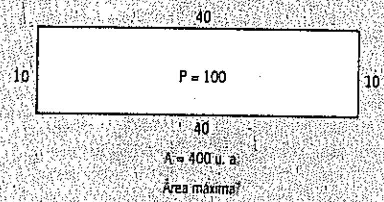
Podemos, então, concluir que a velocidade da sombra é ligeiramente superior à velocidade do Vitor.

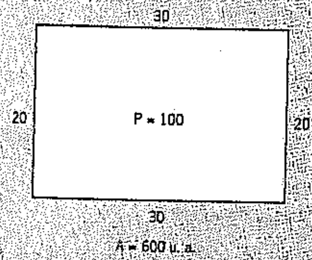
Esta diferença compreende-se porque o Vitor tem sempre a mesma altura e conforme se afasta do poste a sua sombra vai aumentando.

... o que estudou no tema ...

- relação entre o comportamento de uma função e a sua derivada
- determinar extremos de uma função usando a derivada
- a existência de funções que não têm derivada num ponto do seu domínio mas têm um extremo nesse ponto
- sentido da concavidade do gráfico de uma função
- problemas de optimização

Abordagem numérica: Perímetro do rectângulo: 100 u. c.



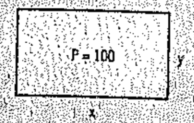


Abordagem algébrica

$A = x\,y$; $P = 2x + 2y$

$100 = 2x + 2y$

$y = 50 - x$

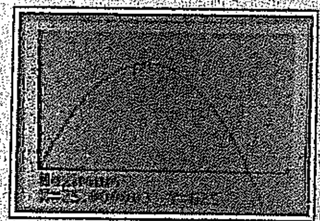


$A = x(50 - x)$; $A = 50x - x^2$

$A' = 50 - 2x$; $50 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 25$

	0		25		$+\infty$
A'		+	0	−	
A		↗	M	↘	

Abordagem algébrica / gráfica



PROBLEMAS RESOLVIDOS

Álgebra e tecnologia gráfica para desenhar parábolas

Para cada uma das parábolas definidas, determine as coordenadas do vértice e represente-as graficamente.

Confirme a resposta com a calculadora gráfica.

$y = x^2 - 4x + 3$;

$y = 2x^2 - 4x + 3$.

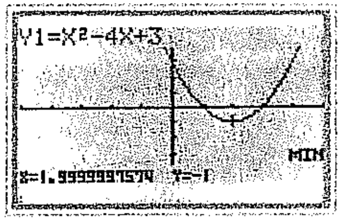
A ordenada do vértice de uma parábola ou é o máximo ou o mínimo da função quadrática definida.

$f(x) = x^2 - 4x + 3$

Determinação do vértice

$f'(x) = 2x - 4$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$V(2 \, , \, \ldots ?)$; $? = f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$



Logo, $V(2 \, , \, -1)$.

Zeros

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{1} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$

$g(x) = 2x^2 - 4x + 3$

Determinação do vértice da parábola

$g'(x) = 4x - 4$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

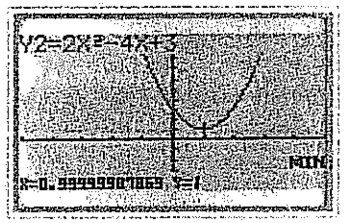
$V(1 \, , \, \ldots ?)$; $? = g(1) = 2 - 4 + 3 = 1$

Logo, $V(1 \, , \, 1)$.

Zeros

$2x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{4 - 6}$.

Não tem zeros.

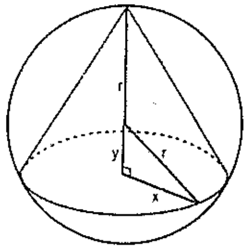


Determinemos a imagem de alguns pontos.

$g(0) = 3$; $g(2) = 3$; $g(-1) = 9$; $g(3) = 9$

PROBLEMAS RESOLVIDOS

O volume máximo do cone



x : raio da base do cone

r : raio da esfera

y + r : altura do cone

Determine o volume máximo de um cone inscrito numa esfera de raio 3 cm .

Resolução

O volume do cone é igual à terça parte do produto da área da base pela altura.

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 (y + 3)$$

Temos que:

$$3^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 = 9 - y^2$$

Substituindo na expressão do volume, vem

$$V = \frac{1}{3} \pi (9 - y^2)(y + 3)$$

$$V = 3y\pi + 9\pi - \frac{\pi y^3}{3} - y^2\pi$$

$$V' = -\pi y^2 - 2\pi y + 3\pi$$

$$V' = -\pi (y + 3)(y - 1)$$

y	−3	0		1	+∞
V'		0	+	0	−
V		9π	↗	Máx.	↘

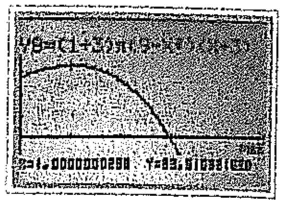
O valor máximo do volume obtém-se para $y = 1$.

Temos:

$h = y + r$; $h = 1 + 3 = 4$

$x = \sqrt{9 - y^2}$; $x = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8}$

$V = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{8})^2 \cdot 4$



Logo,

$V = \frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$

Verifique a resolução com a calculadora gráfica.

PROBLEMAS PROPOSTOS

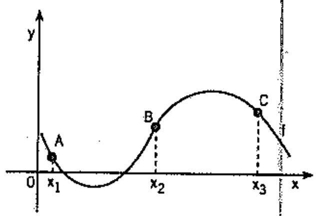
Mostre que a função $f(x) = \dfrac{(x-4)\,x^3}{2}$ tem pelo menos um ponto de inflexão.

Determine algebricamente os extremos da função definida por $f(x) = x^2(1-x)^2$.

... verdadeiro ou falso ...

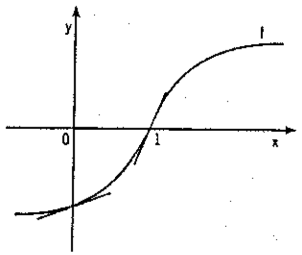
Das seguintes afirmações indique as que são verdadeiras.

9.1



$f'(x_1) < 0 \wedge f'(x_2) > 0 \wedge f''(x_3) < 0$

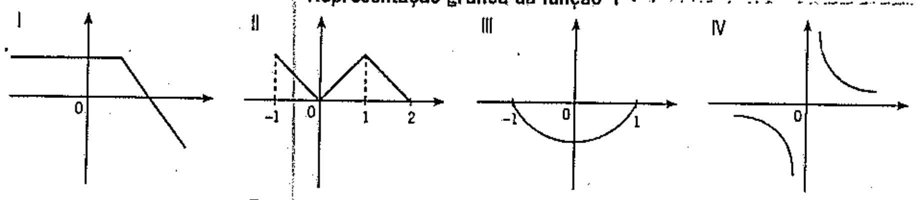
9.2



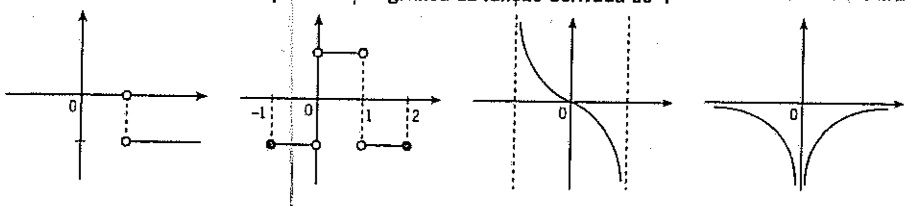
$f(0) < f(1) \wedge f'(0) > 0 \wedge$
$\wedge\ f'(0) < f'(1) \wedge f''(0) > 0$

9.3 A representação gráfica corresponde à derivada da função representada.

Representação gráfica da função f



Representação gráfica da função derivada de f



PROBLEMAS PROPOSTOS

... resolver ... aplicar ... investigar ...

Na resolução destes problemas utilize a calculadora gráfica apenas para verificar os resultados que encontrou através do estudo do sinal da função derivada.

O lançamento de um objecto

A altura h de um objecto que se move verticalmente é dada pela fórmula:

$$h = -16t^2 + 96t + 112$$

sendo t em segundos e h em metros. Determine:

a velocidade do objecto quando $t = 0$ e interprete o resultado algébrica e graficamente;

a altura máxima atingida pelo objecto;

a velocidade do objecto quando $h = 0$ e interprete o resultado.

A soma é 20

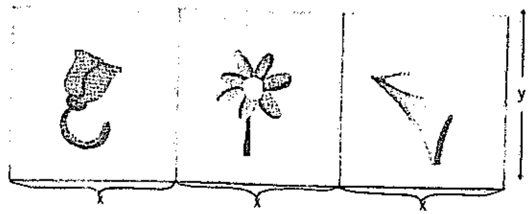
A soma de dois números positivos é 20. Determine os números sabendo que:

o seu produto é máximo;

a soma dos seus quadrados é mínima.

O problema do jardineiro

Um jardineiro pretende criar três canteiros rectangulares vedados como se indica na figura.



Ele tem 300 metros de rede.

De acordo com os dados da figura, mostre que a área dos canteiros em função de x é dada por:

$$A(x) = 450x - 9x^2$$

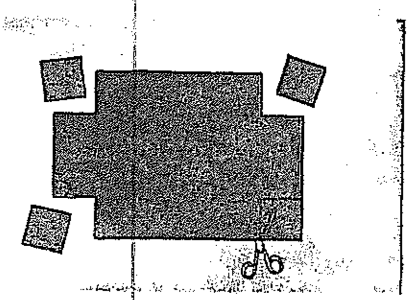
Determine x e y de modo que a área seja máxima.

Qual é o valor máximo da área?

PROBLEMAS PROPOSTOS

A construção da caixa

Para construir uma caixa vão ser cortados quatro cantos quadrados iguais a um quadrado de 12 cm de lado. Determine o lado de cada quadrado de modo que o volume da caixa obtida seja máximo.



Família de funções

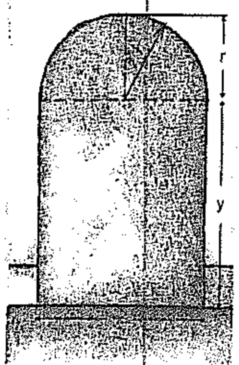
Para cada valor de **a** $f: x \mapsto x^2 + \frac{a}{x}$ é uma função real de variável real.

Determine **a** de modo que:

a função tenha um mínimo para $x = 2$;

a função tenha um ponto de inflexão para $x = 1$.

A porta



Uma porta será constituída por um rectângulo e por um semicírculo, como se ilustra na figura.

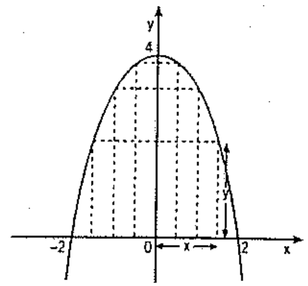
Sabendo que o perímetro da porta será 18 , determine a área máxima da porta.

PROBLEMAS PROPOSTOS

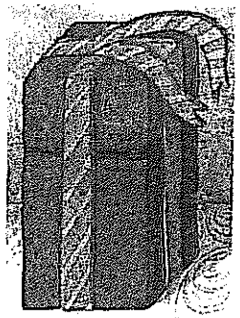
O rectângulo com vértices na parábola

Um rectângulo tem base no eixo dos xx e os outros dois vértices pertencem à parábola de equação $y = 4 - x^2$.

Qual é a área máxima que o rectângulo pode ter?



O máximo volume



Uma caixa, com a forma de um paralelepípedo de base quadrada de lado x cm , tem uma área total de $150\ cm^2$.

Mostre que o volume do paralelepípedo é dado pela fórmula:

$$V = \frac{75x - x^3}{2}$$

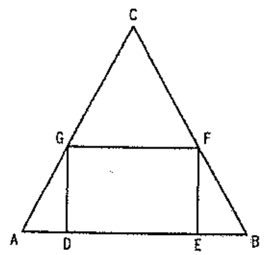
Determine as dimensões da caixa de modo que ela tenha volume máximo.

O rectângulo de área máxima

O triângulo [ABC] é equilátero de lado 10 cm .

Construiu-se um rectângulo [DEFG] , como se indica na figura.

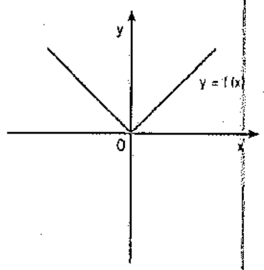
Determine as dimensões do rectângulo de modo que este tenha a área máxima.



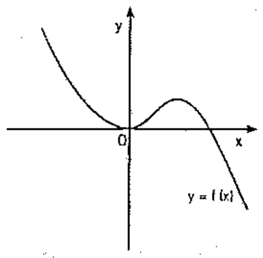
Taxa de variação de uma função. Aplicações das derivadas

Definição de derivada de uma função num ponto

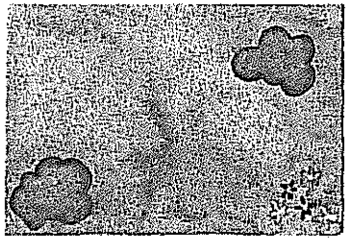
35.7



35.8



O custo da vedação



A Beatriz queria ter um jardim com a forma de um rectângulo. Ela entendeu que não queria mais do que 200 m² de terreno pois não teria tempo de cuidar dele devidamente.

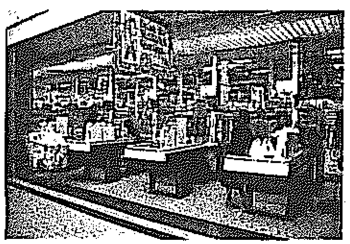
Suponha que x representa o comprimento e y a largura do jardim.

36.1 Escreva y em função de x.

36.2 Escreva o perímetro P em função de x.

36.3 Se a Beatriz pretende vedar o jardim com rede que custe 9 euros (1804$00) o metro, qual é a função custo para a vedação?
Represente graficamente a função custo e determine gráfica e algebricamente o custo mínimo da vedação em função de x.

Optimização de custos



37.1 O custo com máquinas registadoras de um supermercado é função do número de máquinas que estão a operar num dado momento.
Sendo x o número de máquinas, o custo C em euros estimado é dado por:

$$C(x) = 20x + \frac{60}{x}$$

Quantas máquinas deveriam estar a operar de modo a que o custo fosse mínimo?

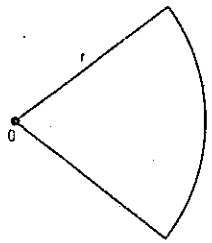
Taxa de variação de uma função. Aplicações das derivadas

Definição de derivada de uma função num ponto

37.2 Um retalhista calculou que o custo **C**, em contos, de encomendar e armazenar x unidades de um produto é dado por:

$$C(x) = 5x + \frac{50}{x}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 200$$

Determine o número de unidades que devem ser encomendadas de modo a minimizar os custos.

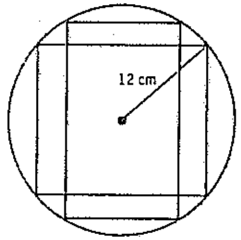


O sector circular de área máxima

Um canteiro de um jardim terá a forma de um sector circular de raio r.

O perímetro do canteiro terá de ser 20 metros.

Determine **r** de modo que a área do canteiro seja máxima.



O rectângulo no círculo

Num círculo de raio 12 cm inscreveu-se um rectângulo.

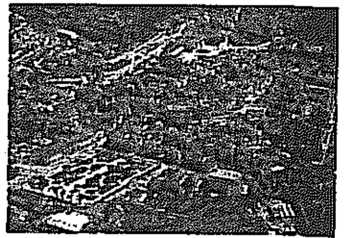
Quais são as dimensões do rectângulo de modo a que a área deste seja máxima?

A densidade da população

A densidade da população (número de residentes por km²) em muitas localidades depende da distância ao centro das localidades.
Na cidade X, a autarquia concluiu que a fórmula que permite calcular a densidade da população em função da distância ao centro, **r**, é:

$$P(r) = 4 + 25r - 10r^2.$$

40.1 Qual é a densidade da população no centro da cidade?


Cidade de Lamego

40.2 Represente graficamente a função P e indique o seu domínio e o seu contradomínio. Explique o significado do domínio e do contradomínio no contexto do problema.

40.3 Calcule a variação da densidade da população para r = 2 km; r = 1,5 km e r = 0,5 km.

40.4 Represente graficamente P e P' e use estes gráficos para descrever como varia a densidade da população relativamente ao centro da cidade.

Autores
Yolanda Lima
Francelino Gomes

Capa e arranjo gráfico
Serviços Técnicos da Editorial O Livro

Impressão
Satelicor - Estúdio Gráfico

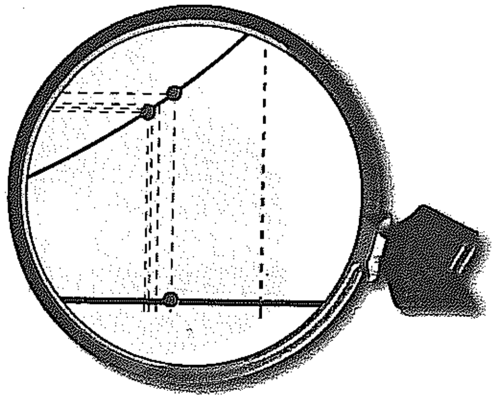
Distribuição exclusiva
Recolivro - Rede Comercial do Livro
Rua Major Neutel de Abreu, Nº18 B/C
1500-411 Lisboa
Telef. 778 35 34 - Fax 778 35 36

Filial
Rua da Boa Hora, 36 e 68 - 4050-099 Porto
Telefs. 200 57 39 / 205 53 39 - Fax 338 96 08

YOLANDA LIMA / FRANCELINO GOMES

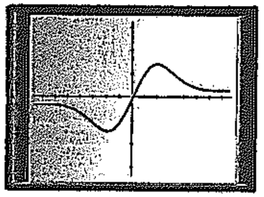
XƎQ MAT

MATEMÁTICA
12º

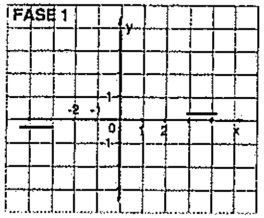


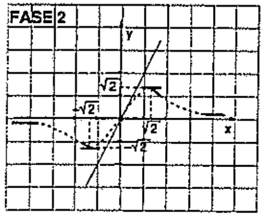
EDITORIAL O LIVRO

Como surge na calculadora:



Fases sucessivas da construção do gráfico com papel e lápis:





304. A energia cinética E é dada por

$$E = \frac{1}{2} m v^2.$$

Sendo $E = 20$, exprime m em função de v e estuda a função em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Esboça o gráfico em papel quadriculado.

305. Estuda as funções com apoio nos gráficos dados pela calculadora:

a) $h(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

b) $y = \frac{(x-1)^2}{x-2}$

1.º EXEMPLO Estudo e representação gráfica de $x \mapsto f(x) = \frac{4x}{x^2+2}$

Função racional fraccionária

Domínio, continuidade, paridade, zeros:

f é uma função racional. Sendo $x^2 + 2 > 0$, $\forall_{x \in \mathbb{R}}$, o domínio é $D_f = \mathbb{R}$ e f é função contínua em $\mathbb{R}$.

Como $f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2+2} = -\frac{4x}{x^2+2} = -f(x)$, $\forall_{x \in \mathbb{R}}$

f é função ímpar pelo que o seu gráfico é simétrico em relação à origem dos eixos, o ponto $(0,0)$. Repara que $f(0) = 0$, logo $(0,0)$ é ponto do gráfico. Não há mais zeros.

Assimptotas:

Sendo definida e contínua em $\mathbb{R}$, não tem assimptotas verticais.

Tem assimptota horizontal porque $\lim\limits_{x \to {+\infty \atop -\infty}} \frac{4x}{x^2+2} = 0$. É $y = 0$.

1.ª Derivada, monotonia, extremos:

$$f'(x) = \frac{4(x^2+2) - 4x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-4x^2+8}{(x^2+2)^2} = \frac{-4(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = +\sqrt{2}$$

QUADRO DE SINAIS DA 1.ª DERIVADA (monotonia e extremos):

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		−	0	+	0	−	
f		↘		↗		↘	

mínimo $= f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ Máx. $= f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

No ponto $x = 0$ temos $f'(0) = \frac{8}{4} = 2$ logo a equação da recta tangente ao gráfico, em $(0,0)$ é $y = 2x$. (ver FASE 2, à margem).

2.ª Derivada, concavidades, inflexão:

$$f''(x) = \left[\frac{-4x^2+8}{(x^2+2)^2}\right]' = \frac{-8x(x^2+2)^2 - 4x(x^2+2)(-4x^2+8)}{(x^2+2)^4}$$

Podemos simplificar pondo $(x^2 + 2)$ em evidência e reduzindo os termos semelhantes:

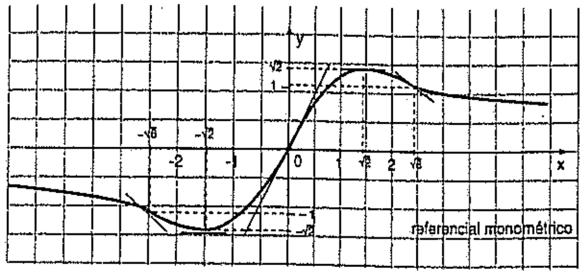
$$f''(x) = \frac{8x^3 - 48x}{(x^2+2)^3} = \frac{8x(x^2-6)}{(x^2+2)^3}.$$ Zeros de f'': $0, -\sqrt{6}, +\sqrt{6}$

QUADRO DE SINAIS DA 2.ª DERIVADA:

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		0		$+\sqrt{6}$		$+\infty$
f''		−	0	+	0	−	0	+	
f		⌒	P.I	⌣	P.I	⌒	P.I	⌣	

P.I $\left(-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \approx (-2,4;-1,2)$; P.I $(0,0)$; P.I $\left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \approx (2,4;1,2)$

Representação gráfica de $x \mapsto f(x) = \frac{4x}{x^2+2}$ e contradomínio:



O gráfico indica que o contradomínio é $[-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$.

2.º EXEMPLO — **Gasómetros de volume constante** — preço mínimo.

Função racional fraccionária

O custo de fabrico dum gasómetro cilíndrico com volume de 2 m^3 será mínimo quando a área total for mínima, porque se usa assim menos material, e essa área depende do raio das bases.
Qual é então o raio óptimo para que o custo seja mínimo?

Resolução:

Como $V = \pi r^2 h$ vem $2 = \pi r^2 h$ donde $h = \frac{2}{\pi r^2}$ (em m)

Então a área total é dada, em m^2, por: $A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{2}{\pi r^2}$, ou seja, a função a estudar é $F: r \mapsto A = 2\pi r^2 + \frac{4}{r}$

Domínio, continuidade, zeros:

No contexto do problema, a variável r pode tomar qualquer valor positivo; quanto maior for r, menor será a altura, para o volume se conservar constante. O domínio da função é, portanto, $\mathbb{R}^+$.
F é contínua, soma de duas funções contínuas, e não tem zeros em $\mathbb{R}^+$ (logo, a área nunca se pode anular).

306. Estuda zeros, assimptotas, monotonia, extremos, concavidades, pontos de inflexão, contradomínio e esboça o gráfico de:

a) $f: t \mapsto \frac{t}{t-1}$

b) $g: v \mapsto \frac{v^2-1}{v-2}$

307. Esboça o gráfico de uma função f tal que:

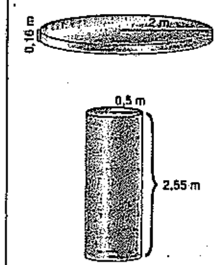
a) $(2, f(2))$ é ponto de inflexão e $f'(2) = 0$;

b) $f(-1)$ é máximo mas f não tem limite em $x = -1$;

c) $f(\pi)$ é máximo, f é contínua em π mas tem derivadas laterais diferentes nesse ponto.

308. Determina os valores de m e n de forma que $x \mapsto f(x) = x^3 + mx + n$ tenha um extremo relativo no ponto (2,4).

A forma dum gasómetro cilíndrico com 2 m^3 de volume (ou capacidade) varia com o raio:

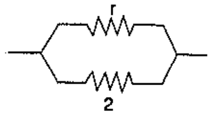


309. Determina os extremos relativos de f e g:

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 \Leftarrow x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x^2} \Leftarrow x > 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} (x+1)^2+1 \text{ se } x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right] \\ (x-1)^2 \text{ se } x \in]0,2] \end{cases}$

310.



A resistência R equivalente às duas representadas, ligadas em paralelo, é dada, em função de r, por

$R = \dfrac{2r}{2+r}, \quad r > 0$

a) Estuda: domínio, zeros, variação, concavidades, assimptotas.
b) Esboça o gráfico.

Assimptotas do gráfico:

$\lim\limits_{r \to 0^+} F(r) = \lim\limits_{r \to 0^+} \left(2\pi r^2 + \dfrac{4}{r}\right) = 0 + \infty = +\infty$

O gráfico tem uma assimptota vertical de equação $r = 0$.

$\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{F(r)}{r} = \lim\limits_{r \to +\infty} \left(2\pi r + \dfrac{4}{r^2}\right) = +\infty + 0 = +\infty$

Logo não há assimptotas oblíquas nem horizontais.

1.ª derivada, monotonia, extremos:

$F'(r) = \left(2\pi r^2 + \dfrac{4}{r}\right)' = 4\pi r - \dfrac{4}{r^2} = \dfrac{4\pi r^3 - 4}{r^2}$

Zeros da primeira derivada: $4\pi r^3 = 4 \Leftrightarrow r^3 = \dfrac{1}{\pi} \Leftrightarrow$

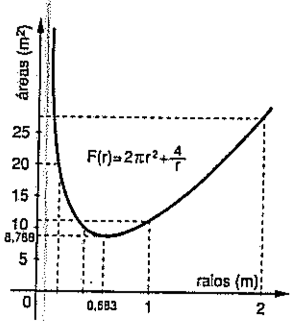
$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{\pi}} \qquad r \approx 0{,}683$ (em m)

QUADRO DE SINAIS DA 1.ª DERIVADA:

r	0		$\sqrt[3]{1/\pi}$		$+\infty$
F'		−	0	+	
F		↘		↗	

min.
$F(\sqrt[3]{1/\pi})$
$= 6\sqrt[3]{\pi} \approx 8{,}788$ (em m^2)

A área será mínima quando o raio for 0,683 m (ou 68,3 cm). O custo de fabrico do gasómetro será mínimo, por conseguinte, para este valor do raio, visto ser o que exige menor quantidade de material. Nota que é o cilindro com diâmetro igual à altura.



O gráfico mostra a variação da área total de um cilindro de volume constante, em função do raio (referencial dimétrico).

2.ª derivada, concavidades:

$F''(r) = \left(4\pi r - \dfrac{4}{r^2}\right)' = 4\pi + \dfrac{8}{r^3}$ logo

F'' é sempre positiva para $r \in \mathbb{R}^+$. A concavidade do gráfico está sempre voltada para cima em $\mathbb{R}^+$.

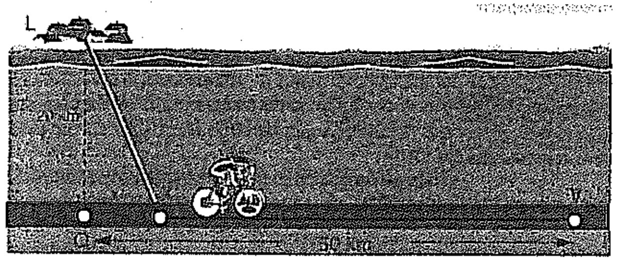
Gráfico e contradomínio:

A representação gráfica da «função área» traduz, pela imagem, as conclusões obtidas analiticamente.

A leitura do gráfico mostra que o contradomínio é $[6\sqrt[3]{\pi}, +\infty[$.

3.º EXEMPLO O trajecto mais rápido pode não ser o mais curto[1].

Função com radicais



Um ciclista mora na localidade L que dista 20 km da estrada alcatroada; O é o ponto da estrada mais próximo de L.

*Diariamente tem de se deslocar à vila V, a 50 km de O. Na estrada desloca-se a 25 km/h, mas ao atravessar o campo só consegue andar a 15 km/h. Determina o ponto X onde deve entrar na estrada de modo a fazer o percurso no **menor tempo possível**. Supõe-se que os dois trajectos a cor são rectilíneos.*

Resolução:

A. Função a minimizar: tempo total gasto de L a V.

B. O tempo obtém-se dividindo o espaço pela velocidade:

$T = \dfrac{\overline{LX}}{15} + \dfrac{\overline{XV}}{25}$ com $\overline{LX} = \sqrt{400 + x^2}$ e $\overline{XV} = 50 - x$

Portanto $T = \dfrac{\sqrt{400 + x^2}}{15} + \dfrac{50 - x}{25}$ (em horas) em função de $x = \overline{OX}$.

C. $T' = \dfrac{1}{15} \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{400 + x^2}} - \dfrac{1}{25} = \dfrac{5x - 3\sqrt{400 + x^2}}{75\sqrt{400 + x^2}}$

Zeros de T': $5x = 3\sqrt{400 + x^2}$; como $x > 0$, vem
$25x^2 = 9(400 + x^2) \Leftrightarrow x = 15$ (em km).

Sinais de T':

x	0		15		$+\infty$
T'		−	0	+	
T		↘		↗	

min.
$= T(15)$

D. O trajecto em tempo mínimo é conseguido se o ciclista seguir (em linha recta) da sua aldeia L até ao ponto X situado na estrada a 15 km de O para o lado da vila V.

RECORDA:

A resolução dum «problema de máximos e mínimos» passa pelas seguintes fases:
A. Definir a função a optimizar.

B. Exprimir essa função numa só variável recorrendo aos dados do problema.

C. Derivar e calcular os extremos relativos da função encontrada.

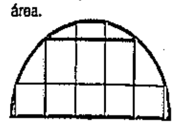
D. Interpretar os resultados face à natureza do problema.

311. De entre os rectângulos com 1 m² de área, qual é o que tem perímetro mínimo?

312.

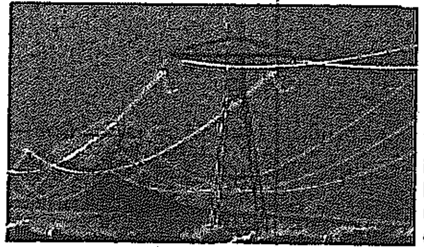
Um trapézio tem 3 lados com 10 m cada um. Qual deve ser o comprimento do 4º lado para que a área seja o maior possível?
(Fazer base maior = 10 + 2 x.)

313. Dos rectângulos inscritos num semicírculo de raio 10 cm, determina a base do que tem maior área.



raio = 10 cm

[1] Este problema deve ser retomado após o estudo das derivadas das funções trigonométricas.



4º EXEMPLO A «catenária»[1]

Função com exponenciais.

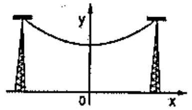
Observa os cabos eléctricos suspensos dos postes. Desenham uma curva que parece um arco de parábola, porém não é gráfico de qualquer função polinomial. O seu nome é catenária, do latim *cadena*, cadeia (uma cadeia de argolas suspensa dá este efeito).

Trata-se do gráfico duma função com exponenciais, transcendente (não-algébrica), de equação

$$y = \frac{1}{2a}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right) \quad \text{em que } a \text{ é constante positiva.}$$

1. *Estuda as principais características da função.*

2. *Dois postes de altura igual e afastados de 50 m suportam um cabo o qual desenha uma catenária em que a = 0,08.*
*Qual é a **distância mínima** do cabo ao solo?*
Qual é a altura dos postes?



Resolução:

1. Função par, pois $f(-x) = f(x)$; contínua; domínio IR.

Sendo simétrica em relação a 0y, deve ter um extremo para $x = 0$; a derivada $y' = \frac{1}{2}\left(e^{ax} - e^{-ax}\right)$ mostra que é um mínimo igual a 1/a e que não há mais extremos (confirma).

Como a 2ª derivada é $y'' = \frac{a}{2}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right) > 0$, a concavidade está sempre voltada para cima.

O gráfico não tem assimptotas.

2. Sendo $a = 0,08$, a distância mínima ao solo é

$$f(0) = \frac{1}{2 \times 0,08}\left(e^0 + e^0\right) = \frac{1}{0,08} = 12,5$$

logo a distância mínima é 12,5 m.

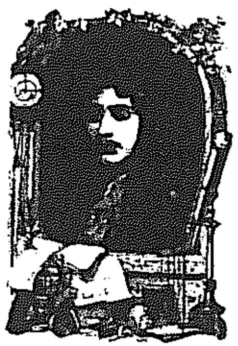
A altura dos postes é $f(25) = f(-25) = \frac{1}{0,16}\left(e^2 + e^{-2}\right) = 47,02\ldots$

Logo a altura dos postes é 47 m, aproximadamente.

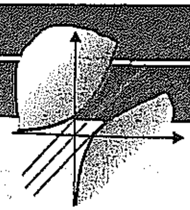
[1] Curiosidades históricas sobre a catenária:

Até ao séc. XVII supunha-se que era um arco de parábola; até mesmo Galileu assim pensava.
Mas em 1647 um jovem com 17 anos, Christiaan Huygens, provou com argumentos físicos que essa hipótese era falsa sem, contudo, descobrir a expressão analítica da curva.
Huygens retomou mais tarde o estudo da catenária e publicou, já com mais de 60 anos, a solução do problema.

Simultaneamente surgiram trabalhos independentes, sobre a catenária, dos Irmãos Bernoulli (Basileia) e de Leibniz (Hanover).



Huygens, matemático e físico holandês (1629-1695) construtor do primeiro relógio de pêndulo.

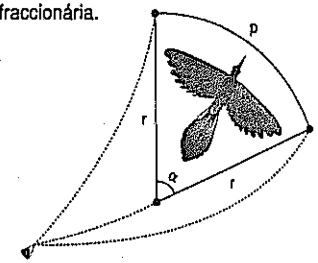


5º EXEMPLO «Papagaio» com área máxima.

Função racional fraccionária.

Uma fábrica de artigos de desporto produz «papagaios» de tecido muito fino esticado numa armação de alumínio com a forma de sector circular e tendo 2 m de perímetro total.

*Determina, em radianos, a amplitude do sector para que a resistência ao vento seja máxima **(área máxima)**.*



Resolução:

A. Função a maximizar: Área do sector circular

Se $2\pi \text{ rad} — \pi r^2$

$\alpha \text{ rad} — A$ logo $A = \frac{\alpha r^2}{2}$

B. Exprimir A numa só variável (α, indicada no enunciado):

Se $2\pi \text{ rad} — 2\pi r$ (perímetro)

$\alpha \text{ rad} — p$ donde $p = \alpha r$.

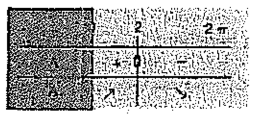
Então o perímetro total do papagaio é $r + r + \alpha r = 2$ donde se tira que $r = \frac{2}{2+\alpha}$.

Substituindo na expressão da área obtemos A em função de α:

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{4}{(2+\alpha)^2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{2\alpha}{(\alpha+2)^2}$$

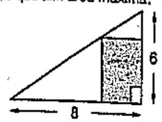
C. $A' = \frac{2(\alpha+2)^2 - 4\alpha(\alpha+2)}{(\alpha+2)^4} = \frac{-2\alpha+4}{(\alpha+2)^3}$ Zero de A': $\alpha = 2$

Sinais de A':



D. A resistência ao vento será máxima quando o ângulo do sector for de 2 rad e a área do «papagaio» for $0,25 \text{ m}^2$.

314. De entre os rectângulos que se podem inscrever neste triângulo rectângulo, determina as dimensões do que tem área máxima:

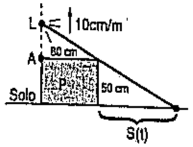


(Um dos ângulos do rectângulo coincide com o ângulo recto do triângulo.)

315. A lâmpada L sobe verticalmente 10 cm por minuto, a partir de A. Ao fim de t minutos, a parede P projecta a sombra S (t) no solo.

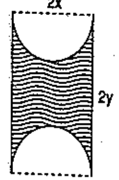
a) Indica a expressão de S (t) e o valor mínimo que pode tomar sabendo que L pára a 2 m do solo.

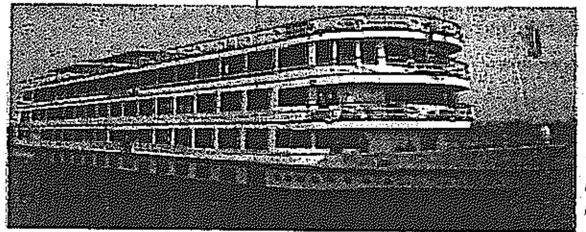
b) Calcula a velocidade com que a sombra diminuiu no instante em que a lâmpada parou.



316. Vai construir-se um lago com a forma indicada na figura — um rectângulo ao qual se suprimem dois semicírculos. Para contornar o lago (a zona com água) dispõe-se de 100 m de gradeamento.

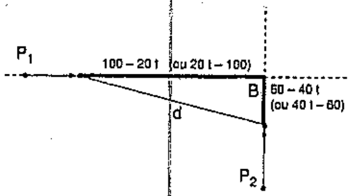
Quais as dimensões do rectângulo inicial para que a área com água seja máxima?

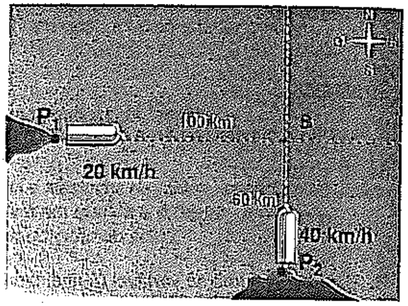




6º EXEMPLO «Ferry-boats» com rotas cruzadas. Função com radicais.

Todas as manhãs, à mesma hora, sai um barco do porto P_1 para leste, a 20 km/h e outro do porto P_2 para norte, a 40 km/h. A bóia B, no cruzamento das rotas, dista 100 km de P_1 e 60 km de P_2. Determina ao fim de quanto tempo a ***distância entre os barcos é mínima.***





A. Função a minimizar: d, distância entre os barcos, em km.

B. Expressão de d em função de t, tempo decorrido desde a partida, em horas

$$d = \sqrt{(100 - 20\,t)^2 + (60 - 40\,t)^2}$$

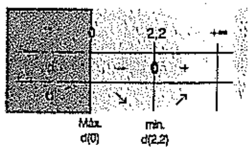
C. Derivada e extremos:

$$d' = \frac{-40\,(100 - 20\,t) - 80\,(60 - 40\,t)}{2\sqrt{(100 - 20\,t)^2 + (60 - 40\,t)^2}}$$

Zeros da derivada: $800\,t + 3200\,t - 4000 - 4800 = 0 \Leftrightarrow$

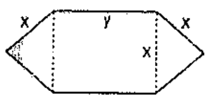
$$\Leftrightarrow t = \frac{8800}{4000} \Leftrightarrow t = 2{,}2$$

Quadro de sinais da derivada:



D. A distância mínima é atingida ao fim de 2,2 h, ou seja, de 2 h 12 m. Nesse momento o barco de P_1 ainda está longe da bóia B, ao passo que o barco de P_2 já ultrapassou a bóia em 28 km.

317. A Direcção dum banco encomendou uma mesa com a forma desta figura.



(Um rectângulo e dois triângulos equiláteros.)

O perímetro da mesa tem de ter 10 m para dar lugar aos 10 membros da Direcção, mas a área tem de ser o maior possível.

Tendo em conta o perímetro, o fabricante resolveu tomar y = 3 m e x = 1 m, mas foi uma opção errada e teve de fazer outra mesa. Porquê?

Quais são os valores correctos com aproximação ao cm?

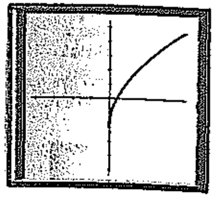
Se x e y (metros) tivessem de ser números inteiros, a solução do fabricante teria sido aceite?

7º EXEMPLO Estudo analítico e gráfico: função logarítmica.

Seja a função $x \mapsto f(x) = \ln(e^x - 1)$

Resolução:

Tal como a calculadora mostra, não há imagens para $x < 0$:



Com uma «janela» *standard* $[-5,5]$ nos dois eixos, o gráfico surge assim na calculadora. Mas ficam muitas dúvidas: Qual o $\lim_{x \to 0} f$? Haverá ponto de inflexão? Haverá assimptotas? O gráfico voltará a descer para valores ele-

DOMÍNIO: $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$. $D = \mathbb{R}^+$.

CONTINUIDADE: $e^x - 1$ define uma função contínua e a função logarítmica é também contínua; **a função composta de duas funções contínuas é ainda contínua** em todo o seu domínio.

ASSIMPTOTAS: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln 0^+ = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Há uma assimptota vertical de equação $x = 0$ e não há assimptota horizontal.

Oblíquas: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left[e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right]}{x} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x}\right) = 1 + \frac{0}{+\infty} = 1. \qquad \text{Logo } m = 1.$$

Cálculo de b: $\lim_{x \to +\infty} (\ln(e^x - 1) - x) \quad (\infty - \infty)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{e^x - 1}{e^x} = \ln 1 = 0. \qquad \text{Portanto } b = 0$$

Há uma assimptota oblíqua: $y = x$.

ZEROS / SINAL: $\ln(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

A função tem só um zero e é positiva para $x > \ln 2$ e negativa para $0 < x < \ln 2$.

1ª DERIVADA: $f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ sem zeros. Como $e^x - 1 > 0$, (ver domínio), os dois termos da fracção são positivos, logo $f'(x) > 0$ $\forall_{x \in \mathbb{R}^+}$.

A função f é estritamente crescente e não tem máximos, nem mínimos. (continua)

318. Um líquido arrefece segundo uma lei do tipo $T(t) = a + c\,e^{-bt}$ em que T é a temperatura ao fim de t minutos após o início do arrefecimento.

a) Explica o significado das constantes a e c.

b) Se um líquido estava a 80º e se a temperatura ambiente é de 18º, escreve a lei de arrefecimento sabendo que $b = 0{,}1$.

c) Calcula o valor de t para o qual o líquido está a baixar a temperatura à taxa de 0,5º por minuto.

319. Um capital de 5000 contos à ordem, à taxa anual 12% (juro composto):

a) ao fim de quanto tempo duplica?

b) Qual a taxa de variação do capital no instante t_0, sendo t_0 a resposta à alínea anterior?

364. Um tecido atacado com vírus é exposto aos raios x. O número de células virais sobreviventes depende da quantidade de radiação x pela fórmula $N(x) = N_0\, e^{-0,2x}$

a) Qual o valor de x que corresponde a 95% de células virais destruídas?

b) Parece não ser possível exterminar todos os vírus por este processo. Porquê?

c) Qual a taxa de variação de N para x = 10 unidades de radiação?

365. A **população duma cidade** nova cresce 3% ao ano. Tendo 1 milhão de habitantes no ano 2000, calcula quantos terá em 2005 e qual a taxa de crescimento nesse ano.

366. A função definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$

(densidade de probabilidade numa distribuição normal) é muito importante em Estatística. Faz o estudo analítico da função tomando $1/\sqrt{2\pi} \approx 0,4$.

367. Calcula o **capital acumulado** em 3 anos (juros compostos) e a rapidez com que aumenta o capital ao fim desses 3 anos, nos seguintes investimentos:

a) 500 contos a 6% ao ano, capitalização anual;

b) 4000 contos a 12% ao ano, capitalização semestral;

c) 800 contos à taxa anual de 7,5% capitalizado 3 vezes por ano (de 4 em 4 meses);

d) 800 contos à taxa anual de 7,5% capitalizado semanalmente (52 semanas).

368. A **biomassa** duma cultura bacteriana é dada por $C(t) = \dfrac{600}{1 + 52\, e^{-0,4t}}$ (mg; h)

a) De que massa se partiu? Qual o valor máximo de que a massa se pode aproximar?

b) Em que instante começa a travar o crescimento desta biomassa?

369. Calcula-se que a **massa vegetal** duma floresta cresce segundo a lei $M(t) = 50 \cdot 1,4^{t/2}$ a partir de certa data (t = 0). (M, toneladas; t, anos)

a) Quantas toneladas havia no início deste estudo? E ao fim de quantos anos duplicará?

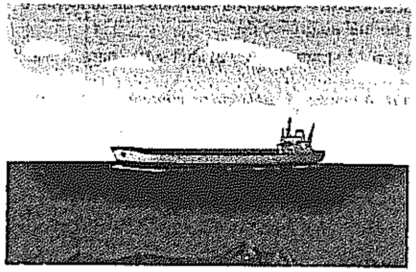
b) Calcula a rapidez com que a floresta está a crescer no instante t que é a resposta à alínea a).

370. Calcula a derivada e o domínio da derivada das funções reais de variável real:

a) $\ln\sqrt{1-x^2}$ b) $\log_{10}\left(\dfrac{1}{t+1}\right)$ c) $\dfrac{t^2}{\log t}$

d) $\pi^{\log t}$ e) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ f) $\dfrac{10^x}{x^2}$

371. A mancha de crude



Um petroleiro encalhou num recife e começou a perder 200 dm³ de crude por segundo, o que forma sobre a água uma mancha circular com 5 mm de espessura.

a) Qual a área da mancha ao fim de t segundos?

b) Com que velocidade aumenta o raio r da mancha ao fim de 25 s?

c) Estuda a função derivada r' (t) e explica, face à situação concreta, que tem de ser decrescente.

372. A **inflacção** é a perda de poder de compra do dinheiro. Por exemplo, se há uma inflacção de 4% ao ano, um artigo que hoje custa 3 contos, custará daqui a um ano, 3 (1 + 0,04) = 3,12 contos; portanto, se tivermos o mesmo dinheiro poderemos comprar menos coisas (perdemos «poder de compra»).

Sendo assim, calcula a quanto equivalerá, daqui a t anos, um ordenado de 200 contos (que não sobe) supondo que a inflacção se mantém em 5% ao ano. Concretiza para t = 5 anos.

Estuda domínio e monotonia da função de t obtida. (Como ajuda: Repara que, se vais ter daqui a t anos 200 contos, eles valerão o que vale hoje a quantia Q tal que $Q(1 + 0,05)^t = 200$).

373. Considera a função real de variável real

$f: x \mapsto f(x) = 4 + \log_3(9 - x^2)$

a) Estuda domínio, assimptotas e monotonia de f.

b) Escreve equações cartesianas das tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissas x = 0 e x = 2.

c) Sendo F a restrição injectiva de f a [0,3[, caracteriza a função inversa de F.

374. Faz o estudo analítico da função dada por $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln\dfrac{x+1}{x}$. Esboça o gráfico. (Sugestão: para estudar f à direita de 0 substitui $\dfrac{1}{x}$ por $\ln e^{1/x}$).

375. A **densidade de presas**, em certa região, pode ser calculada em função do número x de presas atacadas pelos respectivos predadores (por exemplo, lebres/raposas) por uma equação da forma

$$d = \frac{1}{a}\ln\frac{k}{k-x} \quad a,\ k,\ \text{constantes.}$$

Interpreta d (0) e $\lim d$ quando $x \to k^-$.

Estuda a função para a = 0,2 e k = 100

376. O efeito duma **anestesia** depende da quantidade de anestésico activo no organismo. Se for $Q = 200 \cdot 1,08^{-t}$ essa quantidade, em mg, ao fim de t minutos:

a) Calcula qual foi a dose ministrada e a quantidade activa ao fim de 10 minutos.

b) Calcula a rapidez com que diminui o produto activo no sangue em função de t.

c) No decorrer de certa operação a quantidade de anestésico activo não pode ser inferior a 40 mg. Ao fim de quanto tempo é preciso aplicar nova dose de anestésico? (Nº inteiro de minutos.)

377. A **massa de levedura**, numa cultura laboratorial, é dada por $M(t) = \dfrac{600}{1 + 59\, e^{-0,5t}}$ (mg; horas).

a) Esta expressão é do tipo $y = \dfrac{k}{1 + e^{a-bt}}$; quais são os valores de k, a, b?

b) Em que instante começa a travar o crescimento da biomassa? (Zero da 2ª derivada).

c) Exprime t em função de M.

MÁXIMOS E MÍNIMOS

378. Dada a função $g: g(x) = x^2 \ln x$

a) Indica domínio e zeros de g e de g'.

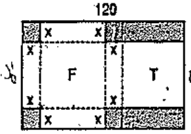
b) Calcula o mínimo absoluto e o declive do gráfico para $x = e^2$.

379. Determina extremos relativos de:

a) $f(t) = \begin{cases} e^{t-1} & \text{se } t > 0 \\ -t & \text{se } t < 0 \end{cases}$ b) $f(t) = \dfrac{2^t}{t}$

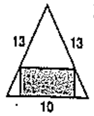
380.

80 x 120:

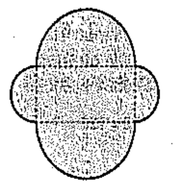


Num rectângulo de cartão fazem-se os cortes indicados a vermelho e dobra-se pelo ponteado de modo a obter uma caixa com tampa. Os rectângulos F (fundo) e T (tampa) são iguais. Calcula x de modo que o volume da caixa seja máximo.

381. Num triângulo isósceles de lados 10, 13, 13, inscreve-se um rectângulo como a figura indica (base contida na base do triângulo). Determina as dimensões do rectângulo de modo que a sua área seja máxima.

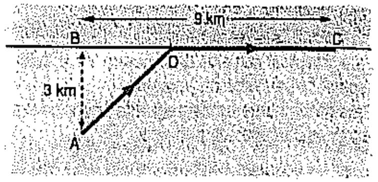


382. Com um gradeamento de 100 m de comprimento contorna-se um jardim com a forma indicada (um rectângulo e 4 semicírculos):



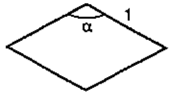
Determina as dimensões do rectângulo de modo que a área do jardim seja o maior possível (Designa por 2 x e 2 y as dimensões do rectângulo.)

383. Uma pessoa está num barco A a 3 km do ponto B da praia, mais próximo de A, e tem de ir a outro ponto C da praia a 9 km de B.



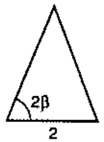
Se o barco se desloca à velocidade de 6 km/h e o tripulante pode correr à velocidade de 10 km/h, como deve este proceder para chegar a C no mais curto tempo possível?

55. Observa um losango de lado 1 em que α é um dos ângulos internos.



Mostra que a medida da área do losango é $\operatorname{sen} \alpha$.

56. Dado um triângulo isósceles de base 2 e ângulo da base 2β



a) mostra que a medida da área é $\operatorname{tg} 2\beta$

b) mostra que o perímetro é $\dfrac{4\cos^2 \beta}{\cos 2\beta}$

57. Simplifica nos seus domínios:

a) $1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$

(Nota que $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$)

b) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

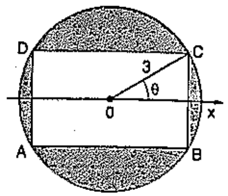
c) $\operatorname{tg} 2x\,(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$

d) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{tg} x\,(1 + \cos 2x)$

e) $\dfrac{1 - \cos a}{1 + \cos a}$

3. [ABCD] é um rectângulo inscrito na circunferência de centro O e raio 3 cm; Ox ⊥ BC. Mostrar que a área colorida é dada em função de θ, por

$$A(\theta) = 9(\pi - 2\operatorname{sen} 2\theta)$$



Resolução:

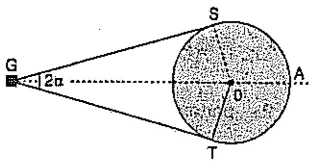
$A_\bullet = 9\pi\ cm^2$

Base do rectângulo $= 2(3\cos\theta)$; Altura $= 2(3\operatorname{sen}\theta)$

Área do rectângulo $= 6\cos\theta \cdot 6\operatorname{sen}\theta = 36\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta = 18\operatorname{sen} 2\theta$

Área pedida $= 9\pi - 18\operatorname{sen} 2\theta = 9(\pi - 2\operatorname{sen} 2\theta)$ em cm^2.

4.



O ginásio G fica situado num parque onde há um lago circular com 1 hm de raio. Todas as manhãs os atletas saem de G e fazem o percurso GTASG contornando parte do lago. (GT e GS são tangentes ao círculo.)

a) Exprime o comprimento p do percurso em função de α.

b) Supondo que tg 2α = 4, calcula p aproximado ao metro.

c) Calcula α (calculadora gráfica) para que p seja 800 m.

Resolução:

a) O $\triangle$ [GTO] é rectângulo logo $\dfrac{1}{\overline{GT}} = \operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow \overline{GT} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Como $T\hat{O}G = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, o arco $\widehat{TAS}$ tem $\pi + 2\alpha$ radianos.

Ora 2π rad $\longrightarrow 2\pi$ hm

$\pi + 2\alpha$ rad $\longrightarrow \pi + 2\alpha$ hm, logo $p = 2 \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \pi + 2\alpha$

b) No Mode Radian obtemos $2\alpha = 1{,}32\ldots$; $\alpha = 0{,}6629\ldots$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}78\ldots$; donde $p \approx 2{,}56 + 3{,}14 + 1{,}33 = 7{,}03$ em hm ou seja $p \approx 703$ m

c) Representa na calculadora $y_1 = \dfrac{2}{\operatorname{tg} x} + \pi + 2x$ e $y_2 = 8$ e procura a intersecção dos gráficos (Intersect)

Obtém-se 0,47 rad ou 27° aproximadamente.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5. Prova que $\operatorname{sen} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ e indica em que domínio é válida esta igualdade.

NOTA:

A demonstração de igualdades (ou identidades) trigonométricas pode fazer-se por dois métodos.

1º: Método sintético — Parte-se dum dos membros e transforma-se até obter o outro.

Por exemplo:

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = 2\cos^2 x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} 2x$$

c.q.d.

2º: Método analítico — Transforma-se toda a igualdade dada noutras equivalentes até obter uma obviamente verdadeira.

Por exemplo:

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 2\operatorname{tg} x \Leftrightarrow \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos x} = 2\operatorname{tg} x$$

$\Leftrightarrow 2\operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg} x$, que é uma proposição verdadeira.

Como é equivalente à inicial, também esta é verdadeira.

$D = \{x \in \mathbb{R}: x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

6. Prova a igualdade: $\dfrac{\operatorname{sen} 3A}{\operatorname{sen} A} - \dfrac{\cos 3A}{\cos A} = 2$

Resolução:

Transformando o primeiro membro vem:

$$\frac{\operatorname{sen} 3A \cos A - \cos 3A \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A \cos A} = \frac{\operatorname{sen}(3A - A)}{\operatorname{sen} A \cos A} = \frac{2\operatorname{sen} A \cos A}{\operatorname{sen} A \cos A} = 2$$

$(\operatorname{sen} A \cos A \neq 0 \Leftrightarrow A \neq k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z})$

7. Sabendo que $\operatorname{sen} a = \dfrac{1}{3}$, calcular $\operatorname{sen} 2a$, com a do 1º Q.

Resolução:

$\operatorname{sen} 2a = 2\operatorname{sen} a \cos a$ e $\cos a = \sqrt{1 - \dfrac{1}{9}} = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$

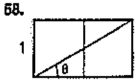
logo $\operatorname{sen} 2a = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{8}}{3} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9} = 0{,}6285\ldots$

O resultado aproximado podia obter-se, usando apenas a calculadora:

Sin^{-1} (1 : 3) x 2 ENTER Sin Ans ENTER

Mas se pretendermos o valor exacto $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$, há que recorrer à fórmula do seno da soma.

58.



A figura representa dois quadrados de lado 1, com um lado comum.

Sendo θ o ângulo indicado, mostra que

$\operatorname{sen} 2\theta = \cos^2\theta$

59. Prova as seguintes igualdades:

a) $\operatorname{sen}(x + y) \cdot \operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

b) $\cos(a + b) \cdot \cos(a - b) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b$

60. Mostra que:

a) $\cos 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

b) $\dfrac{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x}{\operatorname{sen} 2x} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x}$

61. Mostra que:

a) $\operatorname{sen}(3a) = \operatorname{sen} a\,(3\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a)$

b) $2\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

143. Sendo

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{1 - 2\,\text{sen } x}$$

a) estuda domínio e extremos de f;
b) mostra que a segunda derivada não tem zeros, mas muda infinitas vezes de sinal.

144. Seja

$$F(t) = t\left(1 + \frac{2}{\text{tg } t}\right)$$

a) Determina as assimptotas do gráfico e o domínio.
b) Mostra que

$$F'(t) = 1 + \frac{\text{sen } 2t - 2t}{\text{sen}^2 t}.$$

145. Sendo

$$g(x) = 1 - \frac{2\,\text{sen } x}{x}$$

estuda o domínio, a monotonia, e esboça o gráfico da função em $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. (Usa a calculadora.)

146. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} \pi + \text{sen } x, & \text{se } x \geq \pi \\ 2x - \pi & \text{se } x < \pi \end{cases}$$

estudar domínio, continuidade e concavidades de f, recorrendo às derivadas.

3. *Relativamente à função h definida por $h(t) = 2 + \frac{\text{sen } t}{t}$*

a) estudar domínio, continuidade e assimptotas.
b) mostrar que h é função par, mas que h' é ímpar.
c) definir uma extensão de h a $\mathbb{R}$ que seja contínua.
d) determinar analiticamente a recta tangente e a normal ao gráfico no ponto da abcissa $\frac{\pi}{2}$.

<u>Resolução</u>:

$$h(t) = 2 + \frac{\text{sen } t}{t}$$

a) **Domínio:** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dentro do domínio, h **é contínua.**

Assimptotas: $\lim\limits_{t \to 0} h(t) = 2 + 1 = 3$. Não há assimptotas verticais.

$\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = 2$ porque $-1 \leq \text{sen } t \leq 1$ (limitada), logo $\frac{\text{sen } t}{t}$ tende para zero. O mesmo quando $t \to -\infty$.
Logo, há **assimptota horizontal** de equação[1] $y = 2$.

b) h **é função par:** $h(-t) = 2 + \frac{\text{sen}(-t)}{-t} = 2 + \frac{\text{sen } t}{t} = h(t)$

h' **é função ímpar:** $h'(t) = \frac{t\cos t - \text{sen } t}{t^2}$

$$h'(-t) = \frac{-t\cos t + \text{sen } t}{t^2} = -h'(t)$$

c) **Extensão a $\mathbb{R}$, contínua:** Como $\lim\limits_{t \to 0} h(t) = 3$ definiremos a extensão h^* assim:

$$h^*(t) = \begin{cases} h(t) & \text{se } t \neq 0 \\ 3 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

Deste modo, $\lim\limits_{t \to 0} h^*(t) = h^*(0)$. A função h^* fica assim contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$.

d) Uma equação **da tangente:** $y - h\left(\frac{\pi}{2}\right) = h'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

Uma equação da tangente: $y - \left(2 + \frac{2}{\pi}\right) = -\frac{4}{\pi^2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

Uma equação da normal: $y - \left(2 + \frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi^2}{4}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

(1) NOTA: Como $\text{sen } t$ é periódica, ora positiva, ora negativa, $h(t) - 2 = \frac{\text{sen } t}{t}$ toma valores ora positivos, ora negativos em todo o domínio, o que significa que o gráfico ora está acima, ora está abaixo da assimptota horizontal $y = 2$.

4. *Num movimento vibratório simples, a elongação é dada, em função do tempo t, por $E = 2\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ (E em cm; t em segundos.)*
A constante T é a duração duma vibração completa (período).

Sendo $T = 0{,}1$:
a) Determina o maior valor que a elongação pode ter (amplitude).

b) Calcula $E\left(\frac{1}{15}\right)$ e $E\left(\frac{1}{60}\right)$.

c) Mostra que $E(t + 0{,}1\,k) = E(t)$ e calcula

$$\lim_{t \to 0} \frac{E(t)}{t} \quad e \quad \lim_{t \to -0{,}1} \frac{E(t + 0{,}1)}{t + 0{,}1}$$

d) Calcula a velocidade com que varia E no instante $t = \frac{1}{20}$ e qual a velocidade máxima.

<u>Resolução</u>:

$$E(t) = 2\,\text{sen}(20\pi t)$$

a) O máximo valor do seno é 1.
Logo o maior valor de E é 2 cm.

b) $E\left(\frac{1}{15}\right) = 2\,\text{sen}\left(20\pi \cdot \frac{1}{15}\right) = 2\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$E\left(\frac{1}{60}\right) = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

c) $E(t + 0{,}1\,k) = 2\,\text{sen}\,[20\pi(t + 0{,}1\,k)] = 2\,\text{sen}\,(20\pi t + 2k\pi) =$
$= 2\,\text{sen}\,(20\pi t) = E(t)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{E(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2\,\text{sen}\,(20\pi \cdot t)}{20\pi \cdot t} \cdot 20\pi = 40\pi$$

Analogamente $\lim\limits_{\substack{t \to -0{,}1 \\ t + 0{,}1 \to 0}} \frac{E(t + 0{,}1)}{t + 0{,}1} = 40\pi$

d) $E'(t) = 2\cos(20\pi \cdot t) \cdot 20\pi$; $E'\left(\frac{1}{20}\right) = -40\pi$ (cm/s);
A velocidade é máxima quando $\cos(20\pi t) = 1$, o que acontece para $20\pi \cdot t = 2k\pi$, ou seja, $t = \frac{k}{10}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Velocidade máxima $= E'\left(\frac{k}{10}\right) = 40\pi$ cm/s.

147. Sendo

$$g(x) = \text{sen}^2 x + \cos x$$

a) prova que g tem pelo menos um zero em $\left]\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right[$;
b) estuda a monotonia de g em $[0, 2\pi]$;
c) calcula, no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a abcissa do ponto onde o gráfico de g tem tangente horizontal e escreve uma equação dessa tangente.

(Aferição, 94)

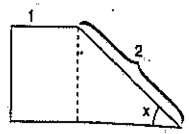
148. Seja

$$h(x) = 1 - x + \text{sen } 2x$$

a) Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \frac{h(x) - 1}{x}$.
b) Estuda a monotonia de h no intervalo $[0, \pi]$.
c) Mostra que $h(x) = 0$ tem uma só solução em $[0{,}6 ; 2]$ e determina-a (por defeito a menos de 0,01).

(Aferição, 94, 1ª ch.)

149.



a) Exprime a área deste trapézio em função de x.
b) Determina a área máxima.
c) Qual a taxa de variação instantânea da área quando $x = 1$ radiano?

[1] A generalização completa deste problema está proposta, como trabalho de grupo, no exercício 150:

150. Trabalho de grupo:

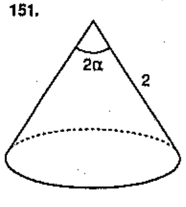
Resolve o problema número 5 (ao lado) supondo que se trata dum «jeep» que dá 40 km/h no campo e 80 km/h na estrada.

Mostra que a solução α destes problemas verifica a condição

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{velocidade no campo}}{\text{velocidade na estrada}}$$

Sugestão: Usa só letras: k, d, w (velocidade no campo) e v (velocidade na estrada).

151.



Considera os cones de revolução com geratrizes de 2 metros e maior ângulo entre geratrizes igual a 2α.

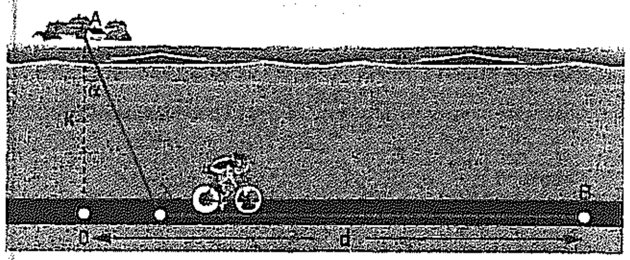
a) Mostra que o volume de cada cone é dado, em função de α, por

$$V = \frac{8\pi}{3}\operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha$$

b) Determina o valor de α para o qual o volume é máximo e calcula esse máximo.

5. O caminho mais rápido

(Generalização do problema estudado na página 233)



Um ciclista tem de se deslocar diariamente da vila A, que dista k quilómetros da estrada alcatroada OB, à vila B que dista d quilómetros de O, ponto da estrada mais perto de A. Sobre a estrada desloca-se a 25 km/h, mas no campo só consegue andar a 15 km/h.

Determina em que direcção deve partir de A de modo a gastar o mínimo tempo possível. Define a direcção pedida $(\overrightarrow{AX})$ pelo ângulo α que faz com $(\overrightarrow{AO})$.

Resolução:

Tempo gasto no trajecto [AX]: $\frac{\overline{AX}}{15}$. E no [XB]: $\frac{\overline{XB}}{25}$

Tempo total: $T = \frac{\overline{AX}}{15} + \frac{\overline{XB}}{25} = \frac{\frac{k}{\cos \alpha}}{15} + \frac{d - k \operatorname{tg} \alpha}{25}$

visto que $\frac{k}{\overline{AX}} = \cos \alpha$ e $\frac{\overline{OX}}{k} = \operatorname{tg} \alpha$

Temos, portanto, $T = \frac{k}{15 \cos \alpha} + \frac{d}{25} - \frac{k \operatorname{tg} \alpha}{25}$, d, k, constantes, donde $T'_\alpha = \frac{k \operatorname{sen} \alpha}{15 \cos^2 \alpha} - \frac{k}{25 \cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow T' = \frac{5k \operatorname{sen} \alpha - 3k}{75 \cos^2 \alpha}$$

Os zeros de T' correspondem a $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$

Como no contexto do problema, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, o zero de T' será $\alpha \approx 0{,}64$ radianos, ou seja, $\alpha \approx 36^0 52'$

α	0		$\alpha \approx 0{,}64$		$\pi/2$
T'		−	0	+	
T		↘	min.	↗	

O ciclista deve partir de A numa direcção fazendo cerca de 37^0 com $\overrightarrow{AO}$, sejam quais forem as distâncias k e d.

É espantoso! O ângulo «mais económico» só depende das velocidades do meio de transporte e fica «indiferente» às variações das distâncias de A a O e de O a B![1]

PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

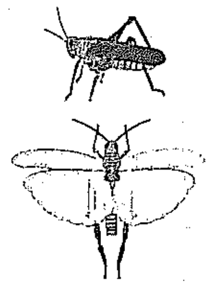
6. O voo do gafanhoto[1]

Experiências com gafanhotos conduziram à interpretação matemática do movimento periódico das asas destes insectos. O zoólogo que efectuou este estudo concluiu que os ângulos das asas com a horizontal são definidos por equações trigonométricas, a saber:

Para as asas dianteiras: $\theta_D = \operatorname{sen}(34\pi t)$

Para as asas traseiras: $\theta_T = 0{,}6 \operatorname{sen}[34\pi(t - 0{,}005)]$

t segundos após o instante inicial da experiência.



a) Interpreta a diferença entre as equações de θ_D e θ_T.

b) Esboça os dois gráficos no mesmo referencial.

c) Quantos segundos leva cada asa a completar um ciclo?

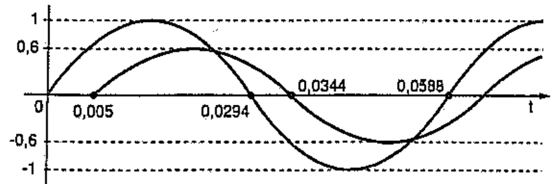
d) Qual o ângulo máximo que cada asa atinge?

[1] In «Aplicando a Matemática» de Luís Madureira. Exemplo expressamente recomendado no «Ajustamento do programa», página 67.

Resolução:

a) As asas traseiras iniciam o movimento 0,005 s depois das dianteiras e conservam esse desfasamento. E a variação do ângulo é menor para as asas traseiras.

b)



c) Qual é o período:

$f(t + P) = f(t) \Leftrightarrow \operatorname{sen}(34\pi t + 34\pi P) = \operatorname{sen}(34\pi t)$

Como o período mínimo do seno é 2π vem

$34\pi P = 2\pi \Leftrightarrow P = 1/17 \text{ s} \approx 0{,}0588 \text{ s}.$

Para as asas traseiras é o mesmo, visto que estão apenas desfasadas de 0,005 s.

d) Como o valor máximo do seno é 1, o valor máximo de θ_D é 1 rad $\approx 57^0{,}3$. E o valor máximo de θ_T é 0,6 rad.

152. Salto da rã.

(In «Aplicando a Matemática», ob. cit.)

O modelo matemático que descreve o salto dum animal é

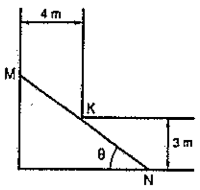
$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{4{,}9 x^2}{v^2 \cos^2 \theta}$$

y é a altura em função do avanço x na horizontal

θ — ângulo com a horizontal em graus.

v — velocidade inicial.

Determina a altura máxima atingida por uma rã que salta com a velocidade de 4,57 m/s fazendo 30^0 com a horizontal.



7. *Pretende-se passar uma viga de betão de um corredor de 3 m de largura para outro perpendicular a ele e com 4 m de largura, sem a levantar do chão. Para isso fez-se o estudo do comprimento C dos segmentos [MN] que passam no vértice K e se apoiam nas paredes em M e em N.*

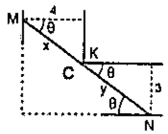
a) Exprime C em função do ângulo θ indicado na figura $\left]0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Qual é o comprimento mínimo que pode ter o segmento [MN]?

c) O estudo feito em b) mostra que nem todas as vigas podem passar horizontalmente neste canto. Quais podem passar?

d) Na calculadora obtém um gráfico de C (θ) e confirma o mínimo da função.

<u>Resolução</u>:



a) Temos $C = x + y$, com $x = \overline{MK}$ e $y = \overline{KN}$

Ora $\cos\theta = \frac{4}{x}$ e $\text{sen}\,\theta = \frac{3}{y}$ donde

$x = \frac{4}{\cos\theta}$ e $y = \frac{3}{\text{sen}\,\theta}$

Portanto $C(\theta) = \frac{4}{\cos\theta} + \frac{3}{\text{sen}\,\theta}$

b) $C'(\theta) = \frac{4\,\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta} - \frac{3\cos\theta}{\text{sen}^2\theta} = \frac{4\,\text{sen}^3\theta - 3\cos^3\theta}{\text{sen}^2\theta \cdot \cos^2\theta}$

$C'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 4\,\text{sen}^3\theta - 3\cos^3\theta = 0 \Leftrightarrow \text{tg}^3\,\theta = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{tg}\,\theta = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ donde $\theta \approx 0{,}7375$ rad $\approx 42{,}26°$

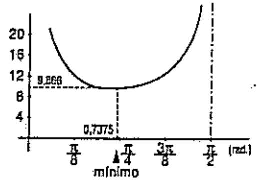
O quadro mostra o sinal da derivada em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e vê-se que $C(0{,}7375) \approx 9{,}866$ é mínimo da função.

θ	0		0,7375		$\pi/2$
$C'(\theta)$		−	0	+	
$C(\theta)$		↘		↗	

mín.
≈ 9,866

c) Este valor mínimo de C é o maior comprimento que pode ter a viga para dar a volta no canto dos corredores. Podem passar todas as de comprimento inferior ou igual a 9,8 m aproximadamente.

d) O gráfico, em $]0, \pi/2[$ confirma que $C(\theta)$ tem um mínimo em $\theta \approx 0{,}7375$ sendo 9,866 o valor do mínimo.



153. Seja

$H(x) = 1 - x\,\text{sen}\,\frac{1}{x}$

a) Define uma extensão de H a IR que seja contínua.

b) Escreve uma equação da tangente ao gráfico de H no ponto da abcissa $6/\pi$.

(Aferição, Profissionais)

154. Um ponto move-se sobre uma recta de modo que a sua velocidade v é dada, em função do tempo t, por $v = \frac{1}{3}\,\text{sen}\,(2t)$

a) Determina uma expressão geral dos instantes em que:

a_1) a velocidade é nula;

a_2) a aceleração é nula;

a_3) a velocidade é mínima.

b) Esboça o gráfico da função v (t) em $[0, 2\pi]$, com lápis e papel.

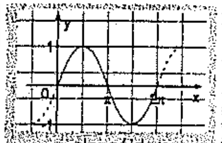
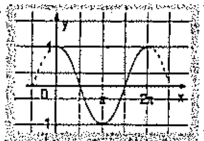
155. Sendo

$F(x) = 4\cos(x + 1)$

a) determinar os pontos onde a tangente ao gráfico de F, no ponto de abcissa 5, corta os eixos coordenados;

b) determinar uma expressão geral das abcissas dos extremos relativos de F.

SÍNTESE — FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

	SENO	CO-SENO	TANGENTE
FUNÇÕES	$x \to \text{sen}\,x$	$x \to \cos x$	$x \to \text{tg}\,x$
DOMÍNIO	IR	IR	$\{x \in IR: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$
CONTRADOMÍNIO	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	IR
ZEROS	$x = k\pi,\ k \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$	$x = k\pi,\ k \in Z$
SINAL	1º e 2º Q (+) 3º e 4º Q (−)	1º e 4º Q (+) 2º e 3º Q (−)	1º e 3º Q (+) 2º e 4º Q (−)
VARIAÇÃO	Crescente : 1º e 4º Q Decrescente : 2º e 3º Q	Crescente : 3º e 4º Q Decrescente : 1º e 2º Q	Crescente em todos os quadrantes
PERIODICIDADE	Período 2π	Período 2π	Período π
PARIDADE	Função ímpar	Função par	Função ímpar
EXTREMOS	$\text{Máx} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ $k \in Z$ $\text{Mín} = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$	$\text{Máx} = \cos(2k\pi)$ $k \in Z$ $\text{Mín} = \cos(2k\pi + \pi)$	Não tem máximo nem mínimo
CONTINUIDADE	Contínua em IR	Contínua em IR	Contínua no seu domínio
DERIVADAS	$(\text{sen}\,x)' = \cos x$ $(\text{sen}\,u)' = u' \cdot \cos u$	$(\cos x)' = -\text{sen}\,x$ $(\cos u)' = -u'\,\text{sen}\,u$	$(\text{tg}\,x)' = 1 + \text{tg}^2 x$ $(\text{tg}\,u)' = (1 + \text{tg}^2 u) \cdot u'$
GRÁFICOS	 sinusóide	 co-sinusóide	 tangentóide
FÓRMULAS DA DIFERENÇA, DA SOMA E DA DUPLICAÇÃO	$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}\,a \cos b \pm \text{sen}\,b \cos a$ $\text{sen}(2a) = 2\,\text{sen}\,a \cos a$	$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$ $\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$	$\text{tg}(a \pm b) = \frac{\text{tg}\,a \pm \text{tg}\,b}{1 \mp \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$ $\text{tg}(2a) = \frac{2\,\text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2 a}$

156. Mostra que $f(x) = x - \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ tem uma única raiz em IR (estuda a monotonia da função).

157. Seja a função f tal que $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x$. Mostra que os zeros de f e os de f' são os zeros de $\operatorname{sen} x$.

158. Calcula a primeira e a segunda derivada de:

a) $f(t) = \cos t - \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$

b) $f(t) = 2\cos(2t) + 3\operatorname{tg}(2t)$

c) $f(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 2t\right)$

159. Dadas as funções de variável real

$f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ e $g(x) = 2\operatorname{sen} x$

a) Representa-as graficamente no mesmo referencial, no intervalo $[0, 2\pi]$;

b) Determina:

b_1) os valores de x, para os quais é $f(x) = g(x)$;

b_2) $(f+g)'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b_3) uma equação cartesiana da recta tangente ao gráfico de $f(x)$, no ponto em que $x = \frac{2\pi}{3}$;

b_4) $\lim\limits_{x \to 3\pi} \frac{f(x)}{g(x)}$.

160. Dada a função g, tal que $g(x) = e^{-x} \cdot \operatorname{sen} x$, $x \in IR$,

a) mostra que $\forall_{x \in IR}$ é $-e^{-x} \leq g(x) \leq e^{-x}$;

b) calcula as abcissas dos pontos de intersecção da curva representativa de g, com o eixo dos xx;

c) calcula $g'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

d) determina uma equação da recta tangente à curva no ponto em que $x = 0$.

161. Seja g a função real de variável real $g(x) = 2^x - \operatorname{sen}^2 x$.

A tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0, passa pelo ponto de coordenadas (base e):

(A) $(1, 1 + \log 2)$ (B) $(\log 2, 1 - \log 2)$

(C) $(\log 2, \log 2)$ (D) $(0, \log 2)$

Específica de 94

162. Considere a função f definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$.

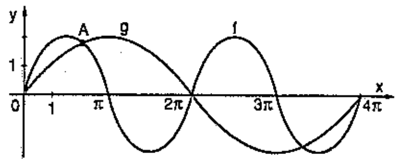
Indique qual das expressões seguintes define f', função derivada de f

(A) $2x\cos(x^2)$ (B) $\cos(x^2)$

(C) $2x\cos(2x)$ (D) $-\cos(x^2)$

(Ex. Nacional, 1998 — 2.ª chamada)

163. Na figura encontram-se representadas duas ondas definidas por $f(x) = 2\operatorname{sen} x$ e $g(x) = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}$



a) Indique em que intervalo varia g, quando $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{3}\right[$.

b) Determine $b \in IR$ de modo que $y = -x + b$ seja equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto A assinalado na figura.

c) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g''(x)}{x}$

d) Considere, no intervalo $[0, 4\pi]$ a onda ϕ definida por $\phi(x) = f(x) - g(x)$. Recorrendo ao gráfico, indique para que valores da variável independente ϕ é positiva.

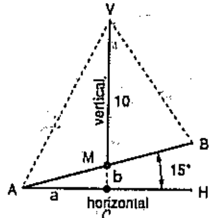
(Aferição, 1995 — Época normal)

164. Sendo f a função real de variável real definida por $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

a) Mostra que $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$ e determina a paridade, o período e os zeros de f.

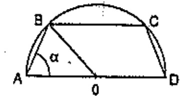
b) Indica uma expressão geral dos pontos maximizantes e o valor dos máximos.

165.



M é ponto médio de [AB] e $\overline{AB} = 2x$. Exprime, em função de x, $\overline{VA}$ e $\overline{VB}$. Sugestão: Calcula a e b.

166. O trapézio isósceles [ABCD] está inscrito na semi-circunferência de centro 0 e diâmetro [AD] com $\overline{AD} = 20$ cm.



a) Calcula, em função do ângulo α,

a_1) a amplitude (em rad) do arco $\overset{\frown}{CD}$.

a_2) a altura e a base menor do trapézio.

b) Prova que a área do trapézio é
$A = 100\operatorname{sen} 2\alpha - 50\operatorname{sen} 4\alpha$ e calcula α para que a área seja máxima, tendo em conta que $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Podes recorrer à calculadora gráfica.

167. Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(0{,}5x)}$

d) $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\cos t}{\frac{\pi}{2} - t}$

b) $\lim\limits_{t \to 0}\left(\frac{3}{t} \cdot \operatorname{sen}\frac{t}{\pi}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{x}\right)$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{16\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}$

f) $\lim\limits_{h \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x^2}$

168. Considere a função

$f: IR \to IR$: $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$ com $x \neq 0$.

Qual das expressões define $f'(x)$?

(A) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ (B) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x} \cdot \cos\frac{\pi}{x}$

(C) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{x} - x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ (D) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} \cdot \cos\frac{\pi}{x}$

(Específica 94 — Época normal)

169. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + \operatorname{sen} x & , \text{ se } x > 0 \\ \dfrac{x^2}{2-x} & , \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de f em IR.

b) Calcule as derivadas laterais de f no ponto $x = 0$

c) Mostre que a derivada de f tem infinitos zeros em IR^+, mas que nenhum deles corresponde a extremo relativo de f.

d) Averigue se f tem extremo relativo para $x = 0$

e) O gráfico de f tem uma única assimptota. Determine-a.

(Específica, 94)

170. Sendo $F(x) = 2\cos^2 x - \operatorname{sen} 4x$, mostra que as tangentes ao gráfico de F nos pontos de abcissas $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$ são paralelas.

171. Escreve uma equação da recta tangente e da normal à curva no ponto indicado:

a) $y = \operatorname{sen}(3x)$, $x = \frac{\pi}{12}$

b) $y = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2x}{3}\right)$, $x = \frac{\pi}{2}$

c) $y = \operatorname{sen}^3 x$, $x = \frac{\pi}{6}$

172. Calcula as funções derivadas de:

a) $y = \cos^3 t$ b) $y = (3 + \operatorname{sen} t)^2$

c) $y = \operatorname{sen} t \cdot \cos t$ d) $y = 2\cos^2 t + 3\operatorname{sen}^2 t$

e) $y = (\operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen}^3 t)^5$

173. Determina os extremos relativos das funções $x \mapsto f(x)$ (confirma, vendo o gráfico na calculadora, em $[0, 2\pi]$)

a) $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$ c) $f(x) = \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x$

b) $f(x) = 1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ d) $f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x}$

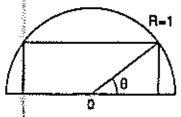
174. Calcula f' e f'' sendo:

a) $f(x) = \text{sen}\, x - x \cos x$, no ponto $x = \frac{2\pi}{3}$

b) $f(x) = 2 \cos x + \text{sen}^2 (2x)$, no ponto $x = -\frac{\pi}{6}$

c) $f(x) = \cos x \,.\, \ln x$, no ponto $x = \pi$

175. Um rectângulo está inscrito num semi-círculo de raio 1 e centro O (Ver figura junta)



a) Mostra que a área A do rectângulo é

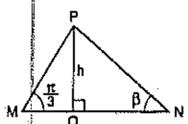
$$A = \text{sen}\,(2\theta)$$

b) Calcula o valor máximo que a área pode ter e, neste caso, qual o comprimento e a largura do rectângulo.

176. Num $\triangle$ [MNP],

$\overline{MN} = 10$ cm, $\hat{M} = \frac{\pi}{3}$ e

$\hat{N} = \beta$, com $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$



a) Exprime a altura h em função de β

b) Mostre que a área do triângulo é

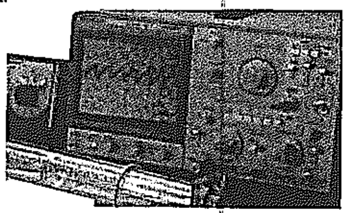
$$A = \frac{50\sqrt{3}\, \text{tg}\, \beta}{\sqrt{3} + \text{tg}\, \beta}$$

c) Suponha que $A = 25\sqrt{3}$ e classifique o triângulo quanto aos lados.

d) Mostre que $A(\beta)$ é monótona.

e) Calcule $\lim\limits_{\beta \to \frac{\pi}{2}^-} A(\beta)$

177. A curva em «serra dentada»
O osciloscópio mostra uma curva em serra dentada.



Esta curva pode ser aproximada por meio de curvas sinusoidais de períodos e amplitudes ajustáveis.

Uma primeira aproximação da curva é dada por

$$y = \frac{1}{2} \text{sen}\,(2\pi x) + \frac{1}{4} \text{sen}\,(4\pi x)$$

Mostra que podemos escrever

$$y = \text{sen}\,(2\pi x) \,.\, \cos^2 (\pi x)$$

178. No movimento de um ponto sobre um eixo, a abcissa δ do ponto, varia em função do tempo t, de acordo com a equação:

$$\delta(t) = \cos t - \sqrt{3}\, \text{sen}\, t \qquad t \in [0, 2\pi]$$

a) Mostra que $\delta(t) = -2\, \text{sen}\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$

b) Determina a maior distância à origem a que o ponto pode estar.

c) Indica o contradomínio de $\delta(t)$.

179. A posição de um corpo móvel sobre um eixo, em relação à origem, é dada por

$$S(t) = m\, \text{sen}\,(k\,t) + n \cos(k\,t)$$

onde m, n, k são constantes não nulas.

Mostra que a aceleração do movimento, S'', é proporcional a S.

Qual é a constante de proporcionalidade?

180. Seja a função h dada por $h(x) = x - 2\, \text{sen}\, x$, $x \in \mathbb{R}$

a) Justifica que h é uma função ímpar e contínua em $\mathbb{R}$ e que o seu gráfico não admite assimptotas.

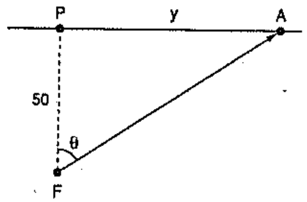
b) Com a calculadora e recorrendo aos gráficos de $y = x$ e de $y = 2\, \text{sen}\, x$ localiza os zeros de h no intervalo $[0, 2\pi]$.

c) Determina os intervalos de monotonia, os extremos, os pontos de inflexão e o sentido da concavidade de h no intervalo $[0, 2\pi]$.

d) Representa graficamente h no intervalo $[0, 2\pi]$ com lápis e papel.

e) Mostra que a função H tal que $H(x) = \frac{h(x)}{x}$ admite uma extensão a $\mathbb{R}$, contínua.

181. Um farol está situado num ponto F, à distância de 50 m do ponto P mais próximo da costa (suposta rectilínea).

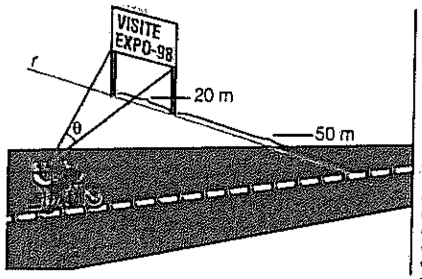


O feixe de luz do farol dá uma volta completa (2 rad) em 20 s. Exprime θ em função do tempo t (em segundos) e y em função de θ.

Determina, em função de t, a velocidade com que o raio de luz percorre a costa.

Qual é a taxa de variação instantânea, quando o raio de luz atinge A, a 100 m de P?

182. Na figura a tabuleta tem 20 m de largura e é perpendicular ao eixo da estrada, estando a 50 m deste.



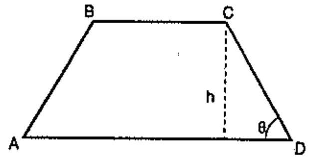
O motociclista, que circula sobre o eixo da estrada, vê a tabuleta sob o ângulo θ.

A que distância da linha r o ângulo θ é máximo?

Sugestão: θ é máximo quando tg θ o for.

183. A pedido de um cliente, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima, com a forma de um trapézio, em que

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2 \text{ dm.}$$



Designando por θ a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC.

a) Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior [AD] em função de θ.

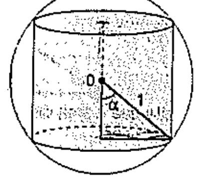
b) Prove que a área $A(\theta)$ do trapézio é dada, em dm², por $A(\theta) = 4\, \text{sen}\, \theta + 2\, \text{sen}\,(2\theta)$

c) Determine o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima e calcule essa área.

d) Calcule $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{A(\theta)}{\theta}$

(Aferição, 94 — Época normal)

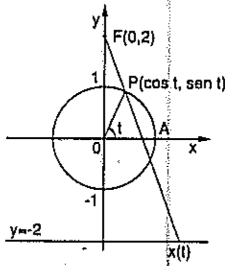
184. Um cilindro está inscrito numa esfera de centro O e raio 1 m.



a) Exprima o volume do cilindro em função do ângulo α. $\left]0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right[$

b) Calcule em radianos e em graus o valor de α para o qual o volume do cilindro é máximo. Apresente o quadro com a monotonia da função $\alpha \mapsto V(\alpha)$ em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

185. Observe a figura.



O ponto P move-se sobre a circunferência de raio 1 no sentido positivo, a partir de A e percorrendo 1 grau por segundo.

Um foco luminoso em (0,2) produz a sombra de P na recta $y = -2$

a) Prove que $x(t)$, abcissa do ponto sombra, é dado por $x(t) = \dfrac{4 \cos t}{2 - \operatorname{sen} t}$

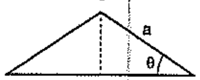
b) Determine ao fim de quantos segundos a abcissa x atinge o valor máximo.

c) Em que instantes a abcissa $x(t)$ varia (isto é, aumenta ou diminui) com maior rapidez?

(Específica, 95 — Época normal)

186. Numa fábrica de cerâmica produzem-se tijoleiras triangulares.

Cada peça é um triângulo isósceles de lado a, constante, como mostra a figura



1. Mostre que a área de cada peça é dada, em função de θ, por

$$A(\theta) = \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}(2\theta), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad a > 0$$

2. Para que valor de θ a área de cada peça é máxima?

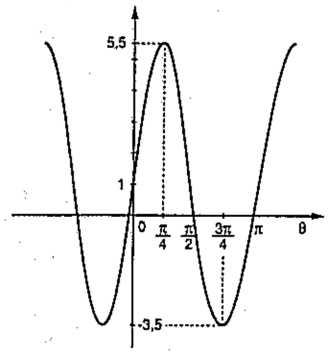
3. Justifique que, se o lado a for menor que $\sqrt{2}$ a área da peça será inferior a 1, qualquer que seja o valor do ângulo θ.

4. Seja $L = \lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{A\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\theta}$.

Justifique que não existe logaritmo de L, qualquer que seja a positivo e seja qual for a base do logaritmo.

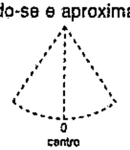
5. Seja $f: \theta \mapsto \dfrac{a^2}{2} \operatorname{sen}(2\theta)$, ($\theta \in \mathbb{R}$; a constante real).

Sabendo que a figura seguinte representa parte do gráfico de $k + f$ (com k constante), determinar os valores de k e de a.



(1ª chamada, 1ª fase, 1996)

187. O pêndulo de um relógio move-se continuamente, afastando-se e aproximando-se do centro O.



No instante t segundos a distância ao centro é dada, em cm, por $d(t) = |5 \cdot \operatorname{sen}(4\pi t)|$

1. Qual a maior distância a que o pêndulo se pode encontrar do centro?

2. De quanto em quanto tempo o pêndulo passa pelo centro?

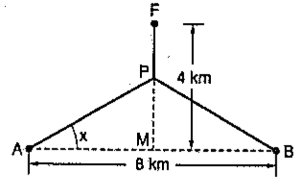
3. Qual a velocidade do pêndulo no instante $t = \dfrac{1}{16}$ s?

4. Faça um esboço do gráfico de $d: t \mapsto d(t)$ em [0, 1/2]

5. Determine para que valores de $t \in [0, 1/2]$ a distância que separa o pêndulo do centro é inferior a 2,5 cm.

(Prova modelo, 96)

188. Pretende-se construir uma canalização ligando as povoações A e B, situadas a 8 km uma da outra, partindo da fonte de abastecimento localizada em F como se indica na figura junta.



A canalização é formada de 3 canos: um que vai de F até P, e dois que partem de P, um para A e outro para B.

O ponto P está a igual distância de A e de B.

• O ponto M, médio de [AB], dista 4 km de F

• x é a amplitude do ângulo PÂM $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$.

a) Tomando para unidade o km, mostre que o comprimento total da canalização é dado por

$$g(x) = 4 + \frac{8 - 4 \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

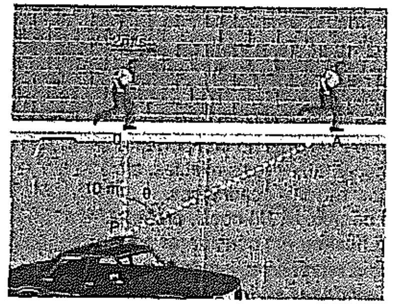
Sugestão: Comece por mostrar que $\overline{PA} = \dfrac{4}{\cos x}$ e que $\overline{FP} = 4 - 4 \operatorname{tg} x$

b) Calcule g (0) e interprete o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

c) Determine o valor de x para o qual o comprimento total da canalização é mínimo.

(Exame nacional, 98 — 1ª fase, 1ª chamada)

189.



Um fugitivo segue a 2 m/s junto a um muro em linha recta. Em dado momento um carro da polícia pára em P a 10 m do muro (e do homem) e acende um farol que vai focando o homem à medida que ele anda; mas o fugitivo não acelera o passo.

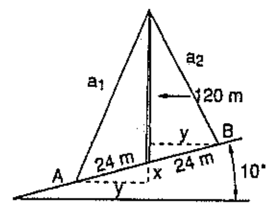
a) Se o farol rodou θ radianos enquanto o fugitivo foi de O a A, exprima $\operatorname{tg}\theta$ em função do tempo t decorrido (t em segundos).

b) Tendo em conta que $(\operatorname{tg}\theta)'_t = (1 + \operatorname{tg}^2\theta)\,\theta'(t)$ exprima $\theta'(t)$ em função de t.

c) Quando o fugitivo estiver a 30 m de O qual é, em rad/s, a velocidade com que varia θ? (Velocidade angular.)

190. Uma torre vertical com 120 m de altura está localizada num terreno com a inclinação de 10° com a horizontal.

Quais os comprimentos dos dois cabos de aço que ligam o topo da torre com os pontos A, B do terreno situados a 24 m da base da torre?



Sugestão: Calcula x e y.

Infinito 12

VOLUME 2

Ana Maria Brito Jorge
Conceição Barroso Alves
Graziela Fonseca
Judite Barbedo

AREAL EDITORES, LDA.
EC PEDRO HISPANO – 4102-811 PORTO

DIRECÇÃO EDITORIAL
Rua da Torrinha, 228-H, 3.º andar – 4050-610 PORTO
TEL. 223393900 – FAX 222005708

DIRECÇÃO COMERCIAL / ARMAZÉM
Rua D. Marcos da Cruz, 1381 / 1395 – 4455-482 PERAFITA
TELS. 229959608 / 229966985 / 229967341
FAX 229959583

LIVRARIA / MATERIAL DIDÁCTICO
Av. da Boavista, 1471 – Loja 10 – 4100-131 PORTO
TEL. 226000362 – FAX 226068449

AREAL PROFESSOR
Informação Editorial, Café, Livraria, Auditório,
Centro de Formação
Rua da Torrinha, 254 – Lojas A e B – 4050-610 PORTO
TEL. 223393900 – FAX 223393910

Linha Verde Professor
800 200758

www.arealeditores.pt
Email: areal@arealeditores.pt

FICHA TÉCNICA

Director Editorial: Diogo Santos
Design gráfico: Areal Editores
Ilustração: Cristina Souza
Composição electrónica: Mónica Aibéo
Coordenação Editorial: Eugénia Machado
Revisão: Óscar Moura, Sandra Sousa
Capa: Vítor Simões
Imagens: © PhotoDisc, Inc.
© Digital Vision, © John Foxx

Este produto ecológico não agride o meio ambiente porque é isento de cloro elementar

Problemas de máximos e mínimos. Problemas de optimização.

O conceito de derivada intervém em diversas situações da vida real e o estudo da derivada de uma dada função assume grande importância em diversos ramos do conhecimento desde há cerca de dois séculos.

Por exemplo, como já vimos, a velocidade instantânea no instante t_0 é o limite da velocidade média quando t tende para t_0, isto é, $v = f'(t_0)$ sendo $e = f(t)$ a lei do movimento.

Também a aceleração de um móvel se define como a *derivada da sua velocidade.*

E já vimos também que sendo $C(x)$ o custo de fabrico de uma quantidade x de um certo produto, o número real $\frac{C(x)}{x}$ chama-se, em Economia, *custo médio* de fabricação do produto, e quando a produção passa da quantidade x_0 à quantidade $x_0 + 1$, daí advém um custo suplementar denominado *custo marginal.*

Este custo é, portanto, dado pela diferença $C(x_0 + 1) - C(x_0)$ que se pode escrever da seguinte forma:

$$\frac{C(x_0 + 1) - C(x_0)}{(x_0 + 1) - x_0}$$

Em Economia, considera-se que o custo marginal coincide com a derivada de C em x_0, isto é, com $C'(x_0)$.

São muitos os problemas que, em diversas áreas, exigem a determinação de máximos ou mínimos de certas funções: máximo rendimento, custo máximo, tempo máximo, área máxima, ...

Vamos, em seguida, ver como podem ser resolvidos alguns problemas deste tipo, tendo em conta que, de um modo geral, a sua resolução se desenvolve segundo as seguintes etapas:

- Definir uma função que sirva de modelo matemático à situação a estudar (se possível com uma só variável);
- Estudar a variação dessa função determinando, em particular, os seus extremos;
- Confrontar os resultados teóricos com o fenómeno real e com a situação concreta do problema.

Aplicações

Problema 1 – Economia e Gestão

Um gestor de uma empresa concluiu que o custo de fabrico C (em milhares de contos) varia em função da quantidade **x** produzida (em milhares de peças) segundo a seguinte expressão:

$C(x) = 2x^3 - x^2 + 4x$

a) Qual é a quantidade x_0 que torna mínimo o custo médio C_M?

b) Defina a função *custo marginal* (ou seja C').

c) Verifique que, para a produção x_0 (a que minimiza o custo médio), o custo médio é igual ao custo marginal, ou seja,

$\frac{C(x_0)}{x_0} = C'(x_0)$

Note que:
$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$

RECORDE

Recorde os problemas resolvidos no INFINITO 11 (páginas 132 a 135).

Resolução:

a) $C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = 2x^2 - x + 4$

Determinemos a função derivada e os seus zeros

$C'_M(x) = 4x - 1$

$C'_M(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 0,25$

x	0		0,25	
Sinal de $C'_M(x)$		–	0	+
Variação de C_M		↘		↗

Portanto, o valor que torna mínimo o custo médio é $x_0 = 0,25$ (milhares de peças)

b) O custo marginal é dado por
$C'(x) = 6x^2 - 2x + 4$

c) Vejamos se é verdadeira a igualdade

$\frac{C(0,25)}{0,25} = C'(0,25)$

$\frac{2 \times 0,25^3 - 0,25^2 + 4 \times 0,25}{0,25} = 6 \times 0,25^2 - 2 \times 0,25 + 4$

$3,875 = 3,875$

o que confirma que, para a produção de 0,25 milhares de peças, o custo médio é igual ao custo marginal (sendo o seu valor de 3875 contos).

Problema 2

O *modelo Count* é uma fórmula usada para predizer a altura de uma criança em idade pré-escolar.
Sendo h(x) a altura (em centímetros) de uma criança na idade x (em anos), com $\frac{1}{4} \le x \le 6$ então h(x) pode ser aproximada por

$$h(x) = 70{,}228 + 5{,}104x + 9{,}222 \ln x$$

a) Preveja a altura e a taxa de crescimento quando uma criança atinge os 3 anos de idade.
b) Para que idade é máxima a taxa de crescimento?

Resolução

a) Aos 3 anos a altura é aproximadamente

$h(3) = 70{,}228 + 5{,}104 \times 3 + 9{,}222 \times \ln 3$

$\simeq 95{,}7$ (em cm)

e a taxa de variação de h em relação a x é

$h'(x) = 5{,}104 + \frac{9{,}222}{x}$

Para x = 3, vem

$h'(3) = 5{,}104 + \frac{9{,}222}{3} \simeq 8{,}178$

Logo, a taxa de crescimento da criança aos 3 anos é de cerca de 8,2 cm por ano.

b) Para determinar o valor máximo da taxa de crescimento h' (x), teremos de determinar os zeros e estudar o sinal de h''(x).

Como $h''(x) = -\frac{9{,}222}{x^2}$, conclui-se que h''(x) é negativa em $\left[\frac{1}{4}, 6\right]$.

Então, h'(x) é estritamente decrescente em $\left[\frac{1}{4}, 6\right]$. O máximo de h' (x) ocorre para $x = \frac{1}{4}$, isto é, aos 3 meses.

Problema 3

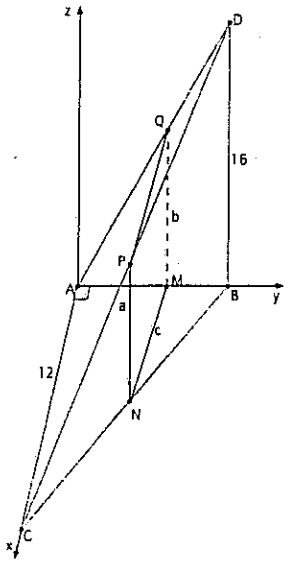
[DABC] é uma pirâmide tal que [ABC] é um triângulo rectângulo em A. O ponto D pertence à recta perpendicular a ABC no ponto B.
Os triângulos [DBA] e [DBC] são rectângulos em B.

$\overline{AB} = 9$ (em centímetros).
$\overline{AC} = 12$ (em centímetros).
$\overline{BD} = 16$ (em centímetros).

Designe-se por M um ponto do segmento [AB] e $\overline{AM} = a$.
Por M trace-se um plano perpendicular a [AB]. Designe-se por N a sua intersecção com [BC], por P a sua intersecção com [CD] e Q a sua intersecção com [AD].
Exprima em função de a a área do quadrilátero [MNPQ] e averigúe quando é máxima esta área.

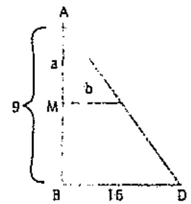
O quadrilátero [MNPQ] é um rectângulo. Considere-se o referencial $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

A = (0, 0, 0)
B = (0, 9, 0)
C = (12, 0, 0)
D = (0, 9, 16)
M(0, a, 0), 0 < a < 9)



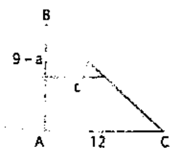
$\frac{9}{a} = \frac{16}{b}$

$b = \frac{16a}{9}$

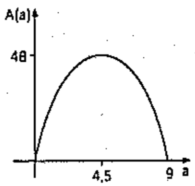


$\frac{9}{9-a} = \frac{12}{c}$

$c = \frac{12(9-a)}{9}$



A área do rectângulo será



$A = b \times c$

$A = \frac{16}{9} a \times \frac{12}{9}(9 - a)$

$A(a) = \frac{192}{81} a (9 - a) \wedge 0 < a < 9$

para a = 4,5 obtemos a área máxima. O seu valor é

$A_{máxima} = \frac{192}{81} \times 4,5 \times 4,5 = 48 \text{ (cm}^2)$

Problema 4

A propagação de uma doença infecciosa numa certa escola é dada pela expressão

$$P(t) = \frac{100}{1 + e^{3-t}}$$

onde P(t) é o número de estudantes infectados e t é o número de dias contados após os estudantes terem estado em contacto com outros infectados

a) Estime o número inicial de estudantes infectados
b) A longo prazo quantos alunos irão contrair a doença?
c) Quantos dias serão necessários para 99 estudantes estarem infectados?
d) Qual foi o dia em que aumentou mais o número de infectados? Qual foi esse aumento?

Resolução

a) Como $P(0) \simeq 4,74$ pode estimar-se que o número inicial de doentes infectados foi 5.

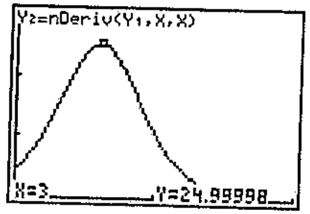
b) O gráfico da função y = P(t) mostra que a função é crescente e tende para 100 quando $t \to +\infty$.
Assim

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{100}{1 + e^{3-t}} = 100$$

logo o número de estudantes infectados nunca ultrapassará 100.

c) Resolvendo a equação P(t) = 99 e recorrendo à tabela vemos que $t \simeq 7,60$, logo podemos garantir que após 8 dias já teremos 99 alunos infectados.

d) Analisando o gráfico de P' podemos verificar que admite máximo para t = 3 e esse máximo é 25.

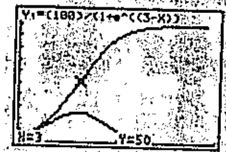


Assim 25 estudantes por dia é a taxa máxima de variação encontrada exactamente para t = 3.
Confirmemos analiticamente

$$P'(t) = \frac{100\, e^{3-t}}{(1 + e^{3-t})^2}$$

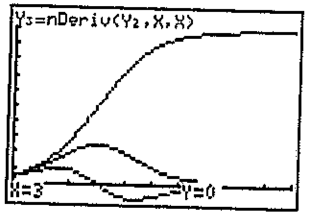
$$P''(t) = \frac{-100\, e^{3-t}(1 + e^{3-t})^2 + 200 e^{3-t} e^{3-t}(1 + e^{3-t})}{(1 + e^{3-t})^4}$$

$$P''(t) = \frac{-100\, e^{3-t} - 100(e^{3-t})^2 + 200(e^{3-t})^2}{(1 + e^{3-t})^3} = \frac{-100\, e^{3-t} + 100(e^{3-t})^2}{(1 + e^{3-t})^3}$$



$$P''(t) = 0 \Leftrightarrow 100\, e^{3-t}(-1 + e^{3-t}) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{3-t} = 0}_{\text{cond. imp.}} \vee -1 + e^{3-t} = 0 \Leftrightarrow e^{3-t} = e^0 \Leftrightarrow t = 3$$

Pode dizer-se que, a partir do 3.º dia, começa a reduzir o aumento do número de doentes por dia.
Relacionemos os três gráficos, isto é, os gráficos de $y_1 = P(t)$, $y_2 = P'(t)$ e $y_3 = P''(t)$.



No início, o número de doentes está a aumentar a uma taxa de variação crescente (P' é uma função crescente logo P''(t) > 0).
Para t = 3, a taxa segundo a qual a população está a crescer atinge o seu máximo, ou seja, para t = 3, a população está a aumentar o mais rapidamente possível.
Depois de t = 3, a taxa de variação segundo a qual a população aumenta é decrescente, e, portanto, P''(t) < 0.
Para t = 3, a concavidade do gráfico da função y = P(t) passa de voltada para cima a voltada para baixo e P''(3) = 0.

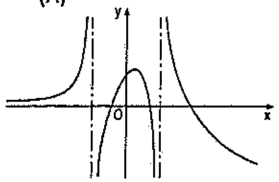
II

x	$-\infty$		-4		-3		0		$+\infty$
Sinal de f'(x)		+	0	−	0	−	||	−	
Variação de f(x)	$-\infty$	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	-1

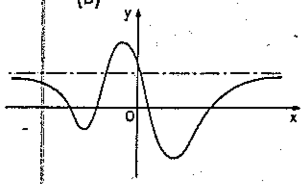
III

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
Sinal de f'(x)		+	||	+	0	−		−	
Variação de f(x)	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$ $+\infty$	↘	$-\infty$

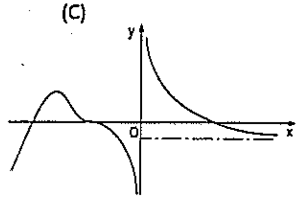
(A)



(B)

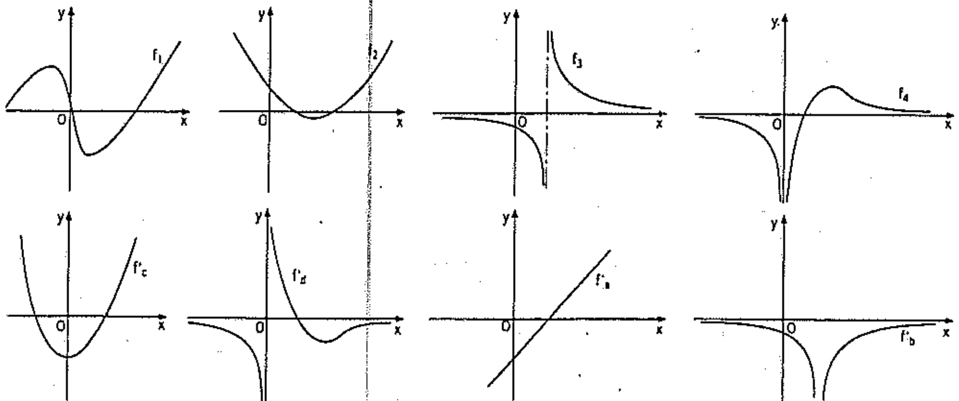


(C)

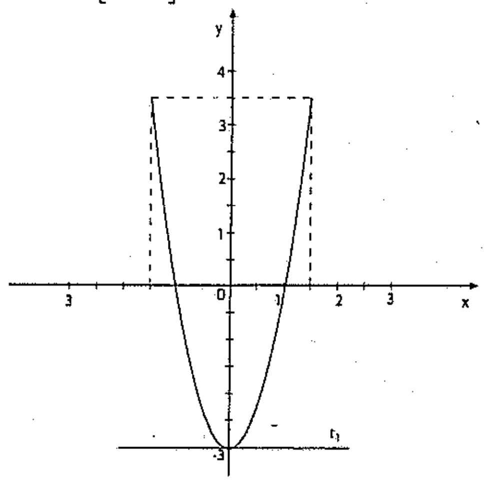


2. Indique o domínio de f e de f'.
3. Quais são os limites de f nos extremos dos intervalos que constituem D_f.
4. Escreva as equações das rectas tangentes que o quadro de variação permita conhecer.
5. Escreva as equações das assímptotas existentes.

69 Sejam f_1, f_2, f_3 e f_4 quatro funções e f'_a, f'_b, f'_c e f'_d funções derivadas das primeiras (mas infelizmente não se encontram pela mesma ordem!)
Associe a cada função a função derivada correspondente.

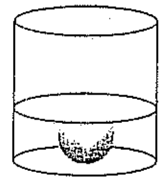


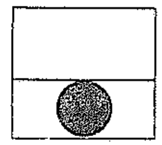
70 A curva C' da figura é a curva representativa da função derivada f ' de uma função f definida no intervalo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.



1. Deduza do gráfico o sinal de f ' para todo o número real x pertencente ao intervalo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
2. Construa o quadro de variação de f e proponha um gráfico para a função f.

71 Num cilindro de 30 cm de altura e em que a base é um círculo de 10 cm de raio, coloca-se uma esfera de raio r, em centímetros.
A esfera está coberta de água como mostram as figuras.





1. O raio da esfera é 8 cm.
   Qual é, em centímetros cúbicos, o volume de água necessário para a cobrir?
2. Exprima, em função de r, o volume de água V(r) necessário para cobrir uma esfera de raio r.
3. Qual é o domínio da função V?
4. Estude V'(r) e o sentido de variação de V.
5. Qual é o raio da esfera correspondente a um volume máximo?
6. Haverá esferas de raios diferentes que necessitem da mesma quantidade de água para serem cobertas? Analise o gráfico de y = V(r) e tire conclusões.

72 Ao ser lançado no espaço a bordo de uma nave espacial, o peso do astronauta decresce até atingir um estado de imponderabilidade.
O peso W de um astronauta com 75 kg a uma altitude de x quilómetros acima do nível da água do mar é dado por

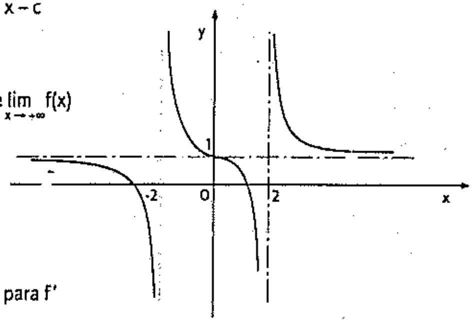
$$W = 150 \times \left(\frac{6400}{6400 + x}\right)^2$$

Qual o valor, em kg/km, da taxa de variação de W quando x = 1000 km?

73 Considere a função

$$f : x \mapsto a + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

Recorrendo ao gráfico:



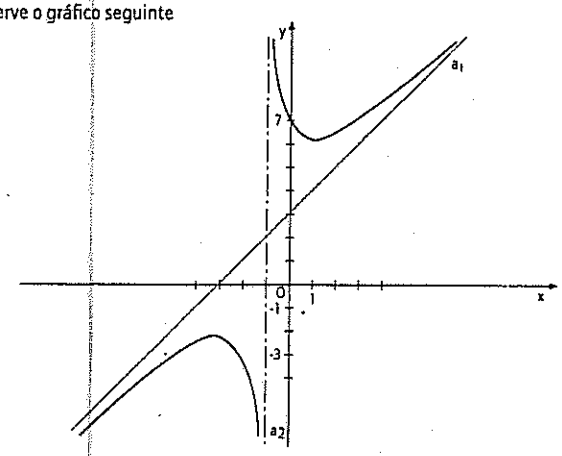
1. Conjecture o valor de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

   Deduza o valor de a.

2. Determine b e c.

3. Proponha um gráfico para f'

74 Observe o gráfico seguinte



sabendo que é a representação da função

$$f : x \mapsto ax + b + \frac{c}{x+d}$$

1. Por leitura do gráfico, encontre a equação das assímptotas a_1 e a_2 e deduza os valores de a, b e d.

2. Sabendo que o gráfico corta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 7, determine a função f.

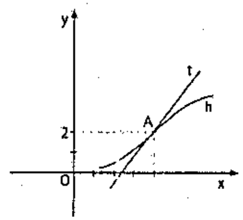
3. Proponha um gráfico para f'

75 Determine a função

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

sabendo que a sua curva representativa, C, corta o eixo das ordenadas no ponto A de ordenada 3 e tem por tangente no ponto de abcissa 1 a recta de equação $y = 4x + 5$.

76 A recta **t** é tangente ao gráfico da função h no ponto A de abcissa 4.
A segunda derivada de h, no ponto 4:



(A) É 2 (B) É $\frac{1}{2}$ (C) Não existe (D) É 0

(Exame Nacional – 1.ª chamada – 1996)

77 Seja f a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ por $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

1. Estude a variação de $f(x+2)$ e trace o seu gráfico.

2. Seja g a função definida por $g(x) = |f(x)|$.
   Como pode obter o gráfico de g à custa do de f?

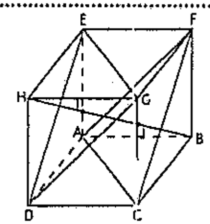
3. Com a ajuda do gráfico, estude a variação de g.

4. Considere a função $h(x) = f(|x|)$. Trace o gráfico de h a partir do de f.

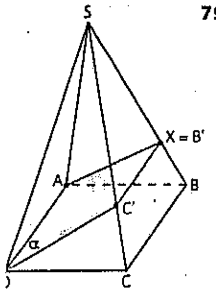
?!

78 Consideremos o cubo de aresta 1 unidade.
Considere o referencial $(A, \overline{AD}, \overline{AB}, \overline{AE})$ e considere o plano da equação

$$x - y + z = a \qquad a \in [-1, 2]$$



Determine a de modo que a secção do plano com o cubo tenha área máxima.
Quais são os vértices do polígono secção que corresponde à área máxima?



79 Considere a pirâmide [SABCD] de base quadrada [ABCD], em que SA é perpendicular à base [ABCD], tal que $\overline{AB} = 3$ e $\overline{SA} = 3\sqrt{3}$ (em centímetros).
O plano α contém AD, intersecta [SB] em B' e [SC] em C'.

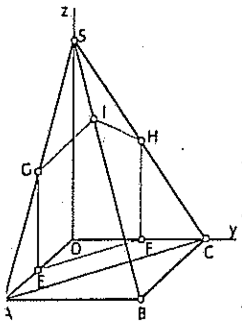
1. Designando por x o comprimento $\overline{SX}$, mostre que
$$\overline{AB'}^2 + \overline{B'C'}^2 + \overline{C'D}^2 = \frac{5}{2}x^2 - 21x + 63$$

2. Faça $y = \overline{AB'}^2 + \overline{B'C'}^2 + \overline{C'D}^2$, estude a função
$$f : x \mapsto y$$
e interprete o significado dos extremos relacionando-os com a secção correspondente.

80 Seja $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um referencial o.n. e A, B, C, S definidos por

$\overrightarrow{OA} = \vec{i}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{j}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{j}$ e $\overrightarrow{OS} = \vec{k}$

Seja a um número real do intervalo]0, 1[.
Pretende-se determinar a área máxima da secção definida pela intersecção do plano de equação x + y = a com a pirâmide [SOABC].



1. Designemos por E, F, H, I e G os pontos de intersecção do plano com as arestas da pirâmide.
Prove que [GEFH] é um rectângulo.

2. Determine as coordenadas de I e calcule a área do triângulo [GHI]

3. Seja f a função, área da secção, definida em]0, 1[por $f(a) = a\sqrt{2}\,\frac{(4-3a)}{4}$.
Estude a variação de f. Para que valor de a é esta área máxima?

4. Mostre que o plano que determina a área máxima é paralelo a AC e OS e passa pelo baricentro do triângulo [OAC].

81 Seja A(3,5; −2) e r a recta que passa em B(2, 0, 0) e tem a direcção do vector

$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$.

Seja M um ponto da recta r e o vector $\overrightarrow{BM} = t\vec{u}$, sendo t um número real.

1. Exprima as coordenadas de M em função de t.

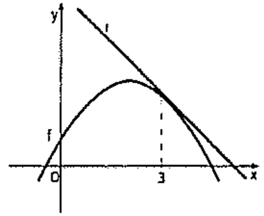
2. Considere $f(t) = \overline{AM}^2$.
Mostre que a função f admite um mínimo para um valor t_0 de t e determine-o.
Interprete o significado do valor encontrado.

82 Sendo f a função definida por $f(x) = x^e$, a expressão analítica de f' é

(A) x^e (B) x^{e-1} (C) ex^{e-1} (D) $x^e \ln x$

(Exame Nacional – 1997)

83 Na figura estão representadas:



- parte do gráfico de uma função f derivável em ℝ
- uma recta r tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3

O valor de f'(3), derivada da função f no ponto 3, pode ser igual a

(E) $\frac{1}{f(3)}$ (F) 1 (G) 0 (H) −1

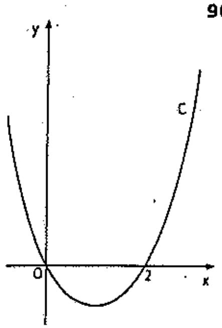
(Exame Nacional – 1.ª chamada – 1998)

84 Calcule, se existir o limite das funções dadas nos pontos indicados

P

1. $x \mapsto e^{1/x}$, em $+\infty$ e em $-\infty$
2. $x \mapsto e^{-x^2}$, em $+\infty$ e em $-\infty$
3. $x \mapsto \frac{x^5}{2^x}$, em $+\infty$ e em $-\infty$
4. $x \mapsto x^2 e^{\frac{1}{x}}$, em $+\infty$ e em $-\infty$
5. $x \mapsto \frac{e^x - 1}{2x}$, em $+\infty$ e em zero
6. $x \mapsto \frac{e^x}{1 - e^x}$, em $-\infty$, em zero e em $+\infty$
7. $x \mapsto \frac{e^x - e^3}{x - 3}$, em 3
8. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x}$
9. $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x}$
10. $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$
11. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x^2}$
12. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$

90 Na figura está representado o gráfico C da função f', derivada da função f, de domínio $\mathbb{R}$.



1. Indique, justificando, os intervalos de monotonia de f e os valores de x para os quais a função tem extremos relativos.

2. Proponha um gráfico para a função f, compatível com o gráfico de f', dado.

3. Supondo que

$$f(x) = x^2 (x - a) + bx, \text{ com } a, b \in \mathbb{R},$$

determine a e b servindo-se dos valores assinalados na figura.

Prova de Aferição – 1993

91 Numa fábrica, o custo total da produção mensal de q centenas de peças, expresso em milhares de escudos, é dado por

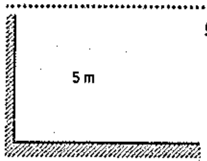
$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 21q + 1000$$

1. Determine a função C' (q), *custo marginal*, e calcule o seu valor para 6 centenas de peças.

2. Estude a variação do custo total, no intervalo]0, 8[. Qual o número de peças que aconselha ao fabricante para que o custo total seja mínimo?

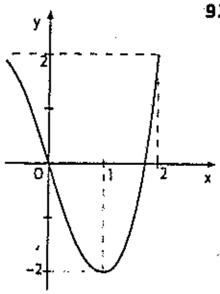
Prova de Aferição de Matemática, Época normal – 1993

92 Num canto de um terreno murado pretende-se delimitar com uma trave de madeira a maior área de terreno possível.



Sabendo que a trave mede 5 metros, em que posição deverá ser colocada?

93 Na figura está representado o gráfico da função real de variável real f, definida em [−1, 2].



1. Baseando-se no gráfico, determine

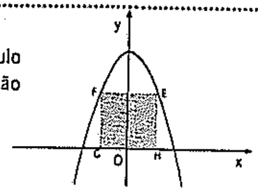
$$f(0), \; f(1) \; \text{ e } \; f'(1)$$

2. Determine graficamente o conjunto-solução de cada uma das condições:

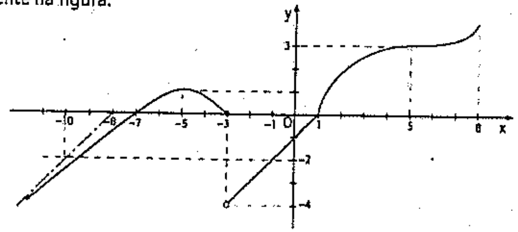
$$f(x) = 0 \quad \text{e} \quad f(x) \cdot f'(x) > 0$$

3. Supondo que f(x) é da forma
$f(x) = ax^3 + bx + c$, com a, b, c $\in \mathbb{R}$, determine os valores de a, b e c.

94 Considere a parábola definida por $y = -x^2 + 9$.
Supondo que a unidade adoptada é o cm, determine as dimensões do rectângulo [EFGH] de área máxima sabendo que E e F são pontos da parábola e G e H são pontos do eixo das abcissas.

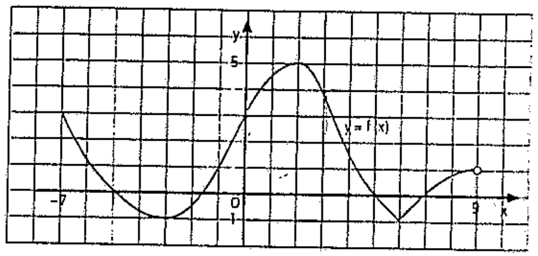


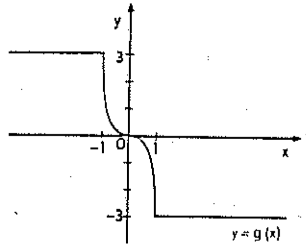
95 Considere a função real de variável real, de domínio]− ∞, 8], representada graficamente na figura.



1. Indique as soluções das seguintes condições:
   a) $f(x) \geq 0$ b) $f'(x) \geq 0$ c) $f''(x) \leq 0$
2. Indique, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa:
   "O domínio da função derivada de f, é o conjunto dos pontos em que a função f é contínua".
3. O gráfico de f admite uma assímptota oblíqua.
   Escreva uma equação dessa assímptota.

96 Observe os seguintes gráficos, de duas funções, f e g, reais de variável real:





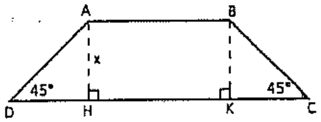
1. Indique:
   – o domínio de f;
   – o contradomínio de f e de g;
   – os zeros de f;
   – o domínio de f'.

2. Construa o quadro de variação da função f e indique os extremos, caso existam.

3. Represente graficamente a função
   $h : x \mapsto |g(x)| + 1$ $t : x \mapsto f(x - 2) + 1$

97 Que dimensões, com aproximação a 0,1 mm, deve ter uma caixa de conservas cilíndrica fechada, com a capacidade de 1 l, para que no seu fabrico se gaste o mínimo de material? (A espessura do material de que é feita a caixa não é de considerar). Compare a altura com o diâmetro da caixa.

98 [ABCD] é um trapézio isósceles de área $5\sqrt{2}\ cm^2$.
Os ângulos agudos medem 45°.
Seja x (em cm) a altura do trapézio e P(x) o seu perímetro (em cm).



1. Exprima $\overline{DH}$ e $\overline{CK}$ em função de x.

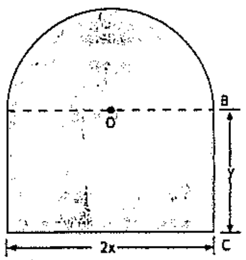
2. Exprima $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ em função de x.

3. Utilize a área do trapézio para exprimir $\overline{AB}$ em função de x.

4. Mostre que $P(x) = 2\sqrt{2}x + \dfrac{10\sqrt{2}}{x}$

5. Encontre o valor de x para o qual o perímetro do trapézio é mínimo.
   Qual é então a medida dos lados do trapézio? Interprete graficamente.

99 Uma janela é formada por um rectângulo [ABCD] e por um semicírculo de diâmetro [AB].
Seja x o raio do semicírculo e y a distância $\overline{BC}$ expressa em metros.
O perímetro da janela é igual a 5 metros.
Pretende-se encontrar as dimensões da janela a fim de que a abertura tenha uma área máxima.



1. Exprima o perímetro da janela em função de x e de y.

2. Retire da expressão o valor de y em função de x.

3. Para que valores de x se tem y > 0?

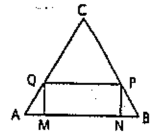
4. Exprima a área da janela em função de x e de y.

5. Utilizando os resultados das questões anteriores, mostre que a área se pode escrever na forma

$$A(x) = 5x - \frac{4+\pi}{2}x^2$$

6. Deduza para que valores de x e de y a área da janela é máxima.
   Encontre o valor exacto dessa área e em seguida um valor aproximado a menos de 10^{-2}.

100 Considere o triângulo equilátero [ABC] de lado a.
Inscreve-se neste triângulo um rectângulo [MNPQ].
Faça-se $\overline{AM} = x$
Para que valor de x a área do rectângulo é máxima?



101 Uma nódoa circular de tinta é detectada sobre um tecido. O comprimento, em centímetros, do raio dessa nódoa, t segundos após ter sido detectada, é dado por

$r(t) = \dfrac{1+4t}{2+t}\ (t \geq 0)$

1. Calcule r(0) e $\lim\limits_{x \to +\infty} r(t)$ e diga qual é o significado físico destes valores.

2. Esboce o gráfico de r, tendo já em conta que, no domínio indicado, a função r tem primeira derivada positiva e a segunda derivada negativa.

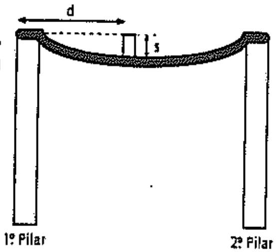
3. Diga qual é o significado do $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{r(t) - r(0)}{t}$ e determine-o.

4. Calcule, com aproximação à décima de segundo, o instante t para o qual a área da nódoa é igual a $30\ cm^2$.

(Nota: Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve no mínimo duas casas décimais)

Prova modelo – 1997

102 Uma viga de aço com 255 decímetros de comprimento está assente sobre dois pilares com 150 decímetros de altura cada.
Quando, a d decímetros do primeiro pilar, se coloca um peso de 115 kg sobre a viga, esta sofre uma depressão de valor s (em dm) que nos é dada pela função assim definida:



$$s(d) = 8{,}5 \times 10^{-7}\, d^2 (255 - d)$$

1. Entre que valores pode variar d?

2. Recorrendo à calculadora, determine a que distância do 1.º pilar se deve colocar o peso para que a depressão seja de 1 dm.
   Aproxime o resultado ao centímetro.

3. Qual é o maior valor que a depressão pode tomar? A que distância do primeiro pilar deve ser colocado o peso para que isso aconteça?

Matemática 12.º ano

Infinit
12

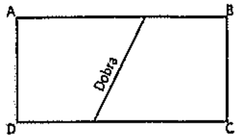
VOLUME 3

Ana Maria Brito Jorge
Conceição Barroso Alves
Graziela Fonseca
Judite Barbedo

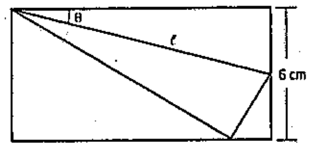
AREAL
EDITORES

2 Depois de dobrada uma folha de papel rectangular, o vértice A coincide com o vértice C.
Calcule o comprimento do vinco sabendo que

$\overline{AB} = 24$ cm e $\overline{AD} = 18$ cm



3 Uma folha de papel rectangular com 6 cm de largura é dobrada de modo que um dos cantos vai sobrepor-se ao lado oposto, conforme ilustra a figura.
Apenas uma das expressões seguintes representa o comprimento ℓ da dobra em função de θ.



Diga qual delas:

$6 \operatorname{tg} \theta$; $\dfrac{3}{\operatorname{sen}\theta \cos^2\theta}$; $\dfrac{6}{\operatorname{sen}^2\theta \cos\theta}$; $\dfrac{3}{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}$; $\dfrac{3}{\operatorname{sen}^3\theta}$

Note que: $\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

4 *Maré* é, como se sabe, o movimento periódico de subida e descida (aproximadamente duas vezes por dia) do nível das águas do mar.
A expressão abaixo representa a variação M da maré na baía de Boston, desde as 0 às 24 horas de um determinado dia

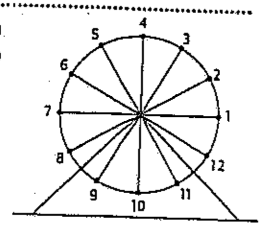
$M(t) = 4{,}5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{5\pi}{3}\right) + 7{,}5$ com t em horas e M em metros

a) Qual o valor (exacto) de M às 2 horas da manhã?
b) Entre que valores variou M nesse dia?
c) A que horas ocorreu nesse dia a baixa-mar? E a preia-mar?
d) Apresente um valor aproximado às centésimas da velocidade (em metros por hora) da subida do nível da água ao meio-dia.

5 Um navio encontra-se atracado num porto.
A distância h, de um dado ponto do casco do navio ao fundo do mar, varia com a maré.
Admita que h é dada, em função do tempo x, por $h(x) = 10 - 3\cos(2x)$.
A distância desse ponto do casco ao fundo do mar, no momento da maré-alta, é
(A) 4 (B) 10 (C) 13 (D) 16

(Exame Nacional 2.ª fase, 1997)

6 Uma roda gigante de um parque de diversões tem doze cadeiras, numeradas de 1 a 12, com um lugar cada uma (ver figura ao lado). Seis raparigas e seis rapazes vão andar na roda gigante e sorteiam entre si os lugares que vão ocupar.



1. Qual é a probabilidade de rapazes e raparigas ficarem sentados alternadamente, isto é, cada rapaz entre duas raparigas e cada rapariga entre dois rapazes? Apresente o resultado na forma de percentagem.

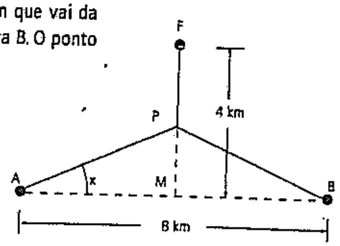
2. Depois de todas as pessoas estarem sentadas nas respectivas cadeiras, a roda gigante começa a girar. Um dos rapazes, o Manuel, ficou sentado na cadeira número 1. No instante em que a roda gigante começa a girar, a cadeira 1 está na posição indicada na figura acima.
Admita que a distância d, em metros, da cadeira 1 ao solo, t segundos após a roda gigante ter começado a girar, é dada por

$$d(t) = 7 + 5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{30}\right)$$

a) Determine a distância a que a cadeira número 1 se encontra do solo no instante em que a roda gigante começa a girar.
b) Esboce o gráfico da função d, para $t \in [0, 75]$.
Assinale as coordenadas dos pontos correspondentes aos extremos da função.
Da análise ao gráfico, indique quanto tempo demora o Manuel a dar uma volta completa.
c) Resolva a equação $d(t) = 9{,}5$ para $t \in [0, 75]$.
Indique, justificando, quanto tempo demora o Manuel a encontrar-se pela primeira vez a uma distância de 9,5 metros do solo, depois de a roda gigante ter começado a girar.
d) Indique, justificando, qual é o comprimento do raio de a roda gigante.

(Exame Nacional 2.ª chamada, 1997)

7 Duas povoações, A e B, distanciadas 8 km uma da outra, estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em F.
Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura ao lado. A canalização é formada por três canos: um que vai da fonte F até um ponto P e dois que partem de P, um para A e outro para B. O ponto P está a igual distância de A e de B.
Tem-se ainda que:
- o ponto M, ponto médio de [AB], dista 4 km de F;
- x é a amplitude do ângulo PAM $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$.



a) Tomando para unidade o quilómetro, mostre que o comprimento total da canalização é dado por

$$g(x) = 4 + \frac{8 - 4\,\text{sen}\,x}{\cos x}$$

(Sugestão: comece por mostrar que $\overline{PA} = \frac{4}{\cos x}$ e que $\overline{FP} = 4 - 4\,\text{tg}\,x$)

b) Calcule g(0) e interprete o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

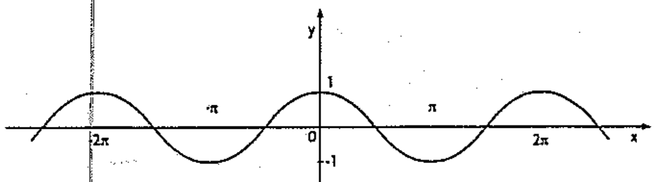
c) Determine o valor de x para o qual o comprimento da canalização é mínimo.

(Exame Nacional 1.ª chamada, 1998)

8 Considere a função real de variável real assim definida:

$$f(x) = 1 + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

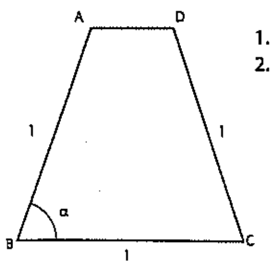
1. O gráfico seguinte representa a função co-seno. Construa a partir dele o gráfico de f.



2. Calcule $f\left(\frac{7\pi}{2}\right) - f\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

3. Determine o contradomínio da função dada.
4. Determine uma expressão geral dos zeros da função.
5. Averigue se $f(x + k2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ com $k \in \mathbb{Z}$. O que pode concluir?
6. Determine os números reais x que satisfazem a condição $f(x) \geq 0$.

9 Considere a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}\,(x) - \frac{1}{2}\text{sen}\,(2x)$



1. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine f'(0).
2. [ABCD] é um trapézio isósceles; os lados [AD] e [BC] são paralelos.

• $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$
• $\overline{AD} \leq 1$

Seja α a amplitude do ângulo ABC

$\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

a) Mostre que, para cada $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, a área do trapézio é igual a f (α).

b) Determine $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interprete geometricamente o resultado obtido, caracterizando o quadrilátero que se obtém para $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

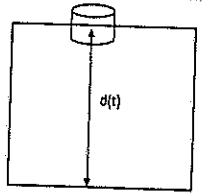
(Prova Modelo, 1999)

Obs. Atenda a que
$\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha$
$\text{sen}\,(2\alpha) = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$

10 Uma rolha flutua num lago, movendo-se para cima e para baixo.
A distância d(t) do fundo do lago ao centro da rolha no instante $t \geq 0$ é dada por

$$d(t) = \cos \pi t + 12,$$

com d(t) expresso em metros e t em segundos.

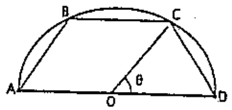


1. Em que instantes é a distância da rolha ao fundo do lago igual a 11,5 m?
2. Entre que valores varia a distância da rolha ao fundo do lago?
3. O movimento da rolha é periódico; qual é seu período positivo mínimo? Prove que assim é.
4. Determine o valor exacto da velocidade da rolha quando

a) $t = \frac{7}{6}$ s   b) $t = \frac{17}{3}$ s

?? 5. Em que intervalos de tempo é que a rolha sobe?

11 A secção de um túnel é um semicírculo com 1 hm de raio.
?? No interior do túnel há uma estrutura com a forma de trapézio, como mostra a figura.
Qual é o valor de θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ que torna máxima a área da secção da estrutura trapezoidal?



12 Recorrendo às regras de derivação, caracterize a função derivada em cada um dos casos seguintes:

1. $f(x) = x^2\,\text{sen}\,x$
2. $f(x) = 5x\cos 3x$
3. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$
4. $f(x) = \frac{x}{\text{sen}\,x}$
5. $f(x) = \frac{\text{tg}\,x}{1 + x^2}$
6. $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2x}$
7. $f(x) = (\cos x + \text{sen}\,x)^2$
8. $f(x) = \frac{1}{\text{sen}\,x\cos x}$

13 Considere as funções reais de variável real:

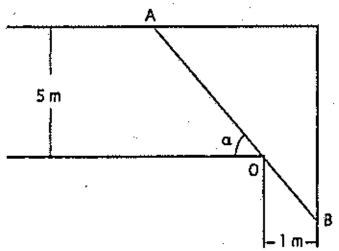
$f(x) = x + 2\,\mathrm{sen}\,x$

$g(x) = x + \cos x$

$h(x) = x + \mathrm{tg}\,x$

Determine, para cada uma das funções dadas, as abcissas de todos os pontos do gráfico em que a recta tangente é horizontal.

14 Na figura está representado um corredor de um museu



Considere a recta que passa por O, sendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e que encontra as paredes em A e B.

1. Exprima $\overline{OA}$ em função de α.

2. Exprima $\overline{OB}$ em função de α.

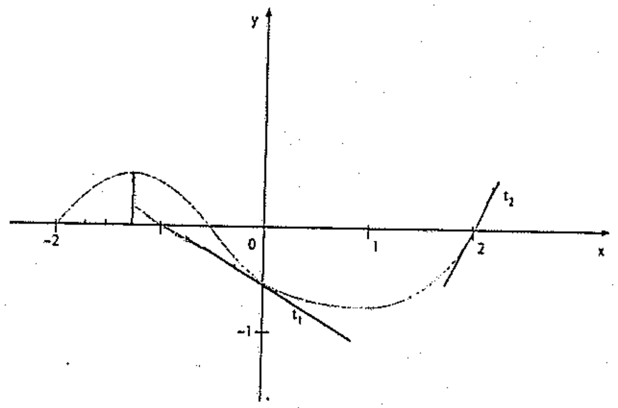
3. a) Faça $\overline{AB} = f(\alpha)$ e mostre que $f(\alpha) = \frac{5}{\mathrm{sen}\,\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}$

b) Determine a função derivada de f em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e deduza recorrendo à calculadora um valor aproximado α_0 de α para o qual f admite extremo.

c) Calcule o valor de $\overline{AB}$ para $\alpha = \alpha_0$.

d) Pretende-se transportar naquele corredor um painel, em posição vertical. Quais as consequências práticas que se podem tirar do estudo feito nas alíneas anteriores?

15 A figura representa uma parte da representação gráfica da função f derivável em ℝ.



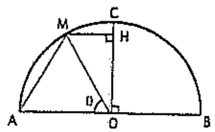
Recorrendo ao gráfico:

1. Resolva a equação $f'(x) = 0$ em $[-2, 2]$.

2. Determine o valor de $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h)}{h}$

3. Determine $f'(0)$ e a equação reduzida de t_1.

16 $\mathcal{C}$ é uma semicircunferência de diâmetro [AB], de centro O e de raio r.
[OC] é o raio perpendicular a [AB]. M é um ponto do arco AC. Designa-se por θ a medida em radianos do ângulo AOM $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$.
H é a projecção ortogonal de M sobre OC.
Existirá um ponto M tal que $\overline{AM} = \overline{MH}$?



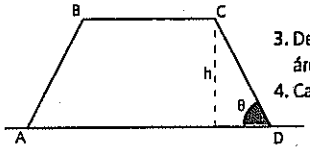
Sugestão:

a) Exprima $\overline{AM}$ e $\overline{MH}$ em função de r e θ.

b) Estude a função g definida em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ por $g(\theta) = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} - \cos\theta$ e deduza a existência de um ponto M tal que $\overline{AM} = \overline{MH}$.

?? c) Dê um enquadramento de amplitude 10^{-1} de $A\hat{O}M$ correspondente a esta posição de M.

20 A pedido de um dos clientes, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima, com a forma de um trapézio, em que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2$ dm.
Designando por θ a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC,



1. Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior em função de θ;
2. Prove que a área $A(\theta)$ do trapézio é dada, em dm², por
$$A(\theta) = 4 \operatorname{sen} \theta + 2 \operatorname{sen} 2\theta;$$
3. Determine o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima e calcule essa área;
4. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \frac{A(\theta)}{\theta}$.

(Prova de Aferição, Época Normal, 1994)

Obs. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$
$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

21 Considere a função real de variável real assim definida
$$h(x) = 1 - x + \operatorname{sen} 2x$$

1. Calcule, se existir, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{h(x) - 1}{x}$.
2. Estude a monotonia de h no intervalo $[0, \pi]$.
3. Mostre que a equação $h(x) = 0$ tem uma única solução x_0 em $[0{,}5;\ 2]$ e determine um valor aproximado de x_0, por defeito, a menos de uma centésima.

(Prova de Aferição, Época Especial, 1.ª chamada, 1994)

Nos exercícios 22. a 32. deverá escolher a resposta correcta entre as quatro alternativas que são indicadas no enunciado.

22 Considere a função real de uma variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

no intervalo fechado $[-5,\ 4]$.

(A) O máximo de f é igual a 2 e f não tem mínimo.
(B) f não tem máximo e o mínimo de f é igual a -2.
(C) O máximo de f é igual a 2 e o mínimo de f é igual a -2.
(D) O máximo de f é igual a 2 e o mínimo de f é igual a -10.

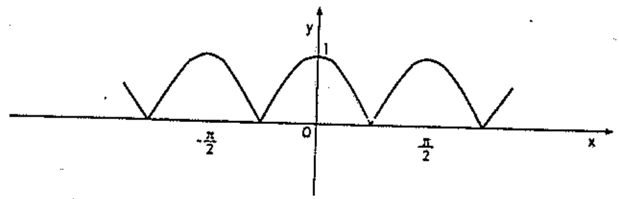
(Prova Específica, Época Normal, 1993)

23 As coordenadas do ponto de intersecção do eixo dos XX com a tangente ao gráfico da função real de variável real, definida por $y = \cos x - \operatorname{sen}^2 x$, no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$ são:

(A) $\left(\frac{\pi}{2} - 1, 0\right)$
(B) $\left(-1 - \frac{\pi}{2}, 0\right)$
(C) $(-1, 0)$
(D) $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

(Prova Específica, Época Especial, 1993)

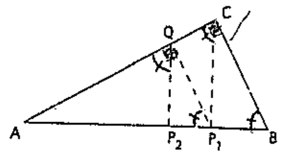
24 O gráfico



pode ser uma representação geométrica da função f, real de variável real definida por:
(A) $f(x) = |\cos 2x|$
(B) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$
(C) $f(x) = \operatorname{sen} |2x|$
(D) $f(x) = \cos |x|$.

(Prova Específica, Época Normal, 1994)

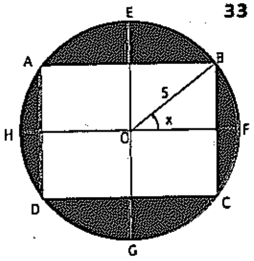
25 Seja [ABC] um triângulo rectângulo em C e tal que $\overline{BC} = a$.
Considerem-se os pontos P_1, P_2 e Q, definidos do seguinte modo:
P_1 é o ponto de [AB] tal que $[CP_1]$ é ortogonal a [AB];
Q é o ponto de [AC] tal que $[P_1Q]$ é ortogonal a [AC];
P_2 é o ponto de [AB] tal que $[QP_2]$ é ortogonal a [AB].



Então,
(A) $\overline{P_1P_2} = a \operatorname{sen} B \cos^2 B$
(B) $\overline{P_1P_2} = a \operatorname{sen}^3 B$
(C) $\overline{P_1P_2} = a \operatorname{sen}^2 B \cos B$
(D) $\overline{P_1P_2} = a \cos^3 B$

(Prova Específica, Época Normal, 1994)

33 A figura ao lado representa um canteiro de forma circular com 5 m de raio.
O canteiro tem uma zona rectangular, que se destina à plantação de flores, e uma zona relvada, assinalada a verde na figura.



Os vértices A, B, C e D do rectângulo pertencem à circunferência que limita o canteiro.
Na figura estão também assinalados:
- dois diâmetros da circunferência [EG] e [HF], que contêm os pontos médios dos lados do rectângulo
- o centro O da circunferência
- o ângulo BOF, de amplitude x $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

a) Mostre que a área (em m²) da zona relvada é dada, em função de x, por

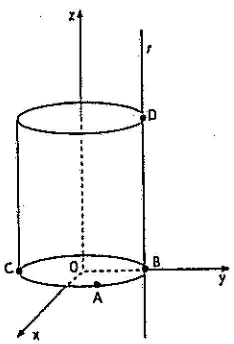
$$g(x) = 25\pi - 50 \operatorname{sen}(2x)$$

b) Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que existe um valor de x compreendido entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{4}$ para o qual a área da zona relvada é 30 m²

Obs.: sen 2x = 2 sen x cos x.

(Exame Nacional, 1998)

34 Considere num referencial o. n. Oxyz, um cilindro de revolução como o representado na figura junta.



A base inferior do cilindro tem centro na origem O do referencial e está contida no plano xOy.
[BC] é um diâmetro da base inferior, contido no eixo Oy, o ponto C tem coordenadas (0, −5, 0).
O ponto A pertence à circunferência que limita a base inferior do cilindro e tem coordenadas (4, 3, 0).
A recta r passa no ponto B e é paralela ao eixo Oz.
O ponto D pertence à recta r e à circunferência que limita a base superior do cilindro.

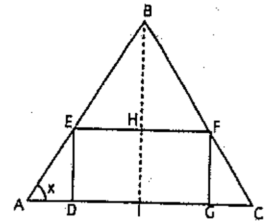
a) Justifique que a recta AC é perpendicular à recta AB.
b) Escreva uma equação vectorial da recta r.
c) Justifique que $\overrightarrow{AC}$ é um vector perpendicular ao plano ABD.
Determine uma equação deste plano.
d) Designando por α a amplitude, em radianos, do ângulo BOD, mostre que o volume do cilindro é dado por $V(\alpha) = 125\pi \operatorname{tg} \alpha$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Determine $\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} V(\alpha)$ e interprete o resultado obtido.

Obs.: Volume do cilindro = Área da Base × Altura

(Exame Nacional, 1997)

35 Na figura
- o triângulo [ABC] é isósceles ($\overline{AB} = \overline{BC}$)
- [DEFG] é um rectângulo
  $\overline{DG} = 2$
  $\overline{DE} = 1$
- x designa a amplitude do ângulo BAC



a) Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada, em função de x, por

$$f(x) = 2 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

(Nota: pode ser-lhe útil reparar que $B\hat{E}F = B\hat{A}C$)

b) Mostre que $f'(x) = \frac{-\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}$ (f' designa a derivada de f).

c) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo [ABC] é mínima.

Obs. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

(Exame Nacional, 2.ª fase, 1998)

36 Uma população de ovelhas é dada pela função P(t) assim definida

$$P(t) = 4000 + 500 \operatorname{sen}\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

em que o tempo t é medido em anos.

a) Como é que essa população varia com o tempo? Esboce o gráfico de P(t) para um ano.

b) Use o gráfico para decidir em que época do ano a população está no máximo. Qual é este máximo?
Existe um mínimo? Em caso afirmativo, onde se localiza?

c) Use o gráfico para decidir em que momento a população está a crescer de modo mais rápido. E quando decresce mais rapidamente?

d) Obtenha uma estimativa aproximada da velocidade com que a população varia no 1.º dia de Julho.

(adaptado de *Cálculo*, vol. 1, de Deborah Hughes e outros)

39 Os dados seguintes representam a média da temperatura em cada mês em Indianapolis, segundo a *U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration*.

Mês, x	Média da temperatura mensal (ºF)
Janeiro, 1	24,2
Fevereiro, 2	28,4
Março, 3	32,7
Abril, 4	39,7
Maio, 5	47,0
Junho, 6	53,0
Julho, 7	56,0
Agosto, 8	55,0
Setembro, 9	49,4
Outubro, 10	42,2
Novembro, 11	32,0
Dezembro, 12	27,1

1. Utilize a calculadora para desenhar a nuvem de pontos

2. Sem utilizar a calculadora, encontre a função sinusoidal que melhor se aproxima dos pontos dados e tenha a forma
$$y = A \operatorname{sen}(w x - \phi) + B$$

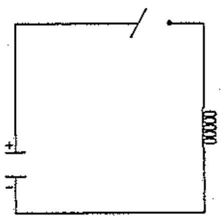
3. Trace o gráfico da função que encontrou.

4. Use a regressão sinusoidal para encontrar a equação que melhor se ajusta.

5. Desenhe o gráfico dessa função.

(adaptado de *Precalculus* – Prentice Hall)

40 Ao carregarmos uma bobina por meio de um condensador, a voltagem V (em volts) que atravessa o interruptor aproxima-se gradualmente do zero com o tempo t.
A equação que relaciona V e t é
$$V(t) = e^{-1,9t} \cos(\pi t) \qquad 0 \leq t \leq 3$$



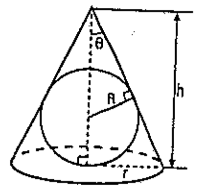
1. Esboce o gráfico de V(t)

2. Em que instantes o gráfico de V(t) "toca" o gráfico de $y = e^{-1,9t}$?
E o de $y = -e^{-1,9t}$?

3. Quando se encontra a voltagem entre −0,1 e 0,1 volts?

4. Suponha que se fazia uma extensão a $\mathbb{R}$ da função considerada.
Essa função terá assímptotas?

41 Um desenhador de peças de arte decorativas projecta pôr no mercado esferas de cobre dentro de cones de cristal transparentes.
Cada esfera tem raio R e será comercializada num cone com base de raio r e altura h (ver figura).
Muitos cones poderão ser fabricados tendo diferentes ângulos θ.



1. Exprima o volume V de cada cone em função do ângulo θ.

2. Que valor deve ser escolhido para θ de modo que o cone a ser fabricado tenha volume mínimo? (Esta escolha minimiza a quantidade de cristal a gastar e dá o máximo destaque à esfera lá introduzida.)

42 Considere os números complexos:
$$z = 1 - 2i \quad \text{e} \quad w = -5 + 3i$$
e escreva na forma a + bi os números complexos seguintes:

1. $z + w$ 2. $4z - 5w$
3. $z \cdot w$ 4. $\dfrac{z}{w}$
5. $z^2 - \dfrac{1}{z}$ 6. $\dfrac{2}{z^3}$

43 Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

1. $(3 - 4i)\, z = 2 + i$

2. $(1 - i)\, z + 3 + 4i = 5 - 2iz$

3. $(1 - i)^2 \cdot \bar{z} = 3 - 2i$

4. $z^2 - 10z + 74 = 0$

44 $P(z) = 2z^4 - 3z^3 + 6z^2 - 12z - 8,\ z \in \mathbb{R}$

1. Determine os números reais a, b e c tais que, para todo o número complexo z,
$$P(z) = (z^2 + 4)(az^2 + bz + c)$$

2. Resolva em $\mathbb{C}$, a equação $P(z) = 0$

Título
Funções 3
Parte 2
Matemática 12.º ano

Autora
Maria Augusta Ferreira Neves

Editora
Porto Editora

Colaboração
Luís Guerreiro
Amélia Guerreiro

Ilustração
Ana Lopes

PORTO EDITORA
Rua da Restauração, 365
4099-023 Porto - Portugal
Telefone (351) 22 608 83 00
Fax (351) 22 608 83 01
E-mail: pe@portoeditora.pt
www.portoeditora.pt

Contribuinte n.º PT 500 221 103
Soc. Matric. CRC Porto n.º 11254
Cap. Social EUR 3 400 000

Livrarias

Rua da Fábrica, 90
4050-246 Porto - Portugal
Telefone (351) 22 200 76 49

Praça de D. Filipa de Lencastre, 42
4050-259 Porto - Portugal
Telefone (351) 22 200 76 81

e na Internet em:
www.webboom.pt

Distribuidores

Zona Centro

Livraria Arnado, Lda.
Rua de Manuel Madeira, 20 - Pedrulha
3020-303 Coimbra - Portugal
Telefone (351) 239 49 76 90
Fax (351) 239 49 70 91

Livraria
R. de João Machado, 9
3000-226 Coimbra - Portugal
Telefone (351) 239 83 39 28

Zona Sul

Emp. Literária Fluminense, Lda.
Av. do Almirante Gago Coutinho, 59-A
1700-027 Lisboa - Portugal
Telefone (351) 21 843 09 00
Fax (351) 21 843 09 01

Livraria
Av. do Almirante Gago Coutinho, 59-D
1700-027 Lisboa - Portugal
Telefone (351) 21 843 09 00

Maria Augusta Ferreira Neves

FUNÇÕES 3

Matemática · 12.º Ano
Parte 2

Colaboradores:
António Machado e Moura
Professor Catedrático
Albino Pereira
Professor Ens. Secundário
Conceição Valente
Professora Ens. Secundário
Luís Guerreiro
Professor Ens. Secundário

PORTO EDITORA

7) Concavidades e pontos de inflexão

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\ ;\quad f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\times x^2-2x\,(1-\ln x)}{x^4}\ ;$$

$$f''(x)=\frac{-3+2\ln x}{x^3}\ ;\quad f''(x)=0 \iff x=e^{\frac{3}{2}}$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2}\,e^{-\frac{3}{2}}$$

O ponto $P \rightarrow \left(e^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ é o único ponto de inflexão.

8) Assimptotas

Verticais

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x\times\frac{1}{x}\right)=(-\infty)\times(+\infty)=-\infty$$

A recta $x=0$ é assimptota vertical.

Não verticais

$$y=mx+b\ ;\quad m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\quad \text{e}\quad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]$$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{x}\right)=0\times 0=0$$

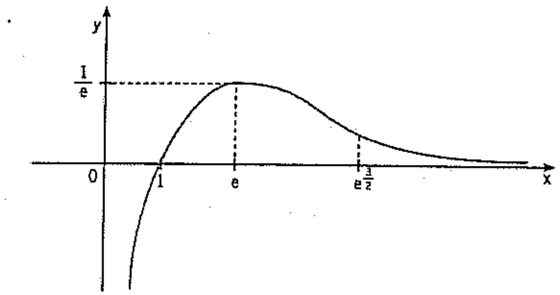
$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

A recta $y=0$ é assimptota horizontal.

Como para $x>1$, $\ln x>0$, vem:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+ .$$

9) Gráfico e contradomínio



$$D'_f=\left]-\infty,\ \frac{1}{e}\right]$$

15. Estude cada uma das seguintes funções:

15.1 $f(x)=x\ln x$;

15.2 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$;

15.3 $f(x)=x-\ln x$;

15.4 $f(x)=x^2\ln x$;

15.5 $f(x)=x\ln^2 x$;

15.6 $f(x)=x-2+\ln x$;

15.7 $f(x)=\dfrac{x}{1-\ln x}$.

5.9 PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

Muitos fenómenos de física, economia, sociologia e muitas outras ciências têm como modelo matemático fórmulas do tipo:

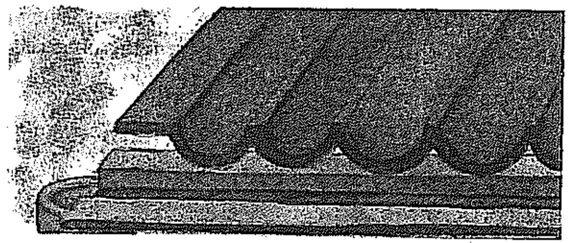
$f: x \rightarrow y=f(x)$

Em muitos casos pretende-se determinar os "valores óptimos" para responder a uma dada situação.

A resposta é muitas vezes dada determinando os extremos de uma função.

EXEMPLO 12 A caleira de capacidade máxima

Uma folha rectangular de metal com 28 m de largura vai ser utilizada para construir uma caleira.

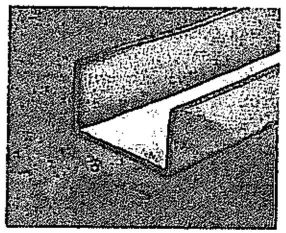


Pretende-se dobrar na perpendicular uma parte de cada lado da folha, de modo a que a capacidade da caleira seja máxima.

Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado?

Resolução

Começa-se por fazer um esquema.



A capacidade da caleira é máxima quando for máxima a área da secção rectangular de dimensões: x e $28-2x$.

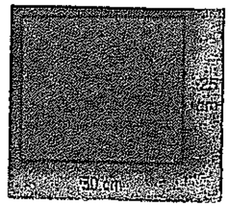
Seja: $f(x)=x\,(28-2x)$

$f(x)=28x-2x^2$; $f'(x)=28-4x$

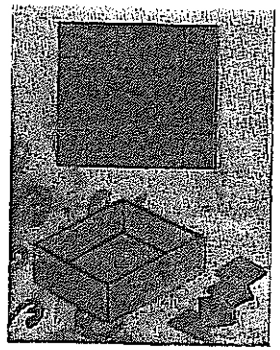
$f'(x)=0 \iff x=7$

$f''(x)=-4$; $f''(7)=-4<0$

16. Uma caixa aberta com a base rectangular vai ser construída de uma folha de cartolina com 25 cm por 30 cm .



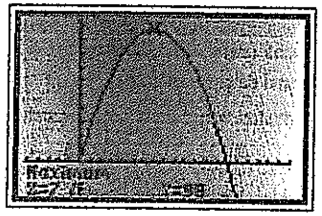
Na folha serão cortados quatros cantos com a forma de um quadrado.
Determine, com aproximação às centésimas, as dimensões dos cantos a cortar de modo a obter-se uma caixa de volume máximo.



A função tem um máximo relativo para $x = 7$.

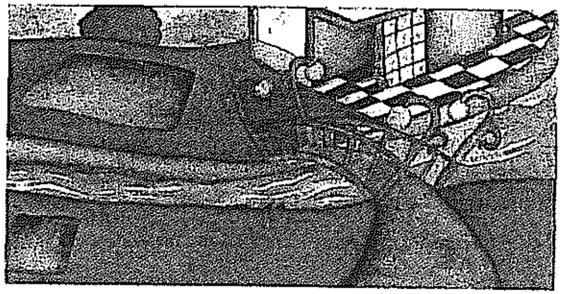
Logo, devem ser dobrados 7 cm de cada lado da folha para que a caleira tenha capacidade máxima.

Confirme-se com a calculadora gráfica.



EXEMPLO 13 As vedações

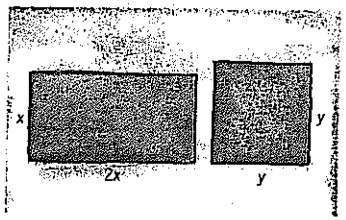
Um agricultor tem 1680 metros de rede para vedar dois terrenos: um rectangular em que o comprimento é o dobro da largura e o outro quadrado, como se mostra na figura seguinte:



Determine as dimensões dos terrenos de modo a maximizar a área dos dois espaços.

Resolução

Vamos fazer um esquema:



1 l = 1 dm^3

17. Uma fábrica de frascos destinados a produtos de conserva pretende o seguinte:

- construir uma embalagem cilíndrica com a capacidade de 48π cm^3;
- a base inferior do cilindro é do mesmo material da superfície lateral que custa 2 euros por m^2;
- a base superior do cilindro é de um material mais caro, que custa 3 euros por m^2.

Supondo que não haverá perdas de material determine, com aproximação às centésimas, a altura e o raio da base do cilindro de modo a minimizar o custo do material gasto.

Área do rectângulo: $A_1 = 2x^2$

Lado do quadrado $y = (1680 - \underbrace{6x}_{\text{Perímetro do rectângulo}}) : 4$

Área do quadrado: $A_2 = y^2$; $A_2 = (420 - 1{,}5x)^2$

Área das duas cercas: $A(x) = 2x^2 + (420 - 1{,}5x)^2$

$A'(x) = 4x + 2(420 - 1{,}5x) \times (-1{,}5)$

$A'(x) = 4x - 3(420 - 1{,}5x)$

$A'(x) = 4x - 1260 + 4{,}5x$

$A'(x) = 8{,}5x - 1260$

$A'(x) = 0 \iff x = \dfrac{1260}{8{,}5} \iff x = 148$ m

$A''(x) = 8{,}5$; $A''(x) > 0$

A função tem um **mínimo** para $x = \left(\dfrac{1260}{8{,}5}\right) > 0$.

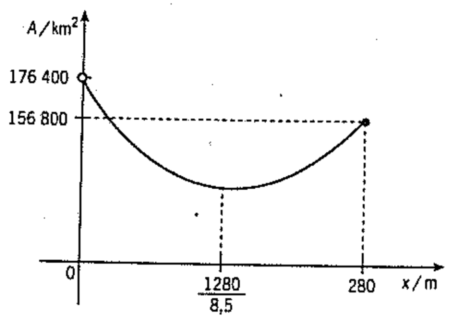
Pretende-se a área máxima, então, vejamos como responder.

Tem-se:

$x \geqslant 0$ e para que o quadrado exista, terá de:

$1680 - 6x \geqslant 0 \iff x \geqslant 280$.

Então

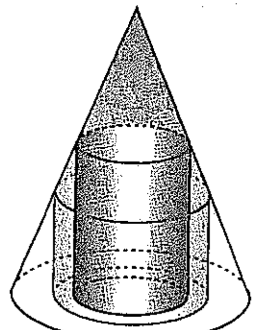


$A(0) = 176\,400$; $A(280) = 156\,800$

A área máxima acontecerá se o agricultor construir apenas um quadrado com 280 metros de lado.

Se pretender os dois espaços deverá construir o rectângulo com as menores dimensões possíveis e o quadrado com as maiores dimensões possíveis.

18. Observe a figura:



Os cilindros e o cone têm a base assente no mesmo plano e as respectivas alturas estão contidas na mesma recta.

O cone tem de altura 60 cm e raio da base 10 cm.

Determine o volume máximo do cilindro que se pode inscrever no cone.

19. Numa fábrica de sapatos, depois de t dias de experiência, um operador numa máquina de montar bicos produz um número n de pares de sapatos dado por:

$$n = \frac{1000}{1 + 5{,}3\ e^{-0{,}13t}} \quad (t \text{ em dias})$$

19.1 Qual é o limite máximo de produção do operador depois de ter muita experiência?

19.2 Determine, com aproximação às centésimas, a razão do crescimento quando $t = 50$ e quando $t = 10$ dias.

19.3 Esboce o gráfico da função e elabore uma pequena composição referindo um valor aproximado para o número de dias que é necessário considerar, de modo a podermos "classificar" o empregado como "empregado com experiência".

EXEMPLO 14 A plantação florestal

Suponhamos que o rendimento V (em milhões de metros cúbicos por are) para uma plantação florestal de idade t é dado por:

$$V = 6{,}7\ e^{-\frac{48{,}1}{t}} \quad (t \text{ em anos})$$

14.1 Calcular V quando $t \longrightarrow +\infty$.

14.2 Calcular $V'(20)$ e $V'(60)$ e interpretar o resultado.

Resolução

14.1 $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(6{,}7\ e^{-\frac{48{,}1}{t}}\right) = 6{,}7 \cdot e^0 = 6{,}7 \times 1 = 6{,}7$.

14.2 $V'(t) = 6{,}7 \cdot \left(-48{,}1 \times \left(-\frac{1}{t^2}\right)\right) e^{-\frac{48{,}1}{t}}$

$$V'(t) = \frac{322{,}27}{t^2}\ e^{-\frac{48{,}1}{t}}$$

$$V'(20) = \frac{322{,}27}{20^2}\ e^{-\frac{48{,}1}{20}}$$

$$V'(20) = 0{,}805675 \cdot e^{-2{,}405}$$

$$V'(20) \approx 0{,}07$$

$$V'(60) = \frac{322{,}27}{60^2}\ e^{-\frac{48{,}1}{60}}$$

$$V'(60) = 0{,}089519 \cdot e^{-0{,}8017}$$

$$V'(60) \approx 0{,}04\,.$$

A função $V = 6{,}7 \cdot e^{-\frac{48{,}1}{t}}$

dá-nos o valor em metros cúbicos de madeira em função do tempo.

A função $V' = \frac{322{,}7}{t^2} \cdot e^{-\frac{48{,}1}{t}}$

dá-nos a "velocidade" de crescimento.

Assim, podemos concluir que essa velocidade é muito menor no ano 60 do que no ano 20 da vida da floresta.

... o que estudou no tema...

- funções monótonas
- extremos de uma função
- a monotonia de uma função e a primeira derivada
- os extremos relativos de uma função e a primeira derivada
- a concavidade e a segunda derivada
- o teste da segunda derivada
- estudo de funções
- problemas de optimização

Resolver um problema de optimização

1. Compreender o problema

Qual é a incógnita? Quais são os valores conhecidos? Quais são as condições a que obedecem as variáveis?

2. Fazer um esquema

Quais são os dados para colocar no esquema?

3. Introduzir símbolos

Como representar as variáveis? Quais as letras mais apropriadas?

4. Exprimir a incógnita em função de uma só variável.

Qual é a variável independente?

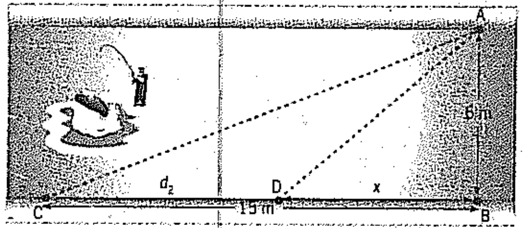
5. Usar métodos analíticos para encontrar a solução.

Quais são os zeros da 1.ª derivada?
Quais são os extremos?

6. Verificar a solução com a calculadora gráfica

PROBLEMAS RESOLVIDOS

Um rio tem 6 metros de largura.



Um pescador encontra-se no local A, numa margem do rio, e pretende ir para C, na outra margem, demorando o menor tempo possível.

A distância de C ao local B, oposto a A, é de 15 m.

A velocidade do pescador na água é de 20 km/h e em terra é de 60 km/h.

Como deve proceder o pescador?

Resolução

De acordo com a figura, o pescador terá de percorrer a distância $d_1 + d_2$ no menor tempo possível.

$d_1 = \sqrt{36 + x^2}$ e $d_2 = 15 - x$

O tempo T de viagem é dado por:

$$T(x) = \frac{\sqrt{36 + x^2}}{20} + \frac{15 - x}{60}.$$

Calcule-se a derivada da função

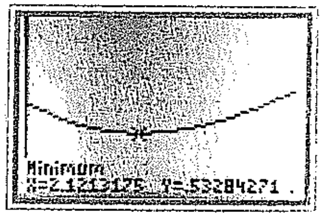
$$T'(x) = \frac{x}{20\sqrt{36 + x^2}} - \frac{1}{60};$$

$$T'(x) = 0 \iff 3x = \sqrt{36 + x^2} \iff x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

x	0		$\frac{3}{\sqrt{2}}$		15
T'		−	0	+	
T		↘	min.	↗	

Como $x > 0$, seja $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

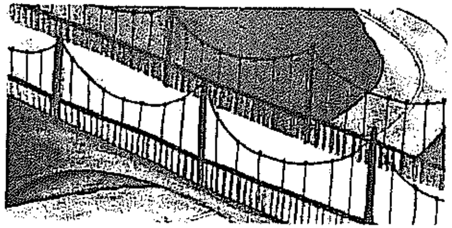
A única solução possível seria o pescador dirigir-se ao ponto D, que dista $\frac{3}{\sqrt{2}}$ km (≈ 2,12 km) do ponto B e em seguida dirigir-se por terra para o ponto C.



Com a calculadora gráfica confirmou-se a solução do problema.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

2 O cabo preso a dois postes



Em certas condições, um cabo preso a dois postes toma a forma do gráfico da função:

$f(x) = 4e^x + e^{-x}$.

Determine a altura mínima do cabo.

(Distâncias em metros)

Resolução

Pretendemos determinar o mínimo da função.

Temos que:

$f(x) = 4e^x + e^{-x}$

$f'(x) = 4e^x - e^{-x}$

Determinando os zeros da derivada vem:

$f'(x) = 0 \iff 4e^x - e^{-x} = 0$.

Fazendo $e^x = t$, vem:

$$4t - \frac{1}{t} = 0 \iff 4t^2 - 1 = 0 \iff t = \pm\frac{1}{2}$$

$t = -\frac{1}{2}$ é impossível porque $e^x > 0$, $\forall x$.

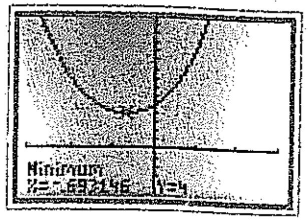
Para $t = \frac{1}{2}$, vem $e^x = \frac{1}{2} \iff x = \ln\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		−	0	+	
f		↘	m	↗	

$f\left(\ln\frac{1}{2}\right)$ = mínimo da função.

$$f\left(\ln\frac{1}{2}\right) = 4e^{\ln\frac{1}{2}} + e^{-\ln\frac{1}{2}}$$

$$f\left(\ln\frac{1}{2}\right) = 4e^{\ln\frac{1}{2}} + e^{\ln 2} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 4$$



Logo, a altura mínima do cabo é 4 m.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

3

Um depósito de água aberto tem a forma de um prisma rectangular com duas faces laterais quadradas.

A área total do depósito (sem tampa) é $54\ m^2$.

Seja x a altura do tanque:

3.1 Mostre que o volume, $V\ m^3$, do tanque é dado por:

$$V = 18x - \frac{2}{3}x^3$$

3.2 Determine x de modo a que o volume seja máximo.

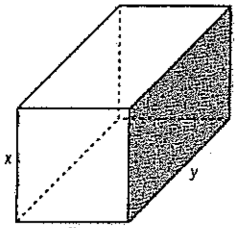
Resolução

3.1 $A_t = 3xy + 2x^2$

$$54 = 3xy + 2x^2 \iff y = \frac{54 - 2x^2}{3x}$$

$$V = x^2 y$$

$$V = x^2\left(\frac{54 - 2x^2}{3x}\right); \quad V = 18x - \frac{2}{3}x^3$$



O volume é dado, em m^3, por:

$$V = 18x - \frac{2}{3}x^3$$

3.2 $V(x) = 18x - \frac{2}{3}x^3$; $\quad V'(x) = 18 - 2x^2$

$$V'(x) = 0 \iff 18 - 2x^2 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = -3 \lor x = 3.$$

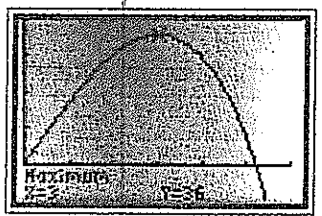
A solução $x = -3$ não serve o problema.

Considere-se: $x = 3$; $\quad V''(x) = -4x$

$V''(18) = -4 \times 3 < 0$

O volume é máximo quando $x = 3$ m.

Confirme-se com a calculadora gráfica:



PROBLEMAS RESOLVIDOS

4 Estudo de uma função

Dada a função real de variável real $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

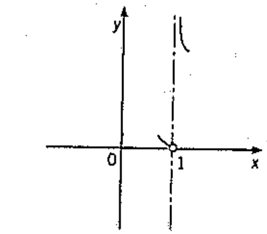
Determine o domínio, as assimptotas, os extremos e os pontos de inflexão.

Confirme as respostas fazendo o gráfico com a calculadora.

Resolução

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Assimptotas verticais

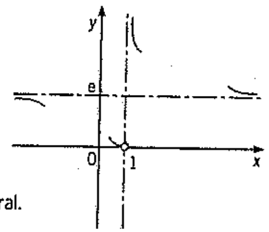


$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} e^{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{x+1}{x-1}} = 0$$

A recta $x = 1$ é assimptota vertical unilateral.

Assimptotas não verticais



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x+1}{x-1}}}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Logo, a recta $y = e$ é assimptota vertical bilateral.

Extremos

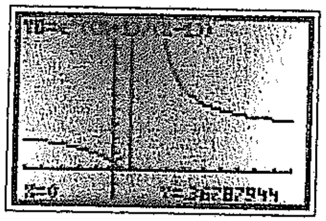
$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$f'(x) < 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

A função é decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$ e não tem extremos.

Pontos de inflexão

$$f''(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{4x}{(x-1)^4}$$



	$-\infty$		0		1		$+\infty$
		−	0	+	s.s.	+	
		⌒	P.I.	◡		◡	

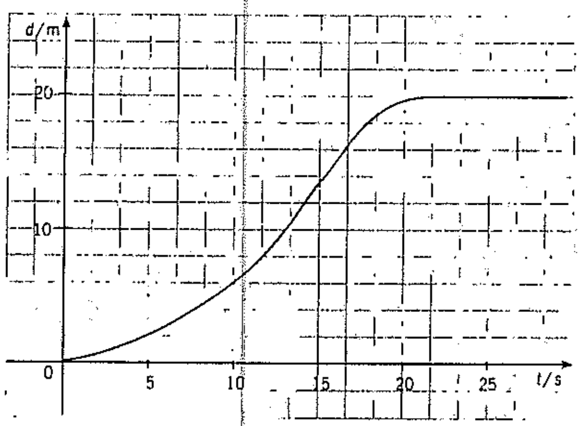
$f(0) = e^{-1}$

O ponto $P(0, e^{-1})$ é o único ponto de inflexão.

PROBLEMAS PROPOSTOS

15 A subida do elevador

O gráfico seguinte mostra a distância ao solo de um elevador numa subida até ao 8.º andar de um prédio.



15.1 Calcule a velocidade média do elevador nos primeiros 5 segundos de movimento.

15.2 Indique um valor aproximado para a velocidade do elevador 5 segundos após o início do movimento.

15.3 Diga, justificando, se a aceleração do movimento do elevador foi sempre aumentando ou sempre diminuindo ou aumentou e diminuiu durante o percurso.

16 O movimento em linha recta

Uma partícula move-se ao longo de uma linha e a distância s, em metros, relativamente à origem das coordenadas é dada, em metros, por:

$$s(t) = \frac{100}{t^2+10} \quad \text{para } t \geqslant 0 .$$

16.1 Calcule a velocidade máxima para a partícula no intervalo $0 \leqslant t \leqslant 10$.

16.2 Qual a direcção do movimento da partícula para $t = 5$ s ?

17 Determinar a e b

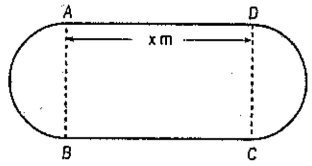
Seja $f(x) = x^2 + ax + b$.

Determine a e b tais que $f(1) = 2$ é um extremo relativo de f em $[0, 5]$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

18 O perímetro mínimo

A figura representa uma superfície constituída por um rectângulo $[ABCD]$ e dois semicírculos de diâmetros $[AB]$ e $[CD]$.



A área do rectângulo é 200 m^2 e $\overline{AD} = x$ m.

18.1 Mostre que o perímetro P m da figura é dado por:

$$P = \frac{200\pi}{x} + 2x$$

18.2 Determine o perímetro mínimo que a figura pode ter.

19 O tanque de superfície mínima

Um tanque com a forma de um cilindro, aberto na parte superior, tem de altura 4 metros e raio r m.

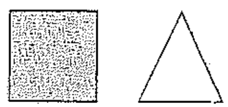
O volume do tanque é 1 m^3.

19.1 Mostre que $h = \frac{1}{\pi r^2}$.

19.2 Sendo S a sua área total interior, mostre que, em m^2, $S = \frac{2}{r} + \pi r^2$.

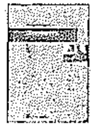
19.3 Determine o valor de r de modo que a área da superfície interior, S, seja a menor possível.

20 O triângulo e o quadrado



Com um arame de 20 m de comprimento fez-se um quadrado e um triângulo equilátero.

Pretende-se minimizar as áreas das duas figuras. Escreva uma curta composição onde explique como deveria ser partido o arame.



Título
Trigonometria
Parte 3

Matemática 12.º ano

Autora
Maria Augusta Ferreira Neves

Editora
Porto Editora

Colaboração
Luís Guerreiro
Albino Pereira

Ilustração
Ana Lúcia

PORTO EDITORA

Rua da Restauração, 343/365
4099-023 Porto . Portugal
Telefone (351) 22 608 83 00
Fax (351) 22 608 83 01
E-mail: pe@portoeditora.pt
www.portoeditora.pt

Contribuinte n.º PT 500 221 103
Soc. quotas CRC Porto n.º 11254
Cap. Social: EUR 1 400 000

Livrarias

Rua da Fábrica, 90
4050-246 Porto . Portugal
Telefone (351) 22 200 76 69

Praça de D. Filipa de Lencastre, 42
4050-259 Porto . Portugal
Telefone (351) 22 200 76 81

e na Internet em:
www.webboom.pt

Distribuidores

Zona Centro

Livraria Amado, Lda.
Rua de Manuel Madeira, 20 (a Pedrulha)
3020 303 Coimbra . Portugal
Telefone (351) 239 49 70 90
Fax (351) 239 49 70 91

Livraria
R. de João Machado, 9
3000-226 Coimbra . Portugal
Telefone (351) 239 83 35 28

Zona Sul

Emp. Literária Fluminense, Lda.
Av. do Almirante Gago Coutinho, 59-A
1700-027 Lisboa . Portugal
Telefone (351) 21 843 09 00
Fax (351) 21 843 09 01

Livraria
Av. do Almirante Gago Coutinho, 59-D
1700-027 Lisboa . Portugal
Telefone (351) 21 843 09 00

Maria Augusta Ferreira Neves

TRIGONOMETRIA

Matemática · 12.º Ano

Parte 3

Colaboradores:

António Machado e Moura
Professor Catedrático

Albino Pereira
Professor Ens. Secundário

Conceição Valente
Professora Ens. Secundário

Luís Guerreiro
Professor Ens. Secundário

PORTO EDITORA

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-\frac{3\pi}{4}}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-\frac{7\pi}{4}}$$

A função tem um máximo relativo igual a $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{7\pi}{4}}$ e um mínimo relativo igual a $-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}}$.

$$f''(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x + \sin x - \cos x)$$

$$f''(x) = 2\, e^{-x} \sin x$$

$$f''(x) = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = 0 \lor x = \pi \lor x = 2\pi$$

x	0		π		2π
f''		+	0	−	
f		∪	P.I.	∩	

A função tem um ponto de inflexão:

$A \curvearrowright (\pi\,,\, -e^{-\pi})$

Para representar o gráfico da função vamos ainda determinar os zeros e $f(0)$.

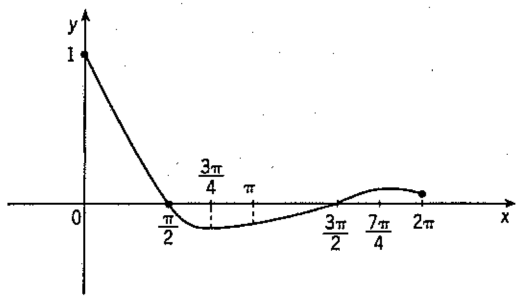
Temos:

$f(0) = e^{-0} \times \cos 0 = 1$.

Zeros:

$$f(x) = 0 \iff \cos x = 0 \iff$$

$$\iff x = \frac{\pi}{2} \lor x = \frac{3\pi}{2}$$



10. Seja a função:

$f(x) = e^x \cos x$

definida em $\left[-2\pi\,,\, \frac{3\pi}{2}\right]$

Determine:

- os extremos;
- os pontos de inflexão;

Esboce o gráfico de f.

EXEMPLO 8 O movimento do objecto

Um objecto move-se ao longo do eixo dos xx. A posição em cada instante t (em segundos) é dada pela função:

$$x(t) = 2 \sin t + t\,,\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Determine o intervalo de tempo em que o objecto se move para a esquerda.

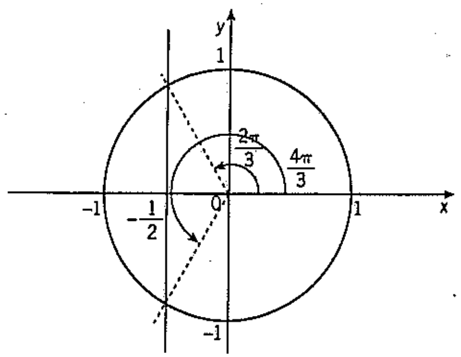
Resolução

O objecto move-se para a esquerda quando a velocidade, v, é negativa.

$$v(t) = x'(t) = 2\cos t + 1$$

$$v(t) < 0 \iff 2\cos t + 1 < 0 \iff$$

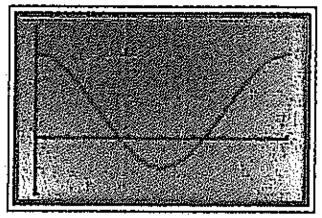
$$\iff \cos t < -\frac{1}{2}$$



$$v(t) < 0 \iff \frac{2\pi}{3} < t < \frac{4\pi}{3}$$

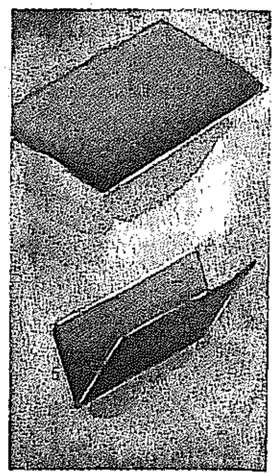
Durante o intervalo $\left]\frac{2\pi}{3}\,,\, \frac{4\pi}{3}\right[$ o objecto move-se para a esquerda.

Confirme-se com a calculadora gráfica.



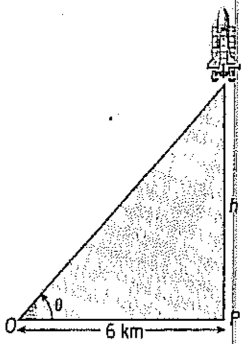
$[0\,,\, 2\pi]$ por $[-2\,,\, 4]$

11. Com uma folha de metal de 30 cm de comprimento e 10 cm de largura fez-se uma caleira como se mostra na figura.



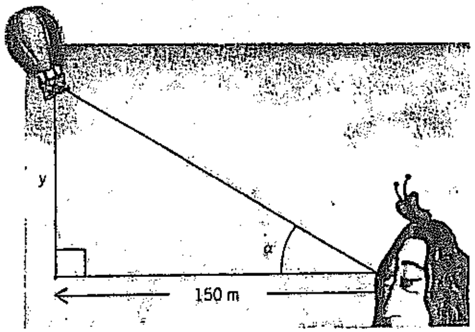
Determine α de modo a maximizar a quantidade de água que a caleira pode comportar.

12. Um foguetão é lançado de um ponto P.
A 6 km de distância encontra-se um observador.



O ângulo θ aumenta 4° por segundo quando $\theta = 45°$. Determine a velocidade do foguetão para $\theta = 45°$.

EXEMPLO 9 A velocidade do balão



Um balão de ar quente sobe na direcção vertical.

A 150 m do ponto de partida observa-se que no momento em que $\alpha = \frac{\pi}{3}$ o ângulo α aumenta e a taxa de variação é 0,1 radianos por minuto. Qual é a velocidade do balão no momento de observação?

$\left(\text{Informação: } y = \operatorname{tg} u\,,\ y' = \frac{u'}{\cos^2 u}\right)$

Resolução

O ângulo α varia em função do tempo t.
A altura y varia em função de α.

Pretende-se conhecer $\frac{dy}{dt}$ no momento em que $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Tem-se:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{150} \iff y = 150 \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{dy}{dt} = 150 \times \frac{1}{\cos^2 \alpha} \times \frac{d\alpha}{dt}$$

Tem-se que

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0{,}1 \text{ quando } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Então no momento em que $\alpha = \frac{\pi}{3}$, tem-se:

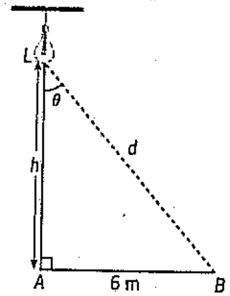
$$\frac{dy}{dt} = 150 \times \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \times 0{,}1$$

$$\frac{dy}{dt} = 60$$

A velocidade do balão, no momento em questão, é 60 m/min.

EXEMPLO 10 Maximizar a iluminação

Observe a figura.



No ponto L está uma lâmpada, situada à distância h do solo.

O ponto B, no solo, dista 6 m do ponto A.

Sabe-se que a intensidade i da iluminação no ponto B é dada por $i(\theta) = k \times \frac{\cos \theta}{d^2}$ (i é directamente proporcional ao $\cos \theta$ e inversamente proporcional ao quadrado da distância, d, da lâmpada ao ponto B.)

Calcule a que distância deve estar a lâmpada do solo de modo a que seja máxima a iluminação no ponto B.

Na figura: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Resolução

$$i(\theta) = k \times \frac{\cos \theta}{d^2}$$

Tem-se ainda que:

$$\sin \theta = \frac{6}{d} \text{ ou } d = \frac{6}{\sin \theta};$$

$$d^2 = \frac{36}{\sin^2 \theta}$$

Então

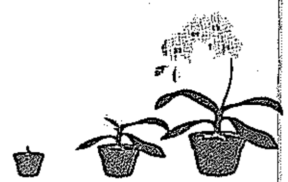
$$i(\theta) = k \times \frac{\cos \theta \times \sin^2 \theta}{36}$$

$$i'(\theta) = \frac{k}{36}(-\sin^3 \theta + 2\cos^2 \theta \sin \theta)$$

$$i'(\theta) = 0 \iff \sin \theta = 0 \lor -\sin^2 \theta + 2\cos^2 \theta = 0$$
$$\iff \sin \theta = 0 \lor \operatorname{tg}^2 \theta = 2$$

Como

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, a solução $\sin \theta = 0 \iff \theta = 0$ não é viável.



13. As plantas não crescem numa razão constante durante o dia.

Considere que o modelo matemático que descreve o crescimento de uma planta é dado por:

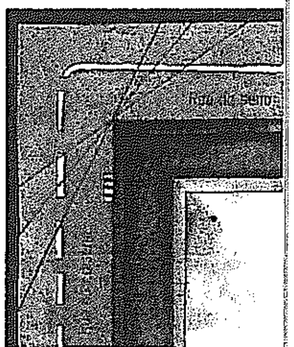
$h(t) = 0{,}03t + 0{,}06 \sin(2\pi t)$

onde h é o crescimento diário da planta em cm , t é o tempo em dias desde que a planta começou a aparecer e $t = 0$ corresponde às 0 horas do 1.º dia.

13.1 Use a calculadora para obter o gráfico da função h .

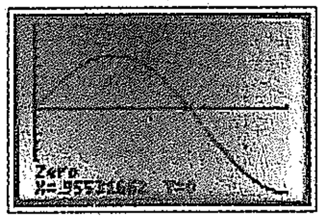
13.2 Calcule a que hora do dia o crescimento é máximo.

13.3 Calcule a que hora do dia o crescimento é mínimo.



A solução que pode ter interesse é a que resulta de $\text{tg}^2\, \theta = 2$.

Com a ajuda da calculadora gráfica vejamos se $i'(\theta)$ tem um zero em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e se $i(\theta)$ tem um máximo (ou seja se $i'(\theta)$ muda de sinal positivo para negativo).



A função $i'(\theta)$ tem um zero a que corresponde um máximo da função. Esse zero é $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ em que $\text{tg}^2\, \theta = 2$.

$\text{tg}\, \theta = \frac{6}{h}$;

$\text{tg}^2\, \theta = \frac{36}{h^2}$;

$h^2 = 18$;

$h = \sqrt{18}$.

A altura a que deve estar a lâmpada é $\sqrt{18}$ m .

EXEMPLO 11 O comprimento do autocarro

Duas ruas formam um ângulo de 90° .

Um autocarro circula numa das ruas e pretende ir para a outra rua.

Uma das ruas tem 4 m de largura e a outra 6 m .

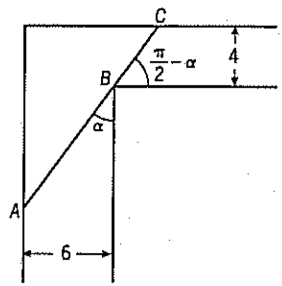
Será que o autocarro dá a volta?

Na resolução do problema não considere a largura do autocarro.

Efectue os cálculos necessários e use derivadas e a calculadora gráfica na sua resolução.

Resolução

Na resolução do problema vamos desprezar a largura do autocarro.



Pretende-se saber qual é o comprimento mínimo de $s = \overline{AB} + \overline{BC}$

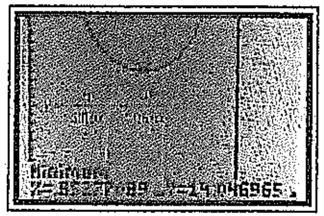
Tem-se:

$\overline{AB} = \frac{6}{\sin \alpha}$ e

$\overline{BC} = \frac{4}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{4}{\cos \alpha}$

$s(\alpha) = \overline{AB} + \overline{BC} = \frac{6}{\sin \alpha} + \frac{4}{\cos \alpha}$

Usando a calculadora gráfica é já possível obter uma resposta aproximada para o comprimento do autocarro.

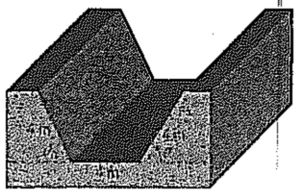


Usando a derivada, vem:

$s'(\alpha) = \frac{6 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{4 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$;

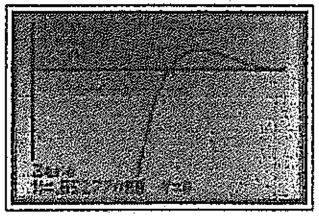
$s'(\alpha) = \frac{-6 \cos^3 \alpha + 4 \sin^3 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$.

14. A secção de um canal de drenagem tem a forma de um trapézio, como se mostra na figura:



De acordo com os dados da figura, calcule a amplitude de θ de modo a que o caudal da água que o canal possa suportar seja máximo.

Vamos usar a calculadora gráfica para saber se s' tem um zero em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e se esse zero é um minimizante de s.



É possível observar que a função derivada muda de sinal, passando de negativa a positiva, o que significa que em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a função dada tem um minimizante.

$s'(\alpha) = 0 \iff$

$\iff -6\cos^3\alpha + 4\sin^3\alpha = 0 \wedge \sin^2\alpha\cos^2\alpha \neq 0$

$s'(\alpha) = 0 \iff \operatorname{tg}^3\alpha = \frac{3}{2}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\ ; \quad \alpha \approx 49° \ (\alpha \approx 0{,}85 \text{ rad})$

$s(\alpha) \approx \frac{6}{\sin(49°)} + \frac{4}{\cos(49°)}$

$s(\alpha) \approx 14 \text{ m}$

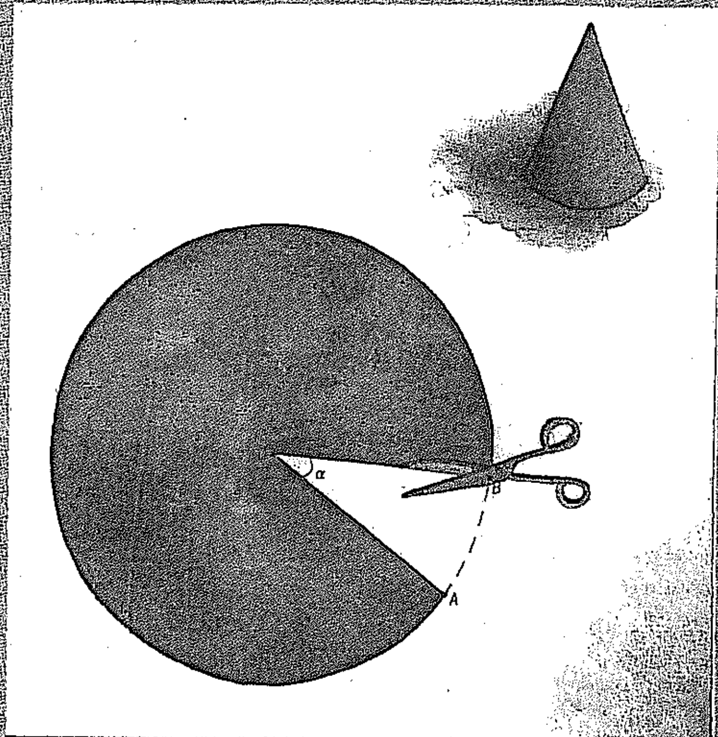
O autocarro terá de ter um comprimento menor do que 14 m para poder dar a volta nas duas ruas.

... o que estudou no tema...

- O estudo intuitivo do $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$
- A derivada das funções:
  $y = \sin x$
  $y = \cos x$
- Aplicação das derivadas das funções trigonométricas

A construção do cone

Com um compasso desenhe um círculo de raio 12 cm.

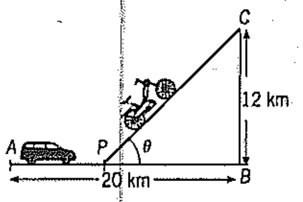


Corte um sector circular cujo ângulo ao centro é α. Unindo [OA] e [OB], construa um cone sem base. Determine α de modo a que o volume do cone seja máximo.

PROBLEMAS PROPOSTOS

17 Minimizar o tempo

Observe a figura.



Para ir de A a C o Vitor terá de usar dois meios de transporte: carro de A a um ponto P de $[AB]$ e de bicicleta de P a C.

De carro a velocidade média é de 60 km/h e de bicicleta é de 10 km/h.

O Vitor quer minimizar o tempo necessário para ir de A a C.

Quantos km deve o Vitor andar de carro?

18 O lançamento do projéctil

Desprezando a resistência do ar, um projéctil lançado com a velocidade inicial v_0 e com um ângulo de inclinação α descreve uma distância na horizontal r dada pela fórmula:

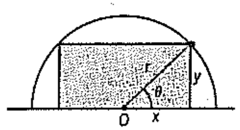
$$r = \frac{1}{4{,}9}\, v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha$$

Determine α de modo a maximizar r.

19 O rectângulo no semicírculo

Observe a figura ao lado.

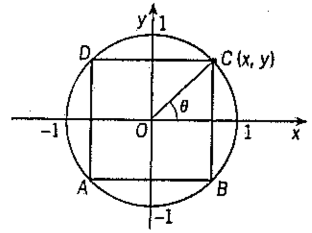
De acordo com os dados na figura, mostre que o rectângulo inscrito num semicírculo de raio r tem área máxima se $x = y = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$.



PROBLEMAS PROPOSTOS

20 O rectângulo no círculo

Com centro na origem do referencial representou-se uma circunferência de raio 1 e um rectângulo.



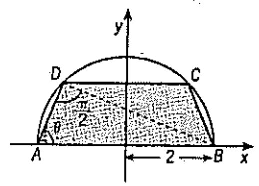
20.1 Escreva uma equação para a circunferência.

20.2 Escreva a área A do rectângulo $[ABCD]$ em função de θ.

20.3 Qual é a área máxima do rectângulo $[ABCD]$?

21 O trapézio no semicírculo

Observe a figura:



Num semicírculo de raio 2 inscreveu-se um trapézio $[ABCD]$ isósceles e de base maior igual ao diâmetro.

Qual é a área máxima do trapézio $[ABCD]$ (com aproximação às décimas)?

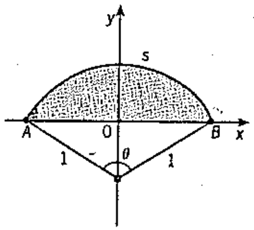
22 A área máxima

Na figura está representado um arco circular de comprimento s e raio 1.

Os pontos A e B, que limitam o arco, pertencem ao eixo das abcissas.

Seja A a área limitada pelo arco e pelo eixo das abcissas.

Mostre que A é máxima quando $\theta = \pi$.



Variáveis	Problemas	PF1	PF2	PF3	PF4	PF5	PF6	PF7	PF8	PF9	SP1	SP2	SP3	SP4	SP5	SP6	SP7	SP8	SP9	Total	Soma	Percentagem
Tipo Problema (T)	TEP										X	X								2	18	11
	TER	X																		1		6
	TEX		X	X	X	X	X	X	X				X	X	X	X	X	X	X	14		78
	TDM									X										1		6
	TR																			0		0
Contexto do Problema (C)	CGM	X			X	X	X	X	X	X	X		X			X				10	18	56
	CGA																			0		0
	CAR		X	X										X	X					4		22
	CRM											X					X	X	X	4		22
	CRF																			0		0
	CRE																			0		0
Função a optimizar (O)	OD																			0	18	0
	OA	X				X	X	X		X	X	X	X			X	X		X	11		61
	OPE				X															1		6
	OV								X									X		2		11
	OPR			X										X						2		11
	OS		X												X					2		11
	OT																			0		0
	OC																			0		0
Esq./ Fig. auxiliares (F)	FSE	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	18	18	100
	FFS																			0		0
	FFD																			0		0
Tipo de dados (D)	DN	X	X	X	X	X	X	X	X		X		X					X		11	18	61
	DG									X		X		X	X	X	X		X	7		39
Tipo de en. (EN)	ENS	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X				X	14	18	78
	ENE												X			X	X	X		4		22
Func./ Eq. auxiliar (A)	AE		X	X	X		X	X		X		X	X	X	X		X		X	12	18	67
	AI	X				X			X		X					X		X		6		33
Noções aplicadas (N)	NTP					X			X		X					X				4	18	22
	ND																	X		1		6
	NSF																			0		0
	NPE	X					X			X			X							4		22
	NAR				X															1		6
	NVO							X				X					X		X	4		22
	NSO		X	X										X						3		17
	NPR														X					1		6
	NF																			0		0
	NFT																			0		0
	NMF																			0		0
Estratégia (E)	EH	X						X					X	X						4	18	22
	EE					X				X	X									3		17
	EM																			0		0
	EN		X	X	X		X		X			X			X	X	X	X	X	11		61
Funções Utilizadas (f)	fp	X	X	X			X		X	X			X	X	X			X		10	18	56
	fr				X			X				X					X		X	5		28
	fir					X					X					X				3		17
	ft																			0		0
Esquema de cálculo (e)	ez																			0	3	0
	ezs	X									X	X								3		100
	ezss																			0		0
	ev																			0		0
	ecg																			0		0
	eo																			0		0
Graf./fig./ esq. Aux. (g)	gn	X									X	X								3	3	100
	gf																			0		0
	gqm																			0		0
	gg																			0		0
Valor pedido (v)	ve		X	X		X				X	X	X	X			X	X	X	X	11	18	61
	vi	X			X		X	X	X					X	X					7		39

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA DE LAS CIÊNCIAS EXPERIMENTALES

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

EVOLUÇÃO HISTÓRICA DOS PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

E O SEU TRATAMENTO NO ENSINO SECUNDÁRIO

PORTUGUÊS NOS SÉCULOS XX E XXI

Tese de doutoramento de

ANA ELISA ESTEVES SANTIAGO

Realizada sob direcção de:

Dr. Modesto Sierra Vázquez

Drª Maria Teresa González Astudillo

Salamanca, 2008

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

FACULDAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

Dr. Modesto Sierra Vázquez, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca.
Dra. Mª Teresa González Astudillo, Profesora Titular de Escuela Universitaria del Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca.

HACEMOS CONSTAR
Que la presente Memoria titulada **"Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no Ensino Secundário português nos séculos XX e XXI"**, ha sido realizada bajo nuestra dirección por Ana Elisa Esteves Santiago y constituye su tesis para optar al grado de Doctor.

Y para que conste y tenga los efectos oportunos ante el Departamento de Didáctica de la Matemática e Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca, lo firmamos el dia   de Junio de 2008

Fdo.: Dr. Modesto Sierra Vázquez   Fdo.: Dra. Mª Teresa González Astudillo

Aos meus pais

Ao meu irmão

Ao Rafael

Agradecimentos

Aos meus professores e directores, Dr. Modesto Sierra Vázquez e Dra. Maria Teresa González Astudillo pelos sábios ensinamentos e pelo constante apoio, empenho e dedicação ao longo deste longo percurso.

Aos directores e funcionários das bibliotecas que consultei, pela disponibilidade prestada.

Aos meus colegas do curso de doutoramento, em especial à Marta, pelo companheirismo e amizade que se sentiu ao longo do curso e pelos bons momentos que passamos.

As amigas Ana Paula Aires e Helena Henriques, pela ajuda e apoio que me foram dando.

Ao Professor José Antunes, pela sua preciosa ajuda ao fazer a revisão de todo o documento, pelos ensinamentos que me foi dando.

A todos os colegas, professores e investigadores que me ajudaram a esclarecer algumas questões.

Aos meus pais e ao meu irmão pelo incentivo à realização do Doutoramento e ao seu constante apoio e motivação ao longo destes anos.

Ao Rafael, pelo constante incentivo, apoio e compreensão e pela ajuda prestada nos problemas que me foram surgindo.

À Lurdes, pela hospitalidade que me fez sentir e por todo o apoio que me deu.

À minha família e amigos, a quem privei da minha companhia ao longo destes anos.

A todos aqueles que de alguma forma me ajudaram e incentivaram, muito obrigado.

INDICE

Anexos

(Em CD)

Cópia dos problemas de optimização analisados

Livros Históricos

- **Anexo 1 :** *Elementos* de Euclides
- **Anexo 2 :***La Collection Mathématique* de Pappus de Alexandrie
- **Anexo 3 :** *Analyse des Infiniment Petits, pour l'intelligence des lignes courbes* de L'Hôpital
- **Anexo 4 :** *Cours de Mathématique* de Bézout
- **Anexo 5 :** *Cours d'Analyse de l´École Polytechnique* de Sturm
- **Anexo 6 :** *Cours de Calcul Différentiel et Intégral* de Serret

Manuais Escolares

- **Anexo 7:** A introdução nos manuais escolares dos problemas de optimização (1954)
- **Anexo 8:** A introdução das matemáticas modernas: A reforma de Veiga Simão (1973)
- **Anexo 9:** A introdução das matemáticas modernas: O período pós revolução
- **Anexo 10:** A reforma de Roberto Carneiro e Lei de Bases do Sistema Educativo de 1986
- **Anexo 11:** A introdução do uso da calculadora gráfica nos programas oficiais: O reajustamento de Marçal Grilo (1997)

INTRODUÇÃO

Esta investigação tem como objectivo a realização de um estudo histórico acerca dos problemas de optimização ao longo de toda a História da Matemática e da História do Ensino da Matemática em Portugal nos séculos XX e XXI.

Ao longo deste texto, entenda-se *problema de optimização* como um problema em que se pretende determinar a solução óptima. Apesar de haver muitos métodos para resolver estes problemas, vamos restringir-nos aqueles quem que intervém duas variáveis relacionadas mediante uma ligação a partir da qual se obtém uma função de uma só variável, definida num intervalo do conjunto dos números reais. Para a sua resolução é necessário: começar por definir a função a optimizar[1]; exprimir essa função em ordem a uma só variável (recorrendo às restrições apresentadas no enunciado do problema); determinar os extremos da função e, por fim, interpretar os resultados face à natureza do problema.

O Ensino da Matemática, ao longo dos tempos, foi sendo sempre influenciado pelos avanços e descobertas que foram surgindo na área da Matemática. Assim, pretendemos, com a realização deste trabalho de investigação, fazer uma análise não só dos livros históricos de Matemática, mas também dos livros didácticos de Matemática para identificar os problemas de optimização presentes nessas obras. Pretendemos também fazer uma análise das formas de demonstração/resolução dos mesmos, bem como verificar quais os tipos de problemas nelas existentes.

Este trabalho foi dividido em quatro capítulos. No primeiro, intitulado *Desenho da Investigação*, começamos por apresentar a definição do problema de investigação. De seguida, expomos os objectivos a que se propõe esta investigação, bem como as hipóteses formuladas, depois indicamos a metodologia adoptada na realização desta investigação, assim como as fases em que se divide o trabalho. Por último, o plano de recolha de dados.

No segundo capítulo, sob o tema *Análise Histórica dos Problemas de Optimização*, explanamos a análise realizada às diversas obras históricas analisadas. Este capítulo

[1] Função de uma só variável

encontra-se dividido em quatro sub-capítulos, dedicando-se cada um deles a um período distinto da História dos problemas de optimização.

No primeiro sub – capítulo, *Período Grego*, descrevemos a análise de duas obras escritas entre o século IV a.C. e o século IV D.C.: os *Elementos*, de Euclides e a obra *La collection mathématique,* de Pappus d'Alexandrie.

No segundo, *Nascimento*, analisamos uma obra do século XVII, *Analyse des infiniment petits,* de L'Hôpital.

No terceiro, *Consolidação*, apreciamos uma obra do século XVIII, *Cours de mathématique,* de Bézout.

No quarto, *Institucionalização*, fazemos a análise de duas obras do século XIX: *Cours de Calcul Differenciel et Integral,* de Serret e *Cours D'Analyse de L'École Polytechnique,* de Sturm.

No terceiro capítulo, *Análise dos Programas Oficiais e dos Manuais Escolares Portugueses do Século XX e XXI*, passamos à análise dos programas oficiais que contemplam o estudo da derivada, bem como dos respectivos manuais escolares. Este capítulo foi dividido em cinco sub-capítulos, correspondendo cada um deles a um período.

No primeiro, *Introdução nos programas oficiais do estudo da derivada*, apresentamos a análise dos programas oficiais em que surgiu pela primeira vez o estudo da derivada. Uma vez que nenhum dos manuais apresenta problemas de optimização, não se efectuou a análise de nenhum manual.

No segundo, *Introdução das aplicações da derivada nos programas oficiais*, apresentamos a análise dos programas oficiais, bem como dos problemas de optimização presentes no manual que vigorava na época como livro único.

No terceiro, *Introdução das Matemáticas Modernas em Portugal*, apresentamos a análise dos programas, bem como de um conjunto de manuais que caracterizam a época.

No quarto, *A Lei de Bases do Sistema Educativo*, apresentamos a análise dos programas oficiais bem como de um conjunto de manuais que caracterizam a época.

No quinto, *Introdução da calculadora gráfica nos programas oficiais*, apresentamos a análise dos programas oficiais, bem como de um conjunto de manuais que caracterizam a época.

No último capítulo, *Conclusões finais*, apresentamos a realização dos objectivos de investigação; as hipóteses de investigação e os resultados; as limitações do trabalho e as implicações para futuras investigações.

Com a realização deste trabalho pretendemos contribuir para uma melhor compreensão da forma como este tipo de problemas surgiu e foi abordado. Iremos também perceber a partir de quando e de que forma estes fizeram parte dos programas oficiais e dos manuais escolares ao longo de todo o século XX e XXI.

1. DESENHO DA INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo, *Desenho da investigação*, iremos começar por apresentar a definição do problema de investigação, os objectivos a que esta se propõe, bem como as hipóteses formuladas e por fim apresentamos a metodologia adoptada na realização desta investigação, as fases em que se divide o trabalho e, finalmente, o plano de recolha de dados.

1.1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE INVESTIGAÇÃO

Uma das aplicações do cálculo de derivadas está na resolução de problemas de optimização.

Antes do uso das calculadoras gráficas, no Ensino Secundário, estes problemas eram abordados depois do estudo das derivadas, ou seja, eram abordados no capítulo do Cálculo Diferencial como uma aplicação deste.

Recentemente, com a introdução do uso das calculadoras gráficas, no Ensino Secundário (a partir dos 15 anos), tornou-se possível a resolução deste tipo de problemas antes do estudo das derivadas.

Uma vez que, em Portugal, não há nenhum estudo deste tipo, com excepção de um trabalho acerca do conceito de derivada no Ensino Secundário, ao longo do século XX, nesta nossa dissertação pretende fazer-se um estudo acerca de quando surgiram na História da Matemática os problemas de optimização e quais os matemáticos que os estudaram, bem como da forma como estes eram trabalhados. Pretende-se, ainda, fazer um estudo histórico acerca da abordagem feita pelos programas oficiais e pelos manuais escolares, dos problemas de optimização, ao longo do século XX e início do século XXI.

1.2. OBJECTIVOS E HIPÓTESES

De seguida irá proceder-se à descrição dos objectivos a que se propõe este trabalho de investigação bem como a descrição das hipóteses.

1.2.1. OBJECTIVOS

Os objectivos a que se propõe esta investigação são:

- Fazer uma análise histórica dos problemas de optimização; ver como e quando surgiram na História da Matemática e ainda quais os matemáticos que os abordaram;

- Verificar quando e de que forma foram introduzidos nos programas oficiais portugueses os problemas de optimização;

- Analisar, em cada plano de estudos, a importância dada à disciplina de Matemática e, dentro desta, a importância dada ao estudo da Análise, mas especificamente ao estudo dos problemas de optimização.

- Analisar como foram abordados: os tipos de problemas propostos pelo Ministério e os tipos de problemas abordados pelos manuais escolares;

- Verificar se os manuais, acerca dos problemas de optimização, vão de encontro às propostas do Ministério;

- Observar qual a alteração sofrida pelos programas, em relação aos problemas de optimização, após a introdução das calculadoras gráficas no Ensino Secundário;

- Contribuir para um melhor conhecimento da História da Análise Matemática em Portugal;

1.2.2. HIPÓTESES

As hipóteses da investigação são:

1. Será que os problemas de optimização surgiram antes do conceito de derivada?

2. Será que as várias fases por que passou o conceito de derivada influenciaram a forma de resolução dos problemas de optimização?

3. Será que em alturas distintas eram abordados distintos tipos de problemas de optimização?

1.3. METODOLOGIA

Vamos agora fazer a descrição da metodologia utilizada na realização deste trabalho, proceder à descrição das várias etapas e ainda referir o plano de recolha dos dados.

1.3.1. METODOLOGIA

Vejamos então a metodologia utilizada.

Uma vez que se trata de um trabalho histórico, começamos por investigar os livros acerca de História da Matemática e depois os livros históricos de Matemática através de vários séculos.

Baseando-nos na classificação das modalidades de investigação, proposta por Bisquerra (1989), podemos dizer o seguinte:

- Quanto ao **processo formal**, utilizamos o raciocínio hipotético – dedutivo;

- Em relação ao **grau de abstracção**, trata-se de uma investigação básica, uma vez que não se pretende estabelecer aplicações práticas a partir do estudo de investigação;

- Quanto à **natureza dos dados**, é uma investigação qualitativa, já que os dados são filtrados pelos critérios do investigador;

- Quanto à **manipulação das variáveis**, é uma investigação descritiva, dado que não se manipula nenhuma variável;

- A respeito da **dimensão cronológica**, é uma investigação histórica, pois descreve fenómenos ocorridos no passado tendo como fontes documentais a legislação e os livros de texto da época;

- Quanto aos **objectivos**, pretende fazer-se a descrição e a explicação de que é objecto no nosso estudo;

- Considerando as **fontes**, trata-se de uma investigação bibliográfica, visto que se irá fazer uma busca, recompilação, organização, valoração e crítica acerca dos problemas de optimização. Em simultâneo trata-se também de uma investigação metodológica, pois explicita uma forma de integrar métodos descritivos, para abordar uma investigação histórica em educação sobre um tema específico de matemática: os problemas de optimização;

- Quanto à **temporização**, trata-se de uma investigação longitudinal porque engloba diferentes períodos da História da Matemática.

1.3.2. ETAPAS DO TRABALHO

As etapas seguidas para a realização desta investigação foram estabelecidas tendo em conta a Metodologia da Investigação Histórica. Segundo Escolano (1984), a História da Educação é uma disciplina histórica especializada num sector da realidade, o sector educativo. Defende ainda que a inclusão da História da Educação no âmbito da ciência histórica, como disciplina sectorial, leva à aceitação de que o seu método deve ser o método histórico, que se realiza nas seguintes fases: heurístico – crítica, hermenêutica e exposição.

Ruiz Berrio (1976) elaborou a seguinte sequência de etapas para realizar as três fases:

1. Delineamento da investigação
   - Definição do problema. Critérios
   - Estado da questão
   - Primeira recolha de fundos documentais
   - Primeira delimitação da investigação

2. Elaboração de uma hipótese ou campo de hipóteses

3. Recolha dos dados ou fase de documentação
   - Selecção e classificação dos documentos

4. Critica dos documentos
   - Critica interna
   - Critica externa ou critica de erudição

5. Análise e interpretação dos documentos

6. Construção ou síntese histórica: explicação histórico – pedagógica

7. Exposição do trabalho de investigação

1.3.3. PLANO DE RECOLHA DOS DADOS E DE TRABALHO

Como se trata de uma investigação histórica, as fontes a utilizar foram essencialmente fontes documentais. Estas foram obtidas em várias instituições:

- Biblioteca Nacional e Bibliotecas Municipais, nomeadamente a Biblioteca Municipal de Coimbra;
- Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra;
- Biblioteca Geral da Universidade de Coimbra;
- Biblioteca Joanina da Universidade de Coimbra;
- Biblioteca da Escola Superior de Educação de Coimbra;
- Biblioteca da Escola Secundária José Falcão;
- Biblioteca e Hemeroteca da Faculdade de Educação da Universidade de Salamanca.

Dado que é um trabalho histórico, começámos por estudar os livros históricos, depois fez-se a análise da legislação referente ao ensino da Matemática ao longo do século XX e XXI, passando a seguir à recolha, análise e classificação dos manuais escolares ao longo do referido século.

Como já referimos, este trabalho foi dividido em duas partes:

- 1ª Parte: Estudo histórico acerca das aplicações das derivadas: Problemas de Optimização.

Nesta parte, levámos a efeito um estudo, através dos livros de História da Matemática e História do Cálculo com o objectivo de identificar os matemáticos que, possivelmente, abordaram nas suas obras os problemas de optimização. Determinando assim as várias fases pelas quais passou o conceito de derivada.

E após a recolha das obras dos matemáticos identificados na pesquisa elaborada, localizámos as obras sobre as quais encontramos referência. Analisámos cada uma das obras encontradas com o objectivo de verificar, se, de facto, os autores abordaram nas suas obras os problemas de optimização.

Por fim, entre todas as obras localizadas que tratam os problemas de optimização, seleccionamos algumas das obras para, então, elaborarmos uma apreciação mais detalhada.

Ao longo da análise dos problemas de optimização, presentes nas obras, procedemos também a uma catalogação dos mesmos, bem como das respectivas demonstrações ou resoluções.

- 2ª Parte: Análise dos planos de estudo e dos manuais escolares.

Nesta parte fizemos uma análise e classificação dos vários planos de estudos que surgiram ao longo do século XX e XXI. Esta fase permitiu verificar quais os planos que abordavam os problemas de optimização e de que forma eram abordados. Analisámos ainda os vários manuais escolares que surgiram para cada plano de estudos, com o objectivo de verificar quais os que abordam os problemas de optimização, verificar em que contexto é foi feita a sua abordagem e classificar estes mesmos problemas. Pretendeu-se ainda verificar se estes iam de encontro ao que é referido nos programas oficiais.

Para tanto, procedemos à recolha de todos os planos de estudo que foram decretados ao longo do século para, posteriormente, os avaliar. Utilizámos também livros de História de Portugal e História do Ensino em Portugal para vermos o enquadramento social, político e económico de cada uma das reformas.

Depois identificámos e localizámos os manuais escolares da disciplina de Matemática que surgiram para cada uma das reformas educativas ao longo de todo o século. Seguidamente seleccionámos algumas destas obras para então fazer a sua análise.

2. ANÁLISE HISTÓRICA DOS PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

Tal como referimos anteriormente, um dos primeiros passos da nossa investigação foi identificar os matemáticos e as obras que abordaram os problemas de optimização. Assim começámos por procurar nos livros de História da Matemática e de História do Cálculo essa mesma informação. Nos livros clássicos da Matemática podemos encontrar informação acerca de quando, de que forma e por quem foram abordados os Problemas de Optimização.

O livro de Boyer (1993), *História da Matemática*, foi um importante ponto de partida uma vez que aí pudemos encontrar informação acerca de quando surgiram os problemas de optimização, bem como referência aos matemáticos que os estudaram. De igual modo foi possível encontrar dados importantes não só acerca da evolução o Cálculo Diferencial como importantes referências bibliográficas que nos permitiram ir de encontro aos clássicos da Matemática que abordam o tema.

Outros livros de História da Matemática que nos permitiram completar a informação recolhida na primeira obra são os seguintes:

- *A history of Mathematics*, de Katz (1993)
- *História Concisa das Matemáticas, de* Struik (1989)
- *The Historical Developmet of the Calculus, de* Edwards (1979)
- *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, de Boyer (1959)

Com base na informação que conseguimos recolher nos livros acima referidos, elaborámos um índice cronológico de autores que desenvolveram estudos na área do Cálculo Diferencial e, por esse motivo, julgamos estarem relacionados com o estudo de problemas de optimização.

A partir do índice cronológico, levamos a efeito uma pesquisa com o objectivo de identificar as obras existentes de cada um dos autores ou acerca dos mesmos. Formámos então uma tabela com todas as obras encontradas. Nessa tabela indicamos as seguintes informações: Autor, data de nascimento e falecimento do autor, título da obra ou obras do autor, ano e local de publicação, edição e por fim a localização da obra.

Indicámos a seguir o índice cronológico e a tabela de autores realizados.

ÍNDICE CRONOLÓGICO

SÉCULO	AUTOR
IV a.C.	EUCLIDES (330-260 a. C.)
I a.C.	PTOLOMEU, Claudio (168-90 a. C.)
IV	PAPPUS, de Alexandrie (290-350)
XVII	FERMAT, Pierre de (1601-1665) NEWTON, Isaac (1642-1727) BERNOULLI, Jacques (1654-1705) VARIGNON, Pierre (1654-1722) BERNOULLI, Jean (1667-1748) LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1646-1716) PASCAL, Blaise (1623-1662) L'HÔPITAL, Guillaume François Antoine de, (1661-1704)
XVIII	BEZOUT, E. (1730-1783) EULER, Leonhard (1707-1783) LAGRANGE, Joseph Louis de (1736-1813)
XIX	LACROIX, Silvestre-François (1765-1843) CAUCHY, Augustin-Louis (1789-1875) STURM, Jacques Charles François (1803 – 1855) SERRET, Joseph Alfred (1819-1885) RIEMANN, Bernhard (1826-1866) LEBESGUE, Henri, (1875-1941)

A. OBRAS ACERCA DO AUTOR

SÉC.	OBRA SOBRE:	AUTOR	TITULO	ANO E LOCAL DE PUBLICAÇÃO	EDIÇÃO
IV a.C.	**EUCLIDES (330-260 a.C.)**	**Thomas L Heath.**	**Elementos de Euclides** **The thirteen books of Euclid's Elements.**	**Lisboa: 1768** **New York: 1956**	 **2ª Ed.**
IV	**PAPPUS, A (290-350)**	**Paul Ver Eecke**	**La collection mathématique / Pappus d'Alexandrie**	**1933 ; Paris**	
XIX	LACROIX,S.F. (1765-1843)	M. Hermité e J. A. Serret	Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral	1874 ; Paris: Gauthier-Villars	8ª Ed

B . OBRAS DO AUTOR

SÉC.	AUTOR	TITULO	ANO E LOCAL DE PUBLICAÇÃO	EDIÇÃO
XVII	BERNOULLI, J. (1667-1748)	Johannis Bernoulli opera omnia. - 4 vols.	1742; Lausannae & Genevae	
	L'HÔPITAL, G. (1661-1704)	**Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes**	**1716 ; Paris**	**2ª Ed.**
XVIII	**BEZOUT, E. (1730-1783)**	**Cours de mathématique** **Elementos de analyse**	**1775; Paris** **1793; Coimbra**	 **2ª ed.**
	EULER, L. (1707-1783)	Introduction à l'analyse infinitésimale ; 2 v	Paris: 1987-1988	
	LAGRANGE, J. L. (1736-1813)	Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel Leçons sur le calcul des fonctions, servant de commentaire et de supplément à la théorie des fonctions analytiques. Theorica das funções analyticas, que contem os principios do calculo	Paris: 1847 Paris: 1808 Lisboa: 1798	3ª Ed
XIX	LACROIX, S. F. (1765-1843)	Traité élélentaire de calcul differentiel et calcul intégral		
	CAUCHY, A. L. (1789-1875)	Résumé des leçons données Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy	Paris: 1987 Paris: 1882-1938	
	STURM, J. C. F. (1803 – 1855)	**Cours D'Analyse de L'École Polytechnique**	**Paris: 1884**	**7ª Ed**
	SERRET, J. A. (1819-1885)	**Cours de Calcul Differenciel et Integral**	**Paris: 1878**	
	RIEMANN, B. (1826-1866)	Oeuvres mathématiques de Riemann	Paris: 1898	
	LEBESGUE, H. (1875-1941)	Oeuvres scientifiques	Genève : 1972	

Nota: As obras acima referidas cuja localização começa por UCBGBJ foram localizadas na Biblioteca Joanina da Universidade de Coimbra. A obra sob a sigla UCLEFI foi localizada na Biblioteca de Estudos Filosóficos da Universidade de Coimbra. Todas as outras obras acima referidas foram encontradas na Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Assim, com base nos registos presentes nos livros acerca de *História da Matemática,* podemos dividir a análise histórica dos problemas de optimização em 4 períodos:

1º Período – Período Grego: Desde o século IV a. C. até ao século IV D.C.;

2º Período – Nascimento: Século XVI e XVII;

3º Período – Consolidação: Século XVIII;

4º Período – Institucionalização: Século XIX;

Vamos agora apresentar o estudo elaborado, separadamente, de cada um dos períodos. A respeito de cada um dos quatro períodos procurámos verificar quais os autores que abordaram os problemas de optimização nas suas obras e quais os tipos de problemas de optimização presentes em cada uma delas, tentando fazer uma categorização dos mesmos.

Após um primeiro exame a cada uma das obras, seleccionámos para analisar, detalhadamente, uma ou duas dos respectivos autores da época. Para cada uma elaborámos uma ficha de referência da obra, contendo o nome do autor, a data de nascimento e falecimento do autor, o título, o ano, a editora da primeira edição e da edição consultada e por fim a localização da mesma. Seguindo-se a contextualização e intenção do autor, a caracterização da estrutura da obra e os problemas de optimização aí encontrados, bem como um comentário aos mesmos.

Na análise efectuada a cada um dos problemas, tivemos em conta os seguintes aspectos:

- Forma de Enunciado: Identificámos a forma como o problema surge enunciado
  - Proposição (PR): Problemas enunciados como uma proposição
  - Exemplo (EX): Problemas assinalados como exemplos
  - Problema (PB): Problemas enunciados como problema
  - Aplicação (AP): Problemas indicados como aplicação
  - Exercício (EXR): Problemas enunciados como exercício

- Tipo de problema: Identificámos o contexto em que este problema se enquadra
  - Geometria Plana (GP)
  - Geometria Espacial (GE)
  - Aritmética (AR)

  - Física (FI)
  - Astronomia (AS)

- Tipo de optimização: Identificámos o que se pretende optimizar no problema
  - Distância (OD)
  - Área (OAR)
  - Volume (OV)
  - Produto (OP)
  - Ângulo (OAN)
  - Razão (OR)
  - Tempo (OT)

- Tipo de resolução: Identificámos a forma como é feita a resolução. Se esta surge como uma demonstração, no caso em que o problema surge como uma proposição ou se apresenta a resolução, nos restantes casos.
  - Demonstração (DEM)
  - Resolução (RES)

Segue-se, a análise feita a cada uma das obras.

2.1. PERÍODO GREGO: DESDE O SÉCULO IV a. C. ATÉ AO SÉCULO IV

Verificámos através da nossa pesquisa que, de facto, antes de surgir o conceito de derivada já existiam e já se resolviam problemas de máximos e mínimos. Nesta altura os problemas que existiam eram problemas essencialmente geométricos: Geometria Plana ou Geometria Espacial.

Neste primeiro período fomos encontrar 3 autores relacionados com o nosso tema: Euclides (330 - 260 a.C.), Ptolomeu (168 – 90 a. C.) e Pappus (290-350).

Uma vez que o conceito de derivada e, consequentemente, o conceito de problemas de optimização são posteriores a este período, estes surgem e são resolvidos de uma outra forma, ou seja, sem que se faça uso do Cálculo Diferencial.

Vejamos de seguida quais os problemas de optimização encontrados nas obras de cada um dos autores referidos e analisemos também a forma como estes elaboram a sua resolução.

Vamos apenas analisar a obra de Euclides e de Pappus, uma vez que na sua obra, Pappus, apresenta uma compilação de vários trabalhos de outros autores e, em particular, de Ptolomeu.

2.1.1. *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

2.1.1.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Euclides

Data de nascimento e falecimento do autor: ≈ 330 a. C. - 260 a. C

Título: *Elementos*

Ano, editora e lugar da primeira edição: 300 a. C.

Autor da obra consultada: Thomas L. Heath

Título da obra consultada: *The thirteen books of Euclid's Elements*

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1956, New York: Dover. - Traduzidos do texto de Heiberg – 2ª edição revista e com aumentos

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Cota: 01A75/EUC.Ele/V.1; 01A75/EUC.Ele/V.2; 01A75/EUC.Ele/V.3.

2.1.1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Euclides (c. 330 a. C. - 260 a. C.) foi um dos primeiros geómetras e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes da Grécia Clássica e de todos os tempos.

Existem poucas informações sobre a sua vida. Foi chamado para ensinar Matemática na escola criada por Ptolomeu Soter (306 a. C. - 283 a. C.), em Alexandria, mais conhecida por "Museu".

Embora se tenham perdido mais de metade dos seus livros, ainda restaram, para felicidade dos séculos vindouros, os treze famosos livros que constituem os *Elementos*. Publicados por volta de 300 a. C.. Aí está contemplada a Aritmética, a Geometria e a Álgebra (BOYER, 1993).

O trabalho de Euclides é muito vasto. As suas obras foram inicialmente traduzidas para árabe, depois para latim, e a partir destes dois idiomas para outras línguas europeias.

Embora alguns conceitos já fossem conhecidos anteriormente à sua época, o que impossibilita uma análise completa da sua originalidade, pode-se considerar o seu trabalho como genial. Ao recolher tudo o que então se conhecia, sistematiza os dados da intuição e substitui imagens concretas por noções abstractas, para poder raciocinar sem qualquer apoio intuitivo (BOYER, 1993).

2.1.1.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

Observemos como está estruturado o texto dos *Elementos*, nas versões que se ajustam melhor ao texto original.

O texto de Euclides, *Elementos*, está dividido em treze capítulos, chamados *Livros*. Em cada livro estão presentes pontos diferentes. Esses pontos são: definições, proposições, porismas, lemas, postulados e noções comuns (HEATH, 1956).

Os livros distinguem-se entre si pelo conteúdo. Vejamos qual o conteúdo de cada um dos livros:

- Os quatro primeiros livros e o sexto estudam a Geometria no Plano;
- O livro quinto está dedicado à Teoria da Proporção;
- Os livros sétimo, oitavo e nono, tratam da Teoria de Números;
- O livro décimo fala sobre os Irracionais;

– Os livros décimo primeiro, décimo segundo e décimo terceiro dissertam sobre a Geometria no Espaço (HEATH, 1956).

Ora é exactamente nos livros acerca de Geometria no Plano que vamos encontrar proposições que podem ser interpretadas como problemas de optimização.

2.1.1.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO PRESENTES NA OBRA

Ao longo desta obra encontramos algumas proposições que podem ser interpretadas como um problema de optimização. As quatro primeiras surgem no livro III: proposições 7, 8, 15 e 16 e estão relacionadas com o círculo. A quinta surge posteriormente no livro VI: proposição 27 está relacionada com as proporções de figuras planas. As proposições de Euclides são de dois tipos: Ou são construções (dividir uma recta, construir um quadrado) ou são teoremas enunciados em forma condicional, como é o caso das proposições relacionadas com problemas de optimização.

Vejamos agora a forma não só como Euclides as enuncia, mas também como as demonstra. Apresentamos também os resultados em que se baseia para as demonstrar e as aplicações posteriores que o autor faz das mesmas.

Livro III – Proposição 7 (enunciado = prótasis)

Se tomarmos um ponto no diâmetro de um círculo que não seja o centro do círculo e desde o ponto até ao círculo caem algumas rectas, a maior será aquela na qual se encontra o centro, e a mínima o resto da máxima para o diâmetro inteiro. E das restantes a mais próxima da recta que passa no centro é sempre maior do que as mais afastadas. Do mesmo ponto não se poderão tirar para a circunferência senão duas rectas iguais, e estas cairão para uma e para outra parte daquela, que entre todas for a mínima. (Vol. II; pag.14)

Para demonstrar esta proposição Euclides baseia-se nos seguintes resultados apresentados e demonstrados anteriormente:

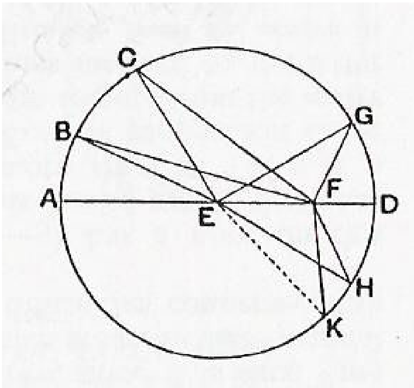
– Se dois triângulos tiverem dois lados iguais, e os ângulos formados por esses lados forem também iguais, as bases dos triângulos e os mais ângulos serão também iguais [I.4];
– Em qualquer triângulo dois lados, tomados de qualquer modo que se quiser, são maiores que o terceiro [I.20];

- Num ponto de uma linha recta dada formar um ângulo rectilíneo dado [I.23];
- Se dois triângulos tiverem dois lados iguais, e um dos ângulos compreendidos pelos lados iguais for maior, e o outro for menor, a base que estiver oposta ao ângulo maior será maior que a outra base oposta ao ângulo menor [I.24].

Vejamos agora como Euclides demonstra esta proposição, ou seja, que o diâmetro é a maior distância entre dois pontos da circunferência:

Primeira parte

Exposição (ékthesis)[2]



Seja ABCD um círculo, e seja AD o seu diâmetro; Em AD tome-se o ponto F que não seja o centro do círculo, seja E o centro do círculo. A partir do ponto F para a circunferência ABCD tracemos as rectas FB, FC, FG.

Determinação (diorismós)[3]

Eu digo que FA é a maior, e FD é a menor entre todas as rectas que vão de F para a circunferência. Digo também que FB é maior do que FC, e FC maior do que FG.

Construção (kataskeue)[4]

Tracemos agora BE, CE, GE. Como em qualquer triângulo dois lados são maiores do que o restante, EB, EF juntamente são maiores do que BF, mas AE é igual a BE, portanto AF é maior do que BF.

Demonstração (apódeixis)[5]

Além disso, como BE é igual a CE, e FE é comum, os dois lados BE, EF são iguais aos dois lados CE, EF. Mas o ângulo BEF também é maior do que o ângulo CEF; Portanto a base BF é maior do que a base CF. Pela mesma razão CF é maior do que FG.

[2] O enunciado da proposição é completamente geral enquanto que a exposição se refere ao caso particular do desenho sobre o que se vai fazer a demonstração
[3] Na determinação indica-se qual é o objectivo que se pretende alcançar em função da figura que se apresenta como exemplo para traçar a demonstração. Costuma-se iniciar com as palavras "digo que…"
[4] Completa-se a figura com os elementos necessários para desenvolver a demonstração
[5] Apesar de no raciocínio se fazer referência a uma figura, as proposições em que se baseia são gerais pelo que a validez do raciocínio é também geral.

Além disso, como GF, FE juntamente são maiores do que EG, e EG é igual a ED, então as duas GF, FE são maiores do que ED. Seja EF subtraída de cada uma; Então a restante GF é maior do que a restante FD. Portanto FA é a maior, FD é a mais pequena, e FB é maior do que FC, e FC maior do que FG.

Segunda parte

Determinação (diorismós)

Digo ainda que do ponto F para a circunferência ABCD só se poderão traçar duas rectas iguais entre si, e que estas duas rectas cairão uma para uma e outra para outra parte da menor FD.

Construção (kataskeue)

Pela recta EF, e pelo ponto E contido nela, vamos construir o ângulo FEH igual ao ângulo GEF, e vamos unir FH.

Demonstração (apódeixis)

De seguida, como GE é igual a EH, e EF é comum, as duas GE, EF são iguais ás duas HE, EF; e o ângulo GEF é igual ao ângulo HEF, portanto a base FG é igual à base FH.

Terceira parte

Determinação (diorismós)

Eu disse ainda que qualquer outra recta igual a FG não iria passar no círculo pelo ponto F.

Construção (kataskeue)

Tracemos agora FK, igual a FG

Demonstração (apódeixis)

Então, como FK é igual a FG, e FH igual a FG, então FK também é igual a FH, isto é, a mais próxima da recta que passa no centro será assim igual à mais afastada: o que é impossível. Portanto outra recta igual a GF não irá passar no ponto F.

Conclusão (syumpérasma)

Assim só uma recta está nessas condições.

Posteriormente, Euclides utiliza esta proposição para demonstrar o resultado seguinte:

– Se de um ponto tomado dentro de um círculo caírem na circunferência mais de duas rectas iguais entre si, o dito ponto será o centro do círculo [III. 19].

Livro III – Proposição 8 (enunciado = prótasis)

Se tomarmos um ponto exterior a um círculo e do ponto ao círculo traçarmos algumas rectas, uma das quais passe pelo centro e as restantes são traçadas ao acaso, das *rectas que caem na parte concava da circunferência, a maior é a que passa pelo centro, e das restantes sempre a mais próxima da que passa no centro é maior do que as mais afastadas. Mas das que caem na parte convexa da circunferência a menor é a que passa pelo centro, e das restantes a mais próxima à mais pequena é sempre menor que a mais afastada. E do mesmo ponto não se poderão tirar para a circunferência mais de duas rectas iguais, e destas uma cairá para uma parte e a outra para a parte oposta a respeito da recta, que entre todas seja a mínima.* (Vol. II; pag.17)

Para demonstrar esta proposição Euclides baseia-se nos seguintes resultados apresentados e demonstrados anteriormente:

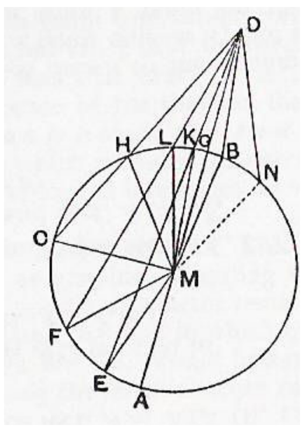
- Se dois triângulos tiverem dois lados iguais, e os ângulos formados por esses lados forem também iguais, as bases dos triângulos e os mais ângulos serão também iguais [I.4];
- Em qualquer triângulo dois lados, tomados de qualquer modo que se quiser, são maiores que o terceiro [I.20];
- Se sobre os extremos de um lado de um triângulo estiverem postas duas rectas dentro do mesmo triângulo, estas serão menores que os outros dois lados do triângulo, mas compreenderão um ângulo maior do que o ângulo que fica oposto ao lado, sobre cujos extremos estão postas as ditas rectas [I.21];
- Se dois triângulos tiverem dois lados iguais, e um dos ângulos compreendidos pelos lados iguais for maior, e o outro for menor, a base que estiver oposta ao ângulo maior será maior que a outra base oposta ao ângulo menor [I.24].

Vejamos como Euclides demonstra esta proposição:

Primeira parte

Exposição (ékthesis)

Seja ABC um círculo, e seja D um ponto tomado do exterior de ABC. Tracemos as rectas DA, DE, DF, DC, e seja DA a recta que passa no centro.



Determinação (diorismós)

Disse que, das rectas que caem na parte côncava da circunferência AEFC, a recta DA que passa no centro é a maior, e DE é maior do que DF e DF maior do que DC.

Demonstração (apódeixis)

Mas, das rectas que caem sobre a parte convexa da circunferência HLKG, a recta DG que passa pelo centro é a menor; e a mais próxima da menor DG é sempre menor do que a mais afastada, DK menor do que DL e DL menor do que DH.

Construção (kataskeue)

Tracemos o centro da circunferência ABC, seja ele M, tracemos as rectas ME, MF, MC, MK, ML, MH.

Demonstração (apódeixis)

Então, como AM é igual a EM, adicionemos a cada uma MD;
Então AD é igual ás duas EM, MD. Mas EM, MD juntamente são maiores do que ED, então AD também é maior do que ED. Além disso, como ME é igual a MF, e MD é comum, Então as duas EM, MD são iguais ás duas FM, MD; E o ângulo EMD é maior do que o ângulo FMD; Então a base ED é maior do que a base FD. Da mesma forma podemos provar que FD é maior do que CD; Então DE é a maior, e DE é maior do que DF, e DF maior do que DC.

Agora, se MK, KD juntas são maiores do que MD, e MG é igual a MK; Tirando de uma e outra parte as duas MK, MG, fica GD é menor do que KD; e por consequência GD menor do que KD. Logo, GD é a menor. E, se em MD, um dos lados do triângulo MLD, duas rectas MK, KD são construídas dentro do triângulo, então as duas MK, KD juntas são menores do que as duas ML, LD. E MK é igual a ML, então a restante de DK é mais pequena que a restante de DL. Da mesma forma podemos provar que DL é também menor do que DH;

Conclusão (syumpérasma)

Então DG é a mais pequena, e DK é menor do que DL, e DL menor do que DH.

Segunda parte

Determinação (diorismós)

Disse também que do ponto D mão se poderão tirar, para a circunferência, senão duas rectas iguais, uma para uma e outra para outra parte da recta DG.

Construção (kataskeue)

Sobre a recta MD, e pelo ponto M, tracemos o ângulo DMB igual ao ângulo KMD e tire-se DB.

Demonstração (apódeixis)

Então, como MK é igual a MB, e MD é comum, os dois lados KM, MD são iguais aos dois lados BM, MD respectivamente; e o ângulo KMD é igual ao ângulo BMD;

Conclusão (syumpérasma)

Então a base DK é igual à base DB.

Terceira parte

Determinação (diorismós)

Eu disse que outra recta igual a DK iria passar no círculo pelo ponto D.

Construção (kataskeue)

Se possível, tracemos essa recta DN.

Demonstração (apódeixis)

Então, como DK é igual a DB, DB também é igual a DN, seria, a mais próxima da menor DG igual à mais afastada: o que foi provado que é impossível.

Conclusão (syumpérasma)

Então, não existem mais de duas rectas iguais que passam no círculo ABC pelo ponto D, uma em cada lado de DG a mais pequena.

Posteriormente não se encontra nenhuma aplicação desta proposição.

Livro III – Proposição 15 (enunciado = prótasis)

Num círculo o diâmetro é a recta maior e das restantes, a mais próxima ao centro é sempre maior do que a mais afastada. (Vol. II; pag.36)

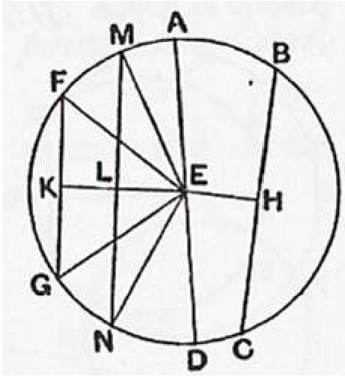
Para demonstrar esta proposição Euclides baseia-se nos seguintes resultados apresentados e demonstrados anteriormente:

- Em qualquer triângulo dois lados, tomados de qualquer modo que se quiser, são maiores que o terceiro [I.20];
- Se dois triângulos tiverem dois lados iguais, e um dos ângulos compreendidos pelos lados iguais for maior, e o outro for menor, a base que estiver oposta ao ângulo maior será maior que a outra base oposta ao ângulo menor [I.24];
- Em todo o círculo as rectas iguais distam igualmente do centro, e as que distam igualmente do centro são iguais [III.14];
- Teorema de Pitágoras. [I. 47]

Vejamos como Euclides demonstra esta proposição:

Primeira parte

Exposição (ékthesis)



Seja ABCD um círculo e seja AD o seu diâmetro e o ponto E o centro; e seja BC a mais próxima do diâmetro AD, e FG a mais afastada;

Determinação (diorismós)

Eu disse que AD é a maior e que BC é maior do que FG.

Construção (kataskeue)

Pelo centro E, tracemos EH, EK perpendiculares a BC, FG, e também os semi-diâmetros EB, EC, EF.

Demonstração (apódeixis)

Sendo AE igual a EB, e DE igual a EC, então AD é igual às duas BE, EC tomadas juntas. Mas BE, EC são maiores que BC. Logo AD é maior do que BC. Como BC está mais perto do centro do que FG, então EK é maior do que EH. Mas BC é o dobro de BH, e FG é o dobro de FK; e os quadrados de EH, HB são iguais aos quadrados de EK, KF, dos quais o quadrado de EH é menor do que o quadrado de EK, pois EH é menor do que EK.

Conclusão (syumpérasma)

Logo, o quadrado de BH será maior do que o quadrado de FK, e assim será BH maior do que FK e BC maior do que FG.

Segunda Parte

Exposição (ékthesis)

Seja BC maior do que FG.

Determinação (diorismós)

Digo, que a recta BC estará mais perto do centro do que a recta FG, isto é, feita a mesma construção, será EH menor do que EK.

Demonstração (apódeixis)

Porque sendo BC maior do que FG, será BH maior do que FK. Mas os quadrados de BH, HE são iguais aos quadrados de FK, KE, dos quais o quadrado de BH é maior que o quadrado de FK, por ser BH maior do que FK.

Conclusão (syumpérasma)

Logo, o quadrado de EH será menor que o quadrado de EK, e por consequência será EH menor do que EK.

Posteriormente, Euclides utiliza esta proposição para demonstrar o resultado seguinte:

– Dadas duas esferas concêntricas, inscrever na esfera maior um sólido poliedro, cuja superfície não toque a esfera menor [XII. 17].

Livro III – Proposição 16 (enunciado = prótasis)

A recta desenhada pelo extremo do diâmetro de um círculo formando ângulos rectos com o diâmetro, irá cair fora do círculo, e não se irá interpor outra recta no espaço entre a recta e a circunferência e o ângulo do semicírculo é maior, e o que fica é menor, do que qualquer ângulo rectilíneo agudo. (Vol. II; pag.37)

Para demonstrar esta proposição Euclides baseia-se nos seguintes resultados apresentados e demonstrados anteriormente:

– Em qualquer triângulo isósceles os ângulos que estão sobre a base são iguais; e produzidos os lados iguais, os ângulos que se formam debaixo da base também são iguais [I.5];
– Dois ângulos de um triângulo qualquer, tomados de qualquer modo, são menores que dois ângulos rectos [I.17];
– Em qualquer triângulo, o ângulo maior fica oposto ao lado maior [I.19].

Vejamos como Euclides demonstra esta proposição:

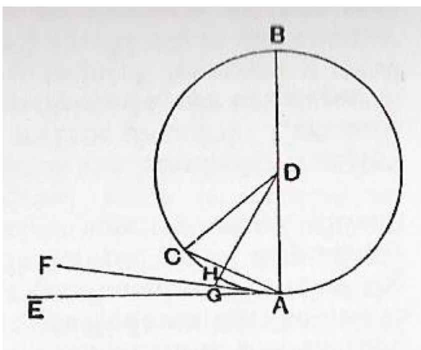
Primeira parte

Exposição (ékthesis)

Seja ABC um círculo, D o seu centro e AB o seu diâmetro;

Determinação (diorismós)

Eu disse que as rectas traçadas a partir de A formando ângulos rectos com AB a partir da extremidade irão cair fora do círculo.



Construção (kataskeue)

Suponhamos que não é verdade, mas, se possível, de centro no círculo, como a recta AC. Tire-se DC.

Demonstração (apódeixis)

Como DA é igual a DC, o ângulo DAC é também igual a ACD. Mas o ângulo DAC é recto. Então o ângulo ACD também é recto; Assim, no triângulo ACD, os dois ângulos

DAC, ACD são iguais a dois ângulos rectos, o que é impossível. Então a recta traçada a partir do ponto A nos ângulos rectos até BA não irá cair dentro do círculo. De forma semelhante podemos provar que não irá cair sobre a circunferência;

Conclusão (syumpérasma)

Então cai fora da circunferência, como AE.

Segunda parte

Determinação (diorismós)

Eu disse depois que no espaço entre a recta AE e a circunferência CHA não pode ser interposta outra recta.

Construção (kataskeue)

Se possível, deixemos que outra recta se interponha, seja ela FA, e seja DG traçada a partir do ponto D perpendicular a FA.

Demonstração (apódeixis)

Então, como o ângulo AGD é recto, e o ângulo DAG é menor do que um ângulo recto, AD é maior do que DG. Mas DA é igual a DH; então DH é maior do que DG, o menor que o menor: o que é impossível.

Conclusão (syumpérasma)

Então não pode ser interposta outra recta no espaço entre a recta e a circunferência.

Terceira parte

Determinação (diorismós)

Eu disse, além disso, que o ângulo do semicírculo contido entre a recta BA e a circunferência CHA é maior do que qualquer ângulo agudo rectilíneo, e o restante ângulo contido entre a circunferência CHA e a recta AE é menor do que qualquer ângulo agudo rectilíneo.

Demonstração (apódeixis)

Se existe um qualquer ângulo rectilíneo maior do que o ângulo contido entre a recta BA e a circunferência CHA, e qualquer ângulo rectilíneo menor do que o ângulo contido entre a circunferência CHA e a recta AE, então dentro do espaço entre a circunferência e a recta AE irá interpor-se uma recta que irá fazer um ângulo contido entre as rectas que será maior do que o ângulo contido entre a recta BA e a circunferência CHA, e um outro ângulo contido entre rectas que é menor do que o ângulo contido entre a circunferência CHA e a recta AE. Mas tal recta não se pode interpor;

Conclusão (syumpérasma)

Então não existe nenhum ângulo agudo contido entre as rectas que seja maior do que o ângulo contido entre a recta BA e a circunferência CHA, também não existe nenhum ângulo agudo contido entre as rectas que seja menor do que o ângulo contido entre a circunferência CHA e a recta AE.

Posteriormente, Euclides utiliza esta proposição para demonstrar os resultados seguintes:

- Sobre uma linha recta dada descrever um segmento de círculo, no qual segmento possa existir um ângulo igual a outro ângulo rectilíneo dado [III. 33];
- Se de um ponto qualquer fora de um círculo se tirarem duas rectas, das quais uma corte o círculo, e a outra chegue somente até à circunferência; e se o rectângulo compreendido pela recta inteira que corta o círculo e pela parte dela que fica entre o dito ponto e a parte convexa da circunferência, for igual ao quadrado da recta incidente sobre a circunferência, será a recta incidente tangente ao círculo [III. 37];
- Inscrever um círculo num quadrado dado [IV. 8];
- Inscrever um círculo num pentágono dado equilátero e equiângulo [IV. 13].

Esta proposição utilizou-se posteriormente como definição de recta tangente a uma curva

Mais à frente, no livro VI, podemos encontrar mais uma proposição que se pode interpretar como um Problema de Optimização.

Livro VI – Proposição 27 (enunciado = prótasis)

De todos os paralelogramos aplicados a uma mesma recta e com os defeitos[6] *de figuras paralelogramas semelhantes à figura descrita sobre a metade da dita recta, e*

[6] O método de construção do paralelogramo cuja área seja equivalente à de uma recta com uma longitude dada, diz-se que se faz por justaposição (parabole ton chorion) diz-se que é por excesso (hipérbole) si a área é maior que a longitude da linha e por defeito (elleipsis) se a área é menor que a longitude da linha. Estas denominações transportaram-se posteriormente às cónicas. Esta proposição, juntamente com a 28 e a 29 foi considerada como o equivalente geométrico da forma algébrica mais generalizada de equações quadráticas quando tem uma raiz real positiva. Constitui o fundamento do livro X e do estudo realizado por Apolónio das cónicas

semelhantemente postas, o máximo é aquele que é aplicado à metade da mesma recta, e é semelhante à figura paralelograma que falta. (Vol. II; pag.257)

Para demonstrar esta proposição Euclides baseia-se nos seguintes resultados apresentados e demonstrados anteriormente:

– Os paralelogramos que estão postos sobre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais [I.36];
– Em qualquer paralelogramo os complementos dos paralelogramos, que existem ao redor da diagonal, são iguais entre si [I.43];
– Se de um paralelogramo for tirado outro paralelogramo semelhante ao total, e semelhantemente posto, e que tenha um ângulo comum ao mesmo total, o paralelogramo que for tirado, existirá ao redor da diagonal do paralelogramo total [VI.26].

Vejamos como Euclides demonstra esta proposição, ou seja, para um mesmo perímetro o paralelogramo com maior área é o quadrado:

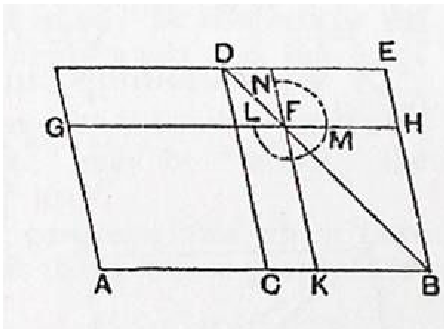
Primeira parte

Exposição (ékthesis)

Seja AB uma recta bissectada por C. Apliquemos à recta AB o paralelogramo AD com a falta da figura paralelogramica DB descrita sobre a metade de AB, seja ela CB;

Determinação (diorismós)

Eu disse que, de todos os paralelogramos aplicados em AB e com as faltas de figuras paralelogramicas semelhantes e de forma semelhante situada em BD, AD é o maior.



Construção (kataskeue)

Apliquemos à recta AB o paralelogramo AF com a falta da figura paralelogramica FB semelhante e situada de forma semelhante a DB;

Determinação (diorismós)

Eu disse que o paralelogramo AD era maior do que o paralelogramo AF.

Demonstração (apódeixis)

Seja primeiramente a base AK do paralelogramo AF maior do que a recta AC. Como o paralelogramo DB é semelhante ao paralelogramo FB, então eles têm a mesma diagonal. Tracemos essa diagonal DB, produzindo a recta KF até ao ponto L. Como o paralelogramo CF é igual a FE, e FB é comum, então a totalidade de CH é igual à totalidade de KE. Mas CH é igual a CG, pois AC também é igual a CB. Então GC também é igual a EK. Juntemos-lhe o paralelogramo CF; Então o paralelogramo AF é igual ao gnômon LMN, e por isso o paralelogramo CE, isto é, o paralelogramo AD será maior do que o paralelogramo AF.

Em segundo lugar seja a base AK do paralelogramo AF menor do que a recta AC. Suposta a mesma construção, como os paralelogramos DH, DG são iguais, pois HM é igual a MG, então DH é maior do que LG. Mas DH é igual a DK. Logo DK é maior do que LG.

Conclusão (syumpérasma)

Por isso juntando a uma e outra parte o mesmo paralelogramo AL, o paralelogramo DB, ou seja AD, é maior do que o paralelogramo AF.

Posteriormente, Euclides utiliza esta proposição para demonstrar o resultado seguinte:

– Aplicar a uma linha recta dada um paralelogramo igual a um rectilíneo dado, e com o defeito de uma figura paralelogramica semelhante à outra dada. Mas o rectilíneo dado, ao qual se quer que seja igual ao paralelogramo que se pede, não deve ser maior que o paralelogramo, que se aplica à metade da recta dada, sendo semelhantes entre si os defeitos, tanto do paralelogramo que se pede com o defeito da figura paralelogramica semelhante à outra dada [VI. 28].

2.1.1.5. CONCLUSÃO

Podemos verificar que Euclides, ao longo das suas demonstrações, denomina os segmentos de recta por rectas. Assim, sempre que se lê linha recta, devemos ler segmento de recta.

Verificamos também, através da análise destas proposições, que todos os problemas de optimização apresentados são problemas de Geometria Plana. Mais concretamente, problemas sobre optimização de áreas, de distâncias ou de ângulos.

Estes não aparecem enunciados como um problema, mas sim como uma proposição e são demonstrados tendo como base o método de redução ao absurdo. Para isso utiliza proposições prévias fundamentalmente relacionadas com a igualdade de triângulos e relações entre os ângulos de um triângulo.

Nesta obra, as ilustrações são apresentadas ao longo do texto, mas, como se trata de uma tradução da obra original, não podemos concluir se nesta se apresentavam da mesma forma.

Actualmente não seria necessário fazer uma demonstração/resolução tão extensa, já que bastaria determinar a equação que define a área ou a distância e calcular os seus extremos através da derivada da função.

Transportando estes factos para o ensino dos problemas de optimização, no Ensino Secundário, verificamos que é possível abordar os problemas de optimização antes de os alunos conhecerem o conceito de derivada.

2.1.2. *LA COLLECTION MATHEMATIQUE* DE PAPPUS DE ALEXANDRIE

2.1.2.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Pappus de Alexandrie

Data de nascimento e falecimento do autor: 290-350

Título: *La collection mathématique*

Ano, editora e lugar da primeira edição: século IV

Autor da obra consultada: Paul Ver Eecke

Título da obra consultada: *Pappus D'Alexandrie: La collection Mathématique*

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1933, Paris: Desclée de Brouwer - 2 vol. Obra traduzida pela primeira vez do Grego para o Francês com introdução e notas do autor

Localização da obra consultada: Biblioteca do Instituto de Estudos Filosóficos da Faculdade de Letras da Universidade de Coimbra. Cota: UCLEFI C-6-2/3.

2.1.2.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Pappus de Alexandria foi o último dos grandes geómetras gregos e um dos seus teoremas é citado como sendo a base da moderna geometria projectiva.

Existem poucos registos sobre a sua vida, sendo que as datas apresentadas advêm de referências bibliográficas ao seu nome e aos seus feitos. Á parte destes detalhes pouco mais se sabe, aparentemente viveu em Alexandria toda a sua vida, talvez tenha sido encorajado a estudar certos problemas matemáticos por um amigo, Hierius, e talvez tenha ensinado numa escola de Alexandria.

Os seus mais importantes legados em geometria foram a *Sinagoga* e a *Colecção Matemática*, sendo este último um grupo de oito livros que provavelmente foi escrito por partes, pois cada livro trata de diferentes tópicos e cada um conta com a sua própria introdução e com notas históricas sobre o assunto (BOYER, 1993).

2.1.2.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

A *Colecção Matemática*, como já referimos é composta por um grupo de oito livros, tratando cada livro, diferentes tópicos e tendo cada um a sua própria introdução e notas históricas sobre o assunto.

Assim, o primeiro livro, que se encontra perdido, trata de assuntos de aritmética e as partes do segundo, que sobreviveram ao tempo, tratam do método de Apolónio referente a "grandes" números. O método expressa números, como potências de uma miríade, isto é, como potências de 10 000.

O terceiro livro da colecção está dividido em quatro partes. A primeira é referente ao problema de encontrar duas médias proporcionais entre duas linhas rectas dadas. Na segunda segue-se a construção das médias aritméticas, geométricas e harmónicas. Na terceira é descrita uma colecção de paradoxos, aos quais são dados créditos a Erycinos e, finalmente, a quarta parte mostra como cada um dos cinco poliedros regulares pode ser inscrito numa esfera.

O quarto livro contém propriedades das curvas, em que se inclui a espiral de Arquimedes e as quadraturas de Hippias. Neste livro também se encontram descritos os métodos de trissecção.

No quinto livro discutem-se os treze sólidos semi-regulares descobertos por Arquimedes. Ele compara as áreas de figuras com perímetro igual e volumes de sólidos com igual superfície, provando que a esfera tem um maior volume que qualquer sólido regular com a mesma área de superfície. Prova também que, dados dois sólidos regulares com igual área de superfície, aquele com maior número de faces tem um maior volume.

Os livros seis e sete são uma referência a livros de outros autores, como por exemplo, Euclides, Teodósio e Eratóstenes. No sexto livro surge também um comentário aos livros de Astronomia da obra *Pequena Astronomia*. Para além da revisão destes textos, Pappus aponta e corrige erros prévios. Ele escreveu depois sobre o *Tesouro da Análise*. É também neste livro que surge o "Problema de Pappus", problema esse que teve grande impacto no desenvolvimento da geometria. Foi discutido, posteriormente, por Descartes e Newton e aquele que é agora conhecido como o Teorema de Guldin, foi provado aqui por Pappus.

Por fim, no oitavo e último livro, Pappus escreveu sobre mecânica (BOYER, 1993).

2.1.2.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO PRESENTES NA OBRA

Ao longo desta obra encontramos algumas proposições que podem ser interpretadas como um problema de optimização. As primeiras surgem no livro V, onde aparecem quatro proposições acerca do nosso tema, as proposições 5, 10, 18 e 57. Seguidamente, no livro V encontramos a proposição 44. E, por fim, no livro VI, a proposição 73.

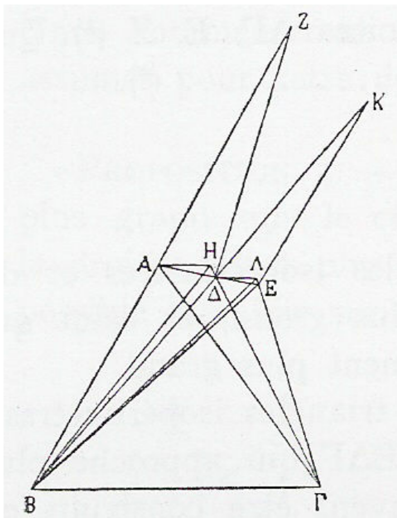
A proposição 57 do livro V não é um problema de optimização, mas sim um problema de comparação.

Vejamos agora a forma como Pappus as enuncia, bem como a forma como as demonstrou.

Livro V – Proposição 5

Entre os triângulos isoperimétricos e com a mesma base, o triângulo isósceles é o maior, e o que mais se aproxima do triângulo isósceles é continuamente maior. (Tomo I; pag.247)

Sigamos a demonstração apresentada por Pappus:



Tracemos sobre a base BΓ, os triângulos isoperimétricos: o triângulo isósceles ABΓ e o triângulo BΔΓ que se aproxima mais do triângulo isósceles do que o triângulo BEΓ; digo que o triângulo ABΓ é maior do que o triângulo BΔΓ e maior do que o triângulo BEΓ.

Prolonguemos a recta BA; coloquemos a recta AZ igual à recta ΓA e transportemos as rectas de junção ZΔ, ΔA. Então, como as rectas ZΔ, BΔ são maiores do que a recta BZ, elas são também maiores do que as rectas BA, AΓ (pois a recta AΓ é igual à recta AZ). Mas as rectas BA, AΓ são iguais às rectas BΔ, ΔΓ. Se cortarmos de um lado e doutro a recta BΔ, a restante recta ZΔ é maior do que a recta ΔΓ. Ora, as duas rectas ZA, AΔ, são respectivamente iguais às duas rectas ΓA, AΔ, e a base ZΔ é maior do que a base ΔΓ; então, o ângulo compreendido entre ZA, AΔ é maior do que o ângulo compreendido entre ΓA, AΔ; então o ângulo entre ZA, AΓ é maior do que o dobro do ângulo compreendido entre ΔA, AΓ; assim, o ângulo compreendido entre ZA, AΓ é maior do que o dobro do ângulo compreendido entre ΔA, AΓ. Mas, ele é o dobro do ângulo compreendido entre AB, BΓ, isto é, o ângulo compreendido entre AΓ, ΓB (visto que o triângulo é isósceles); assim o ângulo compreendido entre ΔA, AΓ é também maior do que o ângulo compreendido entre ΔA, AΓ. Tracemos o ângulo compreendido sobre as rectas ΓA, AH igual ao ângulo compreendido entre as rectas AΓ, ΓB; segue-se que a recta AH é paralela À recta BΓ pois os ângulos alternos são iguais. De seguida, prolonguemos a recta ΓΔ até ao ponto H, e transportemos as rectas de junção BH, é claro que o triângulo ABΓ é maior do que o triângulo B ΔΓ, visto que o triângulo ABΓ é equivalente ao triângulo BHΓ.

Mais uma vez, prolonguemos a recta BΔ até ao ponto K; coloquemos a recta ΔK igual à recta ΔΓ, e transportemos as rectas de junção KE, ΔE. Como as rectas BE, EK são maiores do que a recta BK, o mesmo acontece com as rectas B Δ,ΔΓ, o mesmo acontece com as rectas BE, EΓ, se cortarmos de ambos os lados da recta BE, a recta restante EK é maior do que a recta EΓ. Ora, as duas rectas KΔ, ΔE são respectivamente iguais às duas rectas ΓΔ, ΔE, e a base KE é maior do que a base EΓ; então, o ângulo compreendido entre as rectas KΔ, ΔE é maior do que o que está compreendido entre as rectas ΓΔ, ΔE; assim, o ângulo compreendido entre KΔ, ΔΓ é maior do que o dobro do ângulo compreendido entre ΓΔ, ΔE. Ora, este mesmo ângulo compreendido entre KΔ, ΔΓ é mais pequeno do que o dobro do ângulo compreendido entre ΔΓ, ΓB (pois o Ângulo compreendido entre ΔΓ, ΓB é maior do que aquele que está compreendido entre ΔB, BΓ, pois os ângulos compreendidos entre AB, BΓ e entre AΓ, ΓB são iguais); então o ângulo compreendido entre ΔΓ, ΓB é maior do que aquele que está entre ΓΔ, ΔE. Assentemos sobre a recta ΔΓ e sobre o ponto Δ, um ângulo compreendido sobre as rectas ΓΔ, ΔΛ igual ao ângulo compreendido entre ΔΓ, ΓB. ORA, é claro que a recta ΔΛ, paralela à recta BΓ por causa dos ângulos alternos, situar-se-á entre as rectas ΔE, ΔK; então, se a recta ΓE se prolongar até à paralela ΔΛ que se intersecta no ponto Λ, e se transportarmos a recta de junção BΛ, o triângulo BΓΛ será equivalente ao triângulo BΛΓ;

Dessa forma o triângulo ABΓ é maior do que o triângulo BEΓ que é mais pequeno do que o triângulo BΔΓ.

Neste primeiro problema de Geometria Plana o autor pretende optimizar a área de um triângulo dado o seu perímetro e a medida da base. Na demonstração o autor usa um método construtivo, comparando segmentos de recta, ângulos e triângulos.

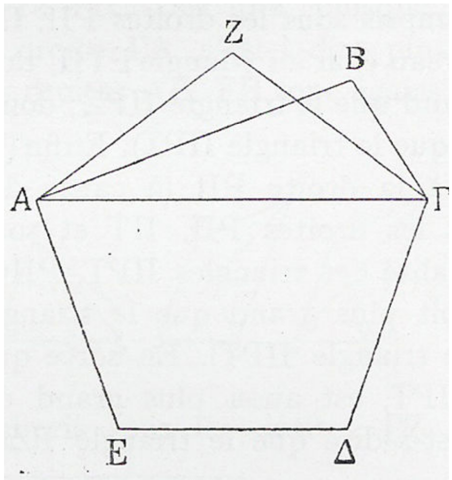
Livro V – Proposição 10

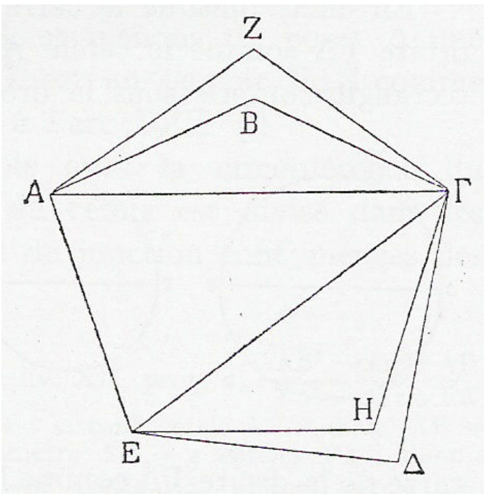
Entre as figuras rectilíneas com o mesmo perímetro e o mesmo número de lados, a maior é a que é equilateral e equiângular[7]. (Tomo I; pag.258)

Analisemos a demonstração apresentada por Pappus:

Seja ABΓΔE o maior dos pluriláteros com o mesmo perímetro e o mesmo número de lados; eu digo que ele é equilátero.

Com efeito, suponhamos que não o é; mas que as rectas AB, BΓ são, se possível, desiguais, e transportemos a recta de junção AΓ de forma a construir o triângulo isósceles AZΓ, de forma que as rectas AZ, ZΓ sejam iguais à soma das rectas AB, BΓ. Assim, como demonstramos anteriormente que o triângulo isósceles é o maior dos triângulos isoperimétricos construídos sobre a mesma base, concluímos que o triângulo AZΓ é maior do que o triângulo ABΓ. Acrescentemos de uma e de outra parte o quadrilátero AΓΔE; temos uma área ZΓΔEA maior do que a área maior ABΓΔE, com o mesmo perímetro que a outra e tendo o mesmo número de lados; o que é impossível. Em consequência, ABΓΔE é equilateral. E fica claro que o plurilátero mais equilateral é continuamente maior.





Digo também que o plurilátero ABΓΔE é também equiângular.

Com efeito, suponhamos que não é verdade; mas que o ângulo B é maior do que o ângulo Δ, se possível. Assim, a recta AΓ é também maior do que a recta ΓB. Assim, a recta AΓ é também maior do que a recta ΓE (pois a soma das rectas AB, BΓ é igual à soma das rectas ΓΔ, ΔE). Tracemos, sobre as rectas

[7] Esta proposição está demonstrada no opúsculo de Zénodoro, onde esta constitui a proposição II. Pappus reproduz a demonstração de Zénodoro com a mesma estrutura, mas de uma forma um pouco mais explícita.

desiguais ΑΓ, ΓΕ, os triângulos semelhantes isósceles ΑΖΓ, ΓΗΕ, determinemos a soma dos lados ΑΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΕ igual à soma dos lados ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, como o demonstremos numa proposição anterior. Em consequência, a soma dos triângulos estabelecidos ΑΖΓ, ΓΗΕ será maior do que a dos triângulos primitivos ΑΒΓ, ΓΔΕ (resultado demonstrado em proposições anteriores). E se acrescentarmos de uma e de outra parte do triângulo ΑΓΕ, ele apresentar-se-á de igual forma, o que não pode ser; assim o plurilátero ΑΖΓΗΕ será maior do que o maior plurilátero ΑΒΓΔΕ tendo o mesmo perímetro que ele. Em consequência, o plurilátero ΑΒΓΔΕ é equiângular (Mas é também equilateral); assim entre as figuras rectilíneas isoperimétricas e com o mesmo número de lados, a maior é equilateral e equiângular.

E é evidente que o círculo é a maior das figuras isoperimétricas, pois nós demonstramos que é maior do que uma figura regular, ou seja, equilateral e equiângular.

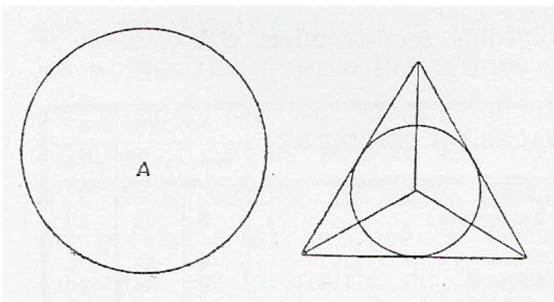
Neste segundo problema, de Geometria Plana, o autor pretende optimizar a área de um polígono dado o seu perímetro. Na demonstração o autor usa o método de redução ao absurdo, trabalhando com a decomposição da figura em triângulos.

Livro V – Proposição 18

Consideremos uma esfera com o seu centro A, e consideremos uma das cinco figuras de que falamos[8]*, com a superfície total equivalente à da esfera; eu digo que a esfera é maior.* (Tomo I; pag.276)

Vejamos a demonstração apresentada por Pappus:

Com efeito, imaginemos uma esfera inscrita num poliedro de maneira a ficar tangente que a envolvem; verifica-se que a superfície do poliedro é maior do que a superfície da esfera inscrita, pois ele envolve-a. Mas a superfície do poliedro é equivalente à superfície da esfera A; Assim a superfície da esfera A é também maior do que a superfície da esfera inscrita no poliedro, e o raio da esfera A é também maior do que o raio da esfera inscrita. Ora, a superfície da esfera A é equivalente à superfície do poliedro; então, o cone cuja base é o círculo



[8] Os cinco sólidos platónicos: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro

equivalente à superfície da esfera A (e com a altura igual ao raio da esfera A) é maior do que a pirâmide cuja base é rectilínea equivalente à superfície do poliedro, e cuja altura é o raio da esfera inscrita no poliedro. Mas este cone é equivalente à esfera A (Este resultado está demonstrado por Arquimedes no livro De la Sphère et du Cylindre); enquanto que esta pirâmide é equivalente ao poliedro; consequentemente, a esfera A é maior do que o poliedro proposto.

Verificamos que nesta proposição, de Geometria Espacial, o autor pretende verificar que a esfera é o sólido com maior volume, comparado com os cinco sólidos platónicos com a mesma área. A demonstração é feita por construção, comparando o volume da superfície esférica com o volume do poliedro circunscrito à esfera e utilizando uma segunda esfera com a área do poliedro. Utiliza ainda um cone cuja base é equivalente à superfície da segunda esfera e a altura é o raio da segunda esfera e uma pirâmide cuja base é equivalente à superfície do poliedro e cuja altura é igual ao raio da esfera inscrita no poliedro.

A proposição apresentada a seguir não é sobre optimização, é uma proposição onde se estabelece uma comparação entre o número de bases de cada uma das cinco figuras poliédricas e o respectivo volume. Por esse motivo não apresentamos a respectiva demonstração.

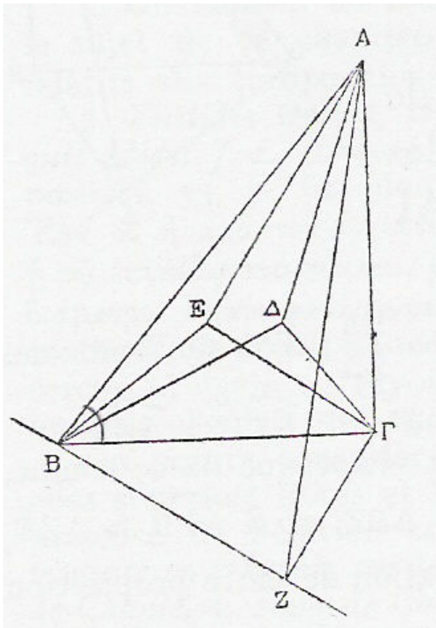
Livro V – Proposição 57

Entre as cinco figuras denominadas poliédricas, a que é mais poliédrica (com as bases mais numerosas) é continuamente maior, e reconheceremos da forma seguinte que dessas cinco figuras, é impossível encontrar outras que estejam compreendidas entre os polígonos equilaterais iguais e semelhantes. (Tomo I; pag.363)

Livro VI – Proposição 44

De um ponto elevado A, tracemos sobre o plano subjacente um segmento AB não perpendicular a esse plano, e tracemos desde o ponto A uma perpendicular a esse plano; que o intersecta no ponto Γ, tracemos também ΓB. Eu digo que o ângulo compreendido entre AB e BΓ é menor do que todos os que são estão compreendidos entre AB é qualquer um dos segmentos que passem em B contidas no plano subadjacente; e o ângulo mais próximo de este ângulo é continuamente mais pequeno do que o que está mais afastado, *e que dois ângulos iguais não se estabelecem de um e de outro lado do ângulo.* (Tomo II; pag.438)

Examinemos a demonstração apresentada por Pappus:



Com efeito, tracemos uma recta BΔ no plano subjacente; marquemos o ponto Γ, a recta ΓΔ perpendicular à outra recta, e tracemos a recta de junção AΔ. A recta AΔ é portanto perpendicular sobre a recta BΔ. E porque o ângulo compreendido entre as rectas AΓ, ΓΔ é recto, a recta ΔA é maior do que a recta AΓ; consequentemente, a razão ente a recta BA e a recta AΓ, é maior do que entre BA e AΔ. E os ângulos compreendidos entre as rectas BΓ, BA e entre as rectas BΔ, ΔA são rectos; assim, o ângulo compreendido entre as rectas BA, AΓ é maior do que o que está compreendido entre as rectas BA, AΔ (Por um lema que foi demonstrado anteriormente); assim o ângulo restante compreendido entre AB, BΓ é mais pequeno do que o ângulo compreendido entre AB, BΔ. Demonstraremos também que o ângulo compreendido entre AB, BΓ é mais pequeno do que todos os outros[9]; então, o ângulo compreendido entre AB, BΓ é o mais pequeno.

Eu digo também que o ângulo mais próximo de este ângulo é continuamente mais pequeno do que o que está mais afastado.

Com efeito, tracemos uma recta BE no plano subjacente[10]; marquemos a partir do ponto Γ a perpendicular ΓE a essa recta, e tracemos a recta de junção AE. A recta AE é perpendicular a BE. E como o ângulo recto entre BΔ, ΔΓ é igual ao ângulo recto que está entre as rectas ΓE, EB; e como o ângulo entre as rectas BΓ, ΓΔ é também maior do que o ângulo que está entre as rectas BΓ, ΓE, deduz-se que a razão entre EΓ e ΓB é maior do que a razão entre ΔΓ e ΓB; assim, a recta EΓ é maior do que a recta ΓΔ. E a recta ΓA faz ângulos rectos com cada uma das rectas ΓΔ, ΓE; assim, a recta EA é também maior do que a recta AΔ; assim a razão entre a recta BA e a recta AΔ é maior do que a sua razão com AE. E os Ângulos situados nos pontos Δ, E são rectos; assim, o ângulo compreendido

[9] Subentende-se: que estão compreendidos sobre AB é qualquer outra recta que passam em B no plano subjacente.

[10] Ou seja, uma recta BE tal que o ângulo EBΓ > ângulo ΔBΓ

entre as rectas BA, AΔ, é maior do que o que está compreendido entre as rectas BA, AE. Consequentemente, o ângulo compreendido entre as rectas AB, BΔ, é mais pequeno do que o ângulo compreendido entre as rectas AB, BE. Demonstraremos em paralelo que o ângulo mais próximo do ângulo entre as rectas AB, BΓ é continuamente mais pequeno que o que está mais afastado.

Enfim, eu digo que dois ângulos iguais não se estabelecem de um e de outro lado do ângulo.

Estabeleçamos sobre a recta ΓB, no ponto B, no plano subjacente, um ângulo compreendido sobre as rectas ΓB, BZ igual ao ângulo compreendido entre as rectas ΔB, BΓ; tracemos a partir do ponto Γ a perpendicular ΓZ sobre a recta BZ, e tracemos a recta de junção AZ. Como o ângulo compreendido entre as rectas ΓB, BΔ é igual ao que está compreendido entre as rectas ΓB, BZ; e o ângulo recto compreendido entre as rectas ΓΔ, ΔB é igual ao ângulo recto compreendido entre as rectas ΓZ, ZB, e a recta ΓB é o lado comum dos triângulos, conclui-se que a recta BΔ é igual à recta BZ e a recta ΓΔ é igual à recta ΓZ; assim, a recta AΔ é também igual à recta AZ. Então, como a recta ΔB é igual à recta BZ; e a recta BA é comum e a base ΔA é igual à base AZ, conclui-se que o ângulo compreendido entre as rectas AB, BΔ é igual ao ângulo compreendido entre as rectas AB, BZ. Demonstraremos em paralelo não estabelece outro ângulo igual ao que está compreendido entre as rectas AB, BΔ.

O ângulo compreendido entre as rectas AB, BΓ é então o mais pequeno; o ângulo que está mais próximo é continuamente mais pequeno do que o que está mais afastado, e dois ângulos iguais não se estabelecem de um e do outro lado deste ângulo.

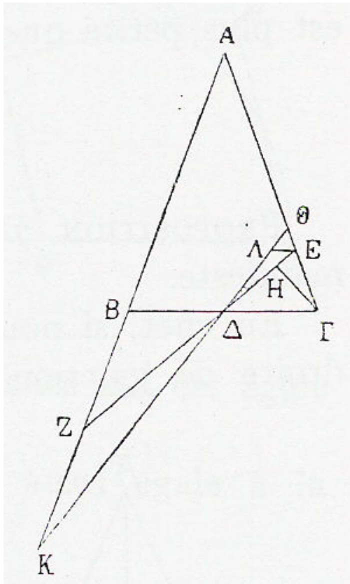
Neste problema, de Geometria Espacial, o autor pretende determinar o ângulo mínimo entre uma recta e um plano. Também esta demonstração é feita por construção, traçando perpendiculares e comparando rectas e ângulos.

Livro VII – Proposição 73

Consideremos a recta BA igual à recta AΓ, e cortemos a recta BΓ, em duas partes iguais no ponto Δ; eu digo que a recta BΓ, é a mais pequena de todas as rectas que passam pelo ponto Δ.(Tomo II; pag.608)

Vejamos a demonstração apresentada por Pappus:

Com efeito, tracemos uma outra recta EZ, e prolonguemos a recta AB até ao ponto Z; eu digo que a recta EZ é maior do que a recta ΓB. Como o ângulo



compreendido entre as rectas AB, BΓ, ou seja, o ângulo Γ, é maior do que o ângulo compreendido entre as rectas BZ, ZE, é possível cortar ao ângulo Γ um ângulo igual ao ângulo compreendido entre as rectas BZ, ZE. Que o ângulo compreendido entre as rectas ΔΓ, Γ seja igual a este último ângulo. Assim, a recta ΓΔ, está para a recta ΔH como a recta ZΔ está para a recta ΔB. Ora a recta ZΔ é maior do que a recta ΔB; então, a recta ΓΔ é também maior do que a recta ΔH. Consequentemente, como a recta ZΔ é maior do que a recta ΔB, ou seja, a recta ΔΓ, mas a recta ΔΓ é maior do que a recta ΔH, [Deduz-se que a recta ZΔ é a maior e a recta ΔH é a mais pequena]. Então, como as quatro rectas ZΔ, ΔB, ΔΓ, ΔH são em proporção, que a recta ZΔ é a maior e a recta ΔH a mais pequena, deduz-se que a recta ZH é maior do que a recta BΓ; de forma que a recta BΓ, mais pequena que a recta ZH, é mais pequena do que a recta EZ. Demonstraremos em paralelo que a recta BΓ é mais pequena do que todas as rectas que passam pelo ponto Δ. Consequentemente, a recta BΓ é a mais pequena de todas as rectas que passam no ponto Δ. Eu digo agora que aquela que está mais próxima é mais pequena do que aquela que está mais afastada.

Com efeito, tracemos transversalmente uma outra recta ΘK, e estabeleçamos o ângulo compreendido entre as rectas ΔE, EΛ igual ao ângulo K. Então, a recta KΔ é de novo, maior do que a recta ZΔ e a recta EΔ maior do que a recta ΔΛ; deste modo a recta inteira KΛ é maior do que a recta EZ. Em consequência, a recta ΘK é, maior do que a recta EZ; deste modo a recta ZE é mais pequena do que a recta ΘK. Assim, a recta BΓ, é mais pequena do que todas as rectas que passam por Δ, e aquela que está mais próxima é mais pequena do que aquela que está mais afastada.

Neste problema, de Geometria Plana, pretende-se optimizar a distância entre um ponto e uma recta. A demonstração é feita por construção e, também nesta demonstração, o autor utiliza a comparação de medidas de segmentos de recta e de ângulos para chegar à solução óptima.

2.1.2.5. CONCLUSÃO

Podemos verificar que, tal como Euclides, Pappus não tem enunciados de problemas ou exercícios, mas sim de proposições.

As proposições apresentadas e demonstradas por Pappus são problemas de Geometria Plana e Geometria Espacial, ou seja, são problemas de optimização de áreas, de volumes ou de ângulos.

Pappus não faz a distinção entre rectas, semi-rectas ou segmentos de recta e a todos denomina de rectas.

Verificamos também que, nas demonstrações, não se usa a derivada, uma vez que também, nesta altura, o conceito ainda não tinha surgido. As demonstrações são demonstrações feitas de forma construtiva ou usando a redução ao absurdo. Usa a comparação entre medidas de ângulos, medida de lados e semelhança de triângulos.

Na obra de Pappus encontramos, para além de proposições de optimização, proposições onde se estabelece uma comparação/relação entre figuras geométricas.

2.2. NASCIMENTO: SÉCULO XVI E XVII

Foi no século XVII que, por volta de 1635, começaram a surgir distintos métodos de construção de linhas tangentes a curvas. Posteriormente, no último terço do mesmo século, a combinação entre estes métodos de cálculo de tangentes e problemas sobre áreas produziram o Cálculo como um novo e unificador método de Análise Matemática.

Fermat (1601-1665) foi o autor do método de construção de tangentes a curvas. Assim, este foi o primeiro matemático a resolver problemas de máximos e mínimos, usando tangentes, mas, infelizmente, nunca explicou a base teórica do método com clareza suficiente.

Posteriormente a Fermat, realizaram estudos nesta área, outros distintos matemáticos da época. John Wallis (1616-1703) estendeu a Álgebra numa verdadeira Análise, escreveu em 1665 o livro *Arithmetica Infinitorum*. Christian Huygens (1629-1695) achou os pontos máximos, pontos mínimos e os pontos de inflexão e também conseguiu esboçar correctamente a curva $y^n = kx^n(a-x)^b$. Também Isaac Newton (1642-1727) desenvolveu estudos nesta área, tendo escrito o mais admirado tratado científico de todos os tempos, *Philosophiae Naturalis Pincipia Mathematica*. Os irmãos Bernoulli, Jacques Bernoulli (1654-1705) Jean Bernoulli (1667-1748) deram também um grande contributo nesta área. O segundo escreveu dois pequenos livros didácticos sobre cálculo diferencial e integral que foram posteriormente publicados. Pierre Varignon (1654-1722) escreveu o livro *Eclaircissement sur L'Analyse dês infinitements petits*, 1725, que era um comentário à obra escrita por L'Hôpital. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) publicou em 1684 a primeira exposição sobre Cálculo Diferencial intitulada, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentus, qua nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus*[11], fez uma abordagem geométrica baseada na abordagem cinemática de Newton.

O matemático L'Hôpital (1661-1704) escreveu a obra *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, publicada pela primeira vez em Paris, no ano de 1696. Esta foi a obra que seleccionámos para analisar neste período. Sabe-se que L'Hôpital foi aluno de Jean Bernoulli e, por esse motivo, não se sabe ao certo qual o conteúdo da obra que é, de facto, da sua autoria.

---

[11] Novo método para determinar máximos e mínimos, assim como tangentes, método que não entrava as expressões fraccionárias ou irracionais, acompanhado com o cálculo original que se aplica.

2.2.1. *ANALYSE DES INFINIMENT PETITS, POUR L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES* DE L'HÔPITAL

2.2.1.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Guillaume François Antoine, Marquês de L'Hôpital

Data de nascimento e falecimento do autor: 1661-1704

Título: *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1988; ACL – éditions ; Paris

Ano, editora e lugar da primeira edição: 1696; Imprimerie Royale; Paris

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Cota: 01A75/L'HO.

2.2.1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Guillaume-François-Antoine de l'Hôpital (1661-1744) nasceu em Paris, França e era de origem aristocrata. Foi oficial do exército durante a juventude, mas abandonou a carreira militar devido a problemas de visão.

Foi matemático competente e realizou trabalhos na área da Análise Matemática e da Geometria. Pertenceu ao círculo de Malebranche, onde conheceu em 1691 o jovem Johann Bernoulli.

Impressionado com o cálculo de Leibniz e com os conhecimentos que Bernoulli tinha sobre este, contratou-o para seu professor.

No início, as aulas decorriam em forma de conversação, mas l'Hôpital propôs que Bernoulli lhe proporcionasse as aulas por escrito. Essas lições e outras informações, fornecidas pelo seu professor, terão sido a base do livro de l'Hôpital. (Fernández, 2004)

2.2.1.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

A obra de l'Hôpital está dividida em 10 secções. A primeira é dedicada às regras do cálculo de diferenças. A segunda fala do cálculo de diferenças para calcular tangentes de todo o tipo de linhas curvas. A terceira trata do cálculo de diferenças para calcular máximos e mínimos. A quarta é dedicada ao cálculo de diferenças para calcular pontos de inflexão e pontos de retrocesso. A quinta trata do cálculo de diferenças para o cálculo de desenvolvimentos. Na sexta e na sétima trata do cálculo de diferenças para calcular causticas por reflexão e por refracção. A oitava trata do cálculo de diferenças para calcular pontos de linhas curvas que tocam uma infinidade de linhas dadas de posição, rectas ou curvas. A nona é dedicada à solução dos problemas que dependem dos métodos precedentes. E a décima é dedicada a uma nova forma de utilizar o cálculo de diferenças em curvas geométricas, baseado no método de Descartes e Hudde.

Em cada uma das dez secções podemos encontrar definições, proposições, corolários, problemas, regras, advertências e comentários.

Os gráficos utilizados não se encontram junto do respectivo enunciado, mas sim compiladas ao longo das várias secções.

2.2.1.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

Uma vez que esta obra de L´Hôpital é dedicada ao cálculo de diferenças, a sua estrutura é completamente distinta da estrutura das obras analisadas anteriormente.

Assim, podemos encontrar nesta obra uma secção, a secção III: *Usage du calcul pour trouver les plus grandes et les moindres appliqués, ou se réduisent les questions de maximis & minimis*[12] que é apenas dedicada a máximos e mínimos, onde podemos encontrar alguns problemas de optimização.

Entre os treze exemplos apresentados, nesta secção, por L'Hôpital, existem 7 que são problemas de optimização de uma variável. Analisemos agora cada um desses exemplos.

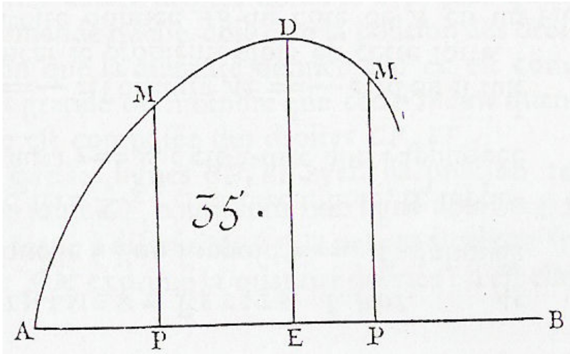
Exemplo IV

Cortar a linha dada AB num ponto E, de forma que o produto do quadrado de uma das partes AE pela outra EB, seja o maior de todos os outros produtos formados da mesma forma. (pag.44)

[12] Uso do cálculo de diferenças para calcular máximos e mínimos

Resolução:

Denominemos a medida desconhecida AE por x, e a medida dada AB por *a*; iremos ter $AE^2 \times EB = axx - x^3$, que deverá ter um máximo.

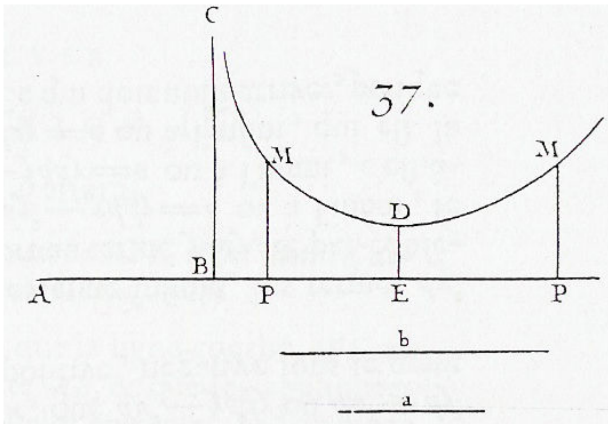


É porque iremos imaginar uma linha curva MDM, tal que a relação de aplicar MP(y) ao corte AP(x) será exprimido pela equação $y=\frac{axx\text{-}x^3}{aa}$ e iremos procurar um ponto E tal que a aplicação *ED* seja a maior de todas as semelhantes *PM*; o que dá $dy = \frac{2axdx - 3xxdx}{aa} = 0$, de onde se tira $AE(x)=\frac{2}{3}a$.

Se virmos que, em geral $x^m \times \overline{a-x}^n$ é o maior (*m* e *n* podem ter os valores que queiramos), sai que a diferença deste produto é igual a zero ou ao infinito, o que dá $mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - n\overline{a-x}^{n-1}dx \times x^m = 0$, que dividido por $x^{m-1} \times \overline{a-x}^{n-1}dx$, dá $am - mx - xn = 0$ e $AE(x) = \frac{m}{m+n}a$.

Se *m*=2 e *n*=-1, tem-se $AE(x) = 2a$, e o problema será enunciado assim.

Prolongar a linha dada *AB* do lado de *B* até a um ponto *E*, de forma que a quantidade $\frac{\overline{AE}^2}{\overline{BE}}$ seja um mínimo, e não um máximo, porque a equação da curva *MDM* irá ser $\frac{xx}{x-a} = y$ na qual se supusermos x = *a* a aplicação *PM* que divide *BC* irá ser $\frac{aa}{0}$, ou seja infinito, e suponhamos x infinito, tem-se *y* = *x,* ou seja a aplicação será também infinita.



Se *m*=1 e *n*=-2, tem-se $AE = -a$, donde tiramos que o problema deverá ser enunciado desta forma.

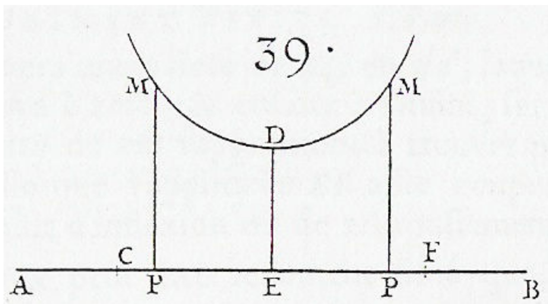
Prolongar a recta dada *AB* do lado de *A* até ao ponto *E*, como a quantidade $\frac{AE \times \overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}$ é a maior de todas as outras quantidades semelhantes $\frac{AP \times \overline{AB}^2}{\overline{BP}^2}$.

Neste problema, de Geometria Plana/Aritmética, o autor pretende optimizar um produto da medida de duas partes de um segmento. Para a resolução deste problema o autor começa por equacionar o problema, utilizando a noção de distância e calcula, de seguida, os zeros do diferencial apresentando depois o resultado.

Exemplo V

A linha recta AB é dividida em três partes AC, CF, FB, corte-se a parte do meio CF no ponto E, de forma que a razão do rectângulo AE x EB pelo rectângulo CE x EF seja a mais pequena do que todas as outras razões formadas da mesma forma. (pag.45)

Resolução:



Sejam, *AC*, *a*; *CF*, *b*; *CB*, *c*; e o desconhecido *CE*, x Tem-se $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$, e o que parte a razão de $AE \times EB$ ora será que $\frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$ deverá ser um mínimo. Isto é porque se imaginarmos uma linha curva *MDM,* tal que a relação da aplicação *PM (y)* com a cortada *CP (x)* é expressa pela equação $y = \frac{aac + acx - aax - axx}{bx - xx}$, a questão reduz-se a descobrir para x um valor *CE* tal que a aplicação *ED* seja a mínima de todas as semelhantes *PM*. Iremos formar (calculamos as diferenças, e dividimos por *a dx*) a igualdade $css - axx - bxx + 2acx - abc = 0$, a cujo calculo de raízes se reduz a questão. Se $c = a + b$, tem-se $x = \frac{1}{2}b$.

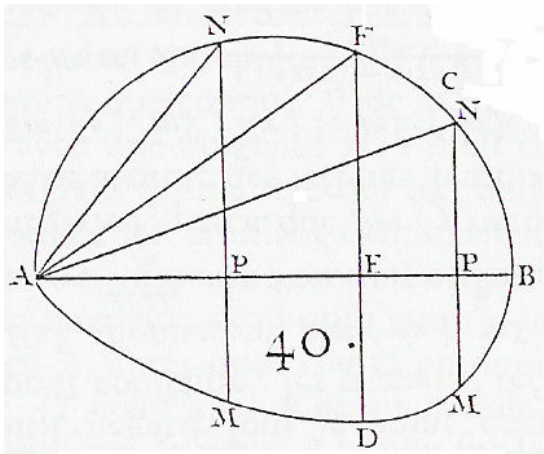
Verificamos que neste problema, semelhante ao anterior, o autor pretende optimizar uma razão em vez de um produto. A resolução é feita de modo idêntico à do problema anterior.

Exemplo VI

Entre todos os cones que podem ser inseridos numa esfera, determinar o que tem a maior superfície convexa. (pag.45)

Resolução:

A questão reduz-se a determinar sobre o diâmetro AB do semicírculo AFB o ponto E, de forma que traçando a perpendicular EF e ligando AF, o rectângulo $AF \times FE$ seja o maior de todos os semelhantes $NA \times NP$. Se considerar-mos que o semicírculo *AFB* faz uma revolução inteira em torno do diâmetro *AB*, fica claro que ele vai descrever uma esfera, e que os triângulos rectângulos *AEF*, *APN* irão descrever os cones inscritos nesta esfera, assim, as superfícies convexas descritas pelas cordas *AE*, *NA*, são entre elas como os rectângulos $AF \times FE, NA \times NP$.



Seja portanto a incógnita $AE = x$, a conhecida $AB = a$, tem-se, pela propriedade do círculo, $AF = \sqrt{ax}$, $EF = \sqrt{ax - xx}$; e portanto, $AF \times FE = \sqrt{aaxx - ax^3}$ que deverá ser um máximo. É porque nós imaginamos uma linha curva *MDM* tal que a relação da aplicação *MP (y)* com a cortada *AP(*x) é exprimida pela equação $\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y$; e tomamos o ponto *E*, porque a aplicação *ED* é maior do que todas as semelhantes *PM*. Temos a diferença $\frac{2axdx - 3xxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = 0$, de onde se tira $AE(x) = \frac{2}{3}a$.

Neste problema, de Geometria Espacial, o autor pretende optimizar a área de um cone inscrito numa esfera. Para resolver este problema o autor começa por observar que a determinação da área máxima do cone se reduz à determinação da área máxima do triângulo formado pelo raio, altura e geratriz do cone. Aplica depois o Teorema de Pitágoras para relacionar os lados deste triângulo com base no diâmetro da esfera. Por fim chega à função que lhe permite optimizar a área do triângulo, função irracional, calculando de seguida o diferencial e os zeros do diferencial.

Exemplo VII

Procuramos entre todos os paralelepípedos iguais a um cubo dado a^3, e que um dos seus lados é a recta dada b, aquele que tem a menor superfície. (pag.46)

Resolução:

Seja x um dos dois lados que procuramos, o outro será $\frac{a^3}{bx}$; e tomemos os planos alternativos de três lados *b*, x, $\frac{a^3}{bx}$ do paralelepípedo, a sua soma será $bx+\frac{a^3}{x}+\frac{a^3}{b}$ metade da sua superfície que deve ser um mínimo. É porque gera como de costume uma linha curva que tem como equação $\frac{bx}{a}+\frac{aa}{x}+\frac{aa}{b}=y$ tomaremos a diferença $\frac{bdx}{a}+\frac{aadx}{xx}=0$ de onde tiramos $xx=\frac{a^3}{b}$ e $x=\sqrt{\frac{a^3}{b}}$; como os três lados do paralelepípedo que satisfazem a questão, iram ser, o primeiro *b*, o segundo $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, e o terceiro $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$. De onde verificamos que os dois lados que procuramos são iguais entre eles.

Exemplo VIII

Procuramos entre todos os paralelepípedos que são iguais a um cubo dado a^3, aquele que tem a menor superfície. (pag.47)

Resolução:

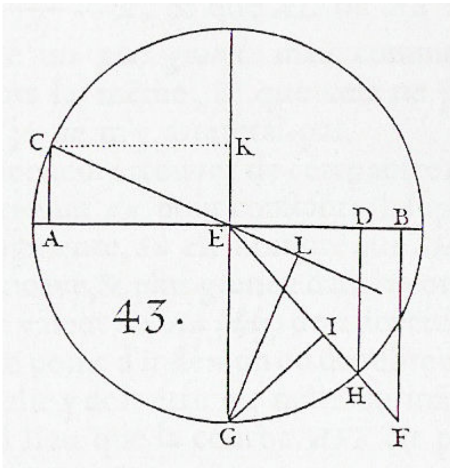
Seja x um dos lados desconhecidos, é claro pelo exemplo precedente, que os outros dois lados são, cada um deles $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$; e partamos a soma dos planos alternativos que é a metade da superfície, irá ser $\frac{a^3}{x}-2\sqrt{a^3x}$ que deverá ser um mínimo.

É porque a diferença $-\frac{a^3dx}{xx}+\frac{a^3dx}{\sqrt{a^3x}}=0$, de onde tiramos $x=a$; e por consequência os outros dois lados serão também cada um iguais a *a*; assim o cubo satisfaz a questão.

Nestes dois problemas o autor pretende determinar, entre os paralelepípedos com o mesmo volume o que tem menor área. No primeiro caso é dada a medida de um dos lados do paralelepípedo concluindo-se depois que os outros lados terão de ser iguais. No segundo problema não é dada a medida de nenhum dos lados mas utiliza-se o facto de, pela alínea anterior, dois dos lados terem a mesma medida. Na sua demonstração o autor começa por determinar a função que nos dá metade da área total somando a área de cada uma das três faces distintas, de seguida determina o diferencial e os seus zeros concluindo depois o pretendido.

Exemplo XI

Um viajante parte de um lugar C para ir para o lugar F, deve atravessar dois campos separados por uma linha recta AEB. Suponhamos que ele percorre dentro do campo do lado de C o espaço a no tempo c, e no outro lado de F o espaço b no mesmo tempo c: procuramos por que ponto E na recta AEB ele deve passar, a fim de empregar o menor tempo possível para chegar de C a F. (pag.49)



Resolução:

Se fizermos $a.CE(u) :: c.\frac{cu}{a}$ e $b.EF(z) :: c.\frac{cz}{b}$ fica claro que $\frac{cu}{a}$ exprime os tempos que o viajante emprega a percorrer a recta *CE*, e $\frac{cz}{b}$ exprime o que emprega a percorrer *EF*; assim $\frac{cu}{a}+\frac{cz}{b}$ deve ser um mínimo. De onde se segue[13] que colocando *EG* perpendicular sobre a linha *AB*; o seno do ângulo *GEC* deve estar para o seno do ângulo *GEF*, como a está para b.

Posto isto, se descrevermos do ponto *E* com centro no intervalo *EC* o círculo *CGH*, e tracemos sobre a recta *AEB* as perpendiculares *CA, HD, FB* e sobre *CE, EF* as perpendiculares *GL, GI*; tem-se $a.b :: GL.GI$. Ora $GL = AE$ e $GI = ED$ porque os triângulos rectângulos *GEL* e *ECA, GEI* e *EHD* são iguais e semelhantes entre eles, como é fácil de verificar. É porque se designarmos o desconhecido *AE*, *x*; tem-se $ED = \frac{bx}{a}$ e designando os

[13] Exemplo IX

conhecidos *AB, f; AC, g; BF, h*; os triângulos semelhantes *EBF, EDH* irão dar $EB(f-x).BF(h)::ED\left(\frac{bx}{a}\right).DH=\frac{bhx}{af-ax}$. Mas porque os triângulos rectângulos *EDH, EAC*, que tem as hipotenusas *EH, EC* iguais, tem-se $\overline{ED}^2+\overline{DH}^2=\overline{EA}^2+\overline{AC}^2$, ou seja, em termos analíticos $\frac{bbxx}{aa}+\frac{bbhhxx}{aaff-aaafx+aaxx}=xx+gg$. De forma que subtraindo as fracções e ordenando a igualdade, vem

$$\begin{array}{llll} aax^4 & -2aafx^3 & +aaffxx & -2aafggx+aaffgg=0 \\ -bb & +2bbf & +aagg & \\ & & -bbff & \\ & & -bbhh & \end{array}$$

Podemos também determinar esta equação da maneira que segue, sem recorrer ao exemplo IX.

Denominemos os conhecidos *AB, f; AC, g; BF, h*; e o desconhecido *AE, x*; tem-se $a.CE(\sqrt{gg+xx})::c.\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}=au$ tempo que o viajante emprega a percorrer a recta CE. E da mesma forma $b.EF(\sqrt{ff-2fx+xx+hh})::c.\frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}=au$ tempo que o viajante emprega a percorrer a recta *EF*. O que faz $\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}+\frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}=$ a um mínimo; e portanto a sua diferença $\frac{cxdx}{a\sqrt{gg+xx}}+\frac{cxdx-cfdx}{b\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}=0$, de onde se tira, dividindo por cdx e subtraindo os incomensuráveis, a mesma igualdade que acima, então uma das raízes fornecerá a *AE* o valor que procuramos.

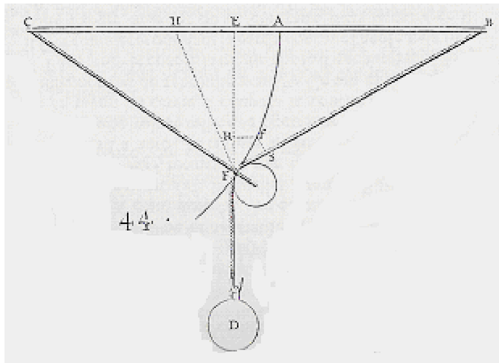
Este é um problema da vida real ligado à Física em que se pretende determinar o tempo mínimo para percorrer um percurso de duas partes que se percorrem a velocidades distintas. A demonstração é feita utilizando a relação entre ângulos e lados de triângulos rectângulos, a semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras para determinar a função a optimizar. Determinando por fim o diferencial e os respectivos zeros.

Exemplo XII

Seja uma roldana F que pende livremente no extremo de uma corda CF fixa em C, com um peso D suspenso da corda DFB que passa por cima da roldana F, e que está fixa em B, de forma que os pontos C, B situados na mesma linha horizontal CB. Suponhamos que a roldana e as cordas não sofrem nenhuma gravidade, perguntamos em que ponto o peso D ou a roldana F deve parar. (pag.51)

Resolução:

É claro, pelos princípios da Mecânica que o peso *D* irá descer o mais baixo que lhe for possível, em baixo da horizontal *CB*; donde se deduz que a linha que tem o peso *DFE* tem um máximo. É porque denominando os dados *CF, a; DFB, b; CB, c;* e o desconhecido *CE, x*; tem-se $EF = \sqrt{aa - xx}$, $FB = \sqrt{aa + cc - 2cx}$ e $DFE = b - \sqrt{aa + cc - 2cx} + \sqrt{aa - xx}$ que deve ter um máximo; e partindo a sua diferença $\frac{cdx}{\sqrt{aa+cc-2cx}} - \frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}} = 0$ de onde se tira $2cx^3 - 2ccxx - aaxx + aacc = 0$, e dividindo por $x - c$, vem $2cxx - aax - aac = 0$, então uma das raízes fornece a *CE* um valor tal que a perpendicular *ED* passa pela roldana *F* e o peso *D* que estão em repouso[14].



Neste problema Físico o autor pretende optimizar uma distância. Nesta resolução o autor aplica conhecimentos da Mecânica e o Teorema de Pitágoras para optimizar o segmento *DFE*. Por fim o autor determina o diferencial da função e os respectivos zeros.

Exemplo XIII

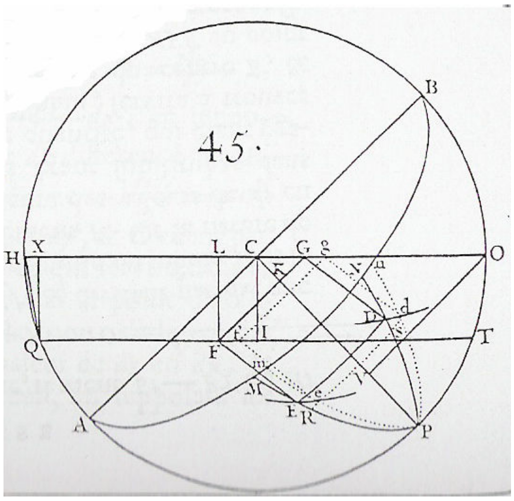
Dada a elevação do pólo, achar o dia com o menor crepúsculo. (pag.52)

Resolução:

Seja *C* o centro da esfera; *APTOBHQ* o meridiano; *HDdo* o horizonte; *QEeT* o circulo corpuscular paralelo ao horizonte; *AMNB* o equador; *FEDG* a porção da paralela ao

[14] Não apresentamos a outra parte da demonstração uma vez que envolve equações com mais do que uma variável, tema que não faz parte do nosso trabalho de investigação.

equador, que descreve o Sol no dia do mínimo crepúsculo, contido entre os planos do horizonte e o circulo crepuscular; *P* o pólo astral;



PEM, PDN os quartos dos círculos de declinação. O arco *HQ* onde *OT* a partir do meridiano compreendido entre o horizonte e o circulo crepuscular, e o arco *OP* de elevação do pólo são dados; e consequentemente os seus senos rectos *CI* ou *FL* ou *QX*, e *OV*.

Procuramos os senos *CK* do arco *EM* ou *DN* da declinação do Sol no momento em que descreve a paralela *ED*.

Se imaginarmos uma outra porção *fedg* duma paralela ao equador, infinitamente próxima de *FEDG*, com os quartos de círculo *Pem, Pdn*, é claro que o tempo que o Sol emprega a percorrer o arco *ED*, deve ser um mínimo, a diferença do arco *MN* que é a medida, e que desvia *mn* no momento em que *ED* desvia *ed*, deve ser nulo; de onde se verifica que os arcos pequenos *Mm* e *Nn*, e por consequência os arcos pequenos *Re, Sd* serão iguais entre eles. Ora os arcos *RE, SD* estão compreendidos entre as mesmas paralelas *ED, ed*, são também iguais, e os ângulos em *S* e em *R* são rectos. Assim os pequenos triângulos rectângulos *ERe, DSd* (que consideramos como rectilíneos[15] porque os seus lados são infinitamente pequenos, serão iguais e semelhantes; e por consequência as hipotenusas *Ee, Dd* irão ser também iguais entre elas.

Posto isto, as rectas *DG, EF, dg, ef* secções comuns dos planos *FEDG, fedg* paralelos ao equador com o horizonte e o círculo crepuscular, serão perpendiculares sobre os diâmetros *HO, QT*, pois os planos de todos estes círculos são perpendiculares cada um sobre o pano do meridiano, e as pequenas rectas *FG, fg* são paralelas. Assim $\sqrt{\overline{Dd}^2 - \overline{Gg}^2}$ ou $DG - dg = \sqrt{\overline{Ee}^2 - \overline{Ff}^2}$ ou $fe - FE$. Ora é claro pelo que ficou demonstrado

[15] Secção I, Art. 3: On demande qu'une ligne courbe puísse être considérée comme l'assemblage d'une infinité des lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce que est la même chose) comme un poligône d'un nombre infini de cotés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils sont entr'eux, la courbe de la ligne. On demande par exemple que la proportion de courbe Mm e l'arc de cercle MS puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle mSM puisse être censé rectiligne.

no artigo 50[16] que se metermos à descrição dentro de um semi-circulo duas aplicações infinitamente próximas, o pequeno arco que elas formam, será à sua diferença, como o raio está para o corte depois do centro; o que dá aqui (por causa dos círculos *HDO, QET)* $CO.CG :: Dd$ ou $Ee.DG - dg$ ou $fe - FE :: IQ.IF :: CO + IQ$ ou $OX.CG + IF$ ou GL. Mas por causas dos triângulos rectângulos semelhantes *CVO, CKG, FLG*, tem-se $CO.CG :: OV.GK$. E $GK.GL :: CK.FL$ ou QX. Então $OV.CK :: OX.XQ :: XQ.XH$ pela propriedade do círculo: ou seja se tomarmos *QX* pelo raio ou seno total no triângulo rectângulo *QXH*, então o ângulo *HQX* é de 9 graus porque os Astrónomos fazem o arco *HQ* de 18 graus, teremos como o seno total está para a tangente de 9 graus, da mesma forma o seno da elevação do pólo está para o seno de inclinação astral do Sol no tempo de mais pequeno crepúsculo. Donde se conclui que se subtrairmos 0,8002875 do logaritmo do seno de elevação do pólo, o resto será o logaritmo do seno procurado.

Este é um problema muito diferente dos anteriores. É um problema de Astronomia com uma demonstração feita por construção. Na demonstração o autor utiliza noções de Astronomia, relações entre ângulos e lados de triângulos e a semelhança de triângulos.

2.2.1.5. CONCLUSÃO

Esta é a primeira obra que analisamos em que se usa o Cálculo Diferencial para calcular o máximo ou o mínimo de uma qualquer função.

Nela enuncia os problemas de optimização como exemplos, apresentando de seguida a respectiva resolução. As ilustrações estão compiladas em páginas posteriores e não apresentadas ao longo de texto.

Para fazer a sua resolução o autor começa por equacionar a situação posta. Depois calcula a derivada da função e os zeros da derivada. Por fim conclui, que nesse ponto, a função tem um máximo ou um mínimo e apresenta a resposta ao problema posto.

Verificamos ainda que, na referida obra, são abordados os problemas de Geometria Plana, problemas de Geometria Espacial, problemas Aritméticos e também

[16] Exemple III.: Soit une demi roulette AMF, dont la base BF est moindre que la demi circonférence ANB du cercle générateur que a pour centre le point C. Il faut déterminer le point E sur le diamètre AB, en sorte que l'appliquée ED soit la plus grande qu'il est possible.

problemas da área da Física e da Astronomia. Pretende-se optimizar distâncias, áreas, produtos ou tempo.

Concluímos, assim, que alguns dos exemplos são problemas da vida real.

2.3. CONSOLIDAÇÃO: SÉCULO XVIII

No século XVIII deu-se a consolidação do Cálculo Diferencial e surgiram também alguns matemáticos relacionados com o nosso tema.

Leonhard Euler (1707-1783) já utilizava as notações que se usam actualmente. Escreveu a obra *Introductio in analysin infinitorum* (1748) que foi um dos livros didácticos mais conhecidos. Publicou ainda a obra *Mechanica* (1736), *Institutiones calculi diffferentialis* (1755) e *Institutiones calculi integralis* (1768-70).

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) também escreveu algumas obras nesta área. Publicou a obra *Lectures on Elementary Mathematics* e a obra *Théorie des fonctions analytiques*. Também as obras de Lagrange foram editadas noutras línguas, entre elas a Língua Portuguesa.

Etienne Bézout (1730-1783) escreveu a obra *Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine* (1764). Esta é composta de seis volumes dedicando-se cada um deles a temas distintos da Matemática. Em 1770-72 teve várias edições, sendo traduzida para outras línguas. É esta que vamos analisar neste período.

2.3.1. *COURS DE MATHÉMATIQUE* DE BÉZOUT

2.3.1.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Etienne Bézout

Data de nascimento e falecimento do autor: 1730 – 1783

Título: *Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine*

Ano, editora e lugar da primeira edição: 1764, Imp. H. Offray: Avignon

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1775

Localização da obra consultada: Biblioteca Joanina da Universidade de Coimbra. Cota: 4-2-7-27

2.3.1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Etiennne Bézout foi um Matemático francês, que nasceu em Nemours, em 1730 e faleceu em Paris em 1783. Ingressou na Academia das Ciências aos vinte e oito anos, distinguindo-se sempre pelo seu talento privilegiado e vasta cultura.

Foi autor de uma importante obra, parte da qual vamos analisar: *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine, avec un traité de navigation* (1764-69), e *Cours de mathématiques à l'usage du corps royal de l'artillerie*. (1770-72). 0s livros de Bézout foram durante muito tempo adoptados nas escolas portuguesas, e em Coimbra foram publicadas traduções de algumas das suas obras, feitas por Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá: *Elementos de Geometria, Elementos de Trigonometria Plana, Elementos de Análise e Elementos de Aritmética*.

2.3.1.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

A obra *Cours de mathématiques (, a l'usage dés grades du pavillon et de la marine)* é composta por 6 volumes, abarcando cada um, temas distintos na área da Matemática. O primeiro volume, *Eléments d'Arithmétique*, trata de Aritmética, o segundo, *Contenant les Eléments de Géométrie, la Trigonométrie Rectiligne & la Trigonométrie Sphérique*, é dedicado à Geometria e à Trigonometria, o terceiro, *Contenant l'Algèbre & L'application de cette Science à l'Arithmétique & á la Géométrie*, contempla o cálculo de quantidades algébricas e a aplicação da Álgebra à Aritmética e à Geometria, o quarto, *Contenant les Príncipes Generaux de la Mechanique*, *precedes dês Príncipes de Calcul que servent d'introductions aux Sciences Physico-Mathematiques*, é dedicado, na primeira parte, ao cálculo diferencial e integral e, na segunda, aos princípios gerais da Mecânica, o quinto, Suite de la quatrieme partie, contenant lápplication de la Mechanique, à differents cas de mouvement & d'Equilibre, é uma continuação do quarto volume e contém as aplicações da Mecânica a diferentes tipos de movimento e ao equilíbrio, por fim, o sexto desenvolve o tratado de navegação.

É no quarto volume, dedicado ao Cálculo Diferencial e Integral e aos Princípios Gerais da Mecânica, que encontramos, na secção dedicada ao Cálculo Diferencial, os problemas de Máximos e Mínimos. Vejamos então, como está estruturada esta secção:

Calculo Diferencial

Das diferenciais segundas e terceiras

Das diferenciais das diferentes quantidades afectas de senos, cossenos

Das diferenciais logarítmicas

Das diferenciais de quantidades exponenciais

Aplicações das regras precedentes

Às subtangentes, Tangentes, Normais das curvas

Aos limites das linhas curvas, e em geral aos limites das quantidades e aos ***problemas de máximos e mínimos***

Dos pontos múltiplos

Dos pontos de inflexão

Reflexão sobre Máximos e Mínimos

Dos pontos de reversão, e das diferentes espécies de contacto dos ramos de uma curva

Dos raios da curvatura ou da Evoluta

Outras aplicações do Cálculo Diferencial.

Todas as imagens que são referidas ao longo do volume encontram-se compiladas no final do livro. Estas estão distribuídas por várias páginas maiores do que as páginas com o texto e dobradas.

2.3.1.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

É na parte do capítulo sobre Cálculo Diferencial, dedicada às aplicações das regras precedentes, que encontramos os problemas de Máximos e Mínimos.

Esta parte começa por falar dos limites das linhas curvas e das quantidades. Segue-se a explicação do método para calcular máximos e mínimos de uma função ao qual dá o nome *de Maximis & Minimis*. Depois, apresenta cinco problemas de optimização e a respectiva resolução.

Analisemos agora cada um desses problemas, bem como a resolução apresentada.

Problema I

Dividir um número dado em duas partes tais, que o seu produto seja um máximo.

Resolução:

Representando uma dessas partes por x, a outra será *a* – x, e o produto de ambas será $ax-xx$; expressão que é susceptível de maximum, como veremos se substituirmos sucessivamente *o* e *a* em lugar de x. Supondo pois $y=ax-xx$, teremos $\frac{dx}{dy}=\frac{l}{a-2x}$. Se igualarmos o numerador a nada, virá $l=0$, que é absurdo; logo não podemos achar o maximum, senão igualando o denominador a nada. Fazendo isso, vem $a-2x=0$, e consequentemente $x=\frac{1}{2}a$ que reduz o produto a $\frac{1}{4}a^2$. Logo de qualquer modo que se divida um número em duas partes, o produto delas será o maior possível, quando cada uma for metade do mesmo númerop; e consequentemente o rectângulo formado pelas partes de uma linha a será o maior possível, quando cada uma delas for $\frac{1}{2}a$.

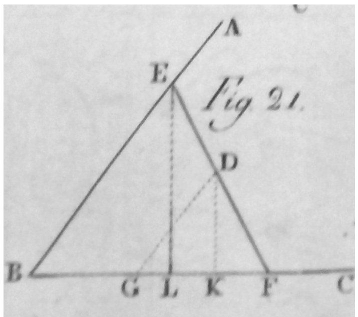
De seguida o autor apresenta o caso geral:

Dividir um número dado a em duas partes tais, que o produto de uma potência determinada de uma delas pela mesma ou outra potência de outra parte seja a maior possível.

Este é um problema Aritmético em que se pretende optimizar o produto das duas partes de um número. Na sua resolução o autor utiliza a noção de distância, para indicar um dos números em função do outro, para depois equacionar o problema em ordem a uma das variáveis. De seguida calcula o diferencial e conclui que o zero é então o máximo. Refere ainda que o produto das duas partes de um número é máximo quando cada uma das partes for metade do número. O autor deduz ainda que um rectângulo terá área máxima, dada a soma das duas medidas, quando estas forem iguais.

Problema II

Achar entre todas as linhas que se podem tirar por um mesmo ponto D, dentro do ângulo conhecido ABC (fig. 21), qual é a que forma com os lados deste ângulo o menor triângulo possível.



Resolução:

Havendo pelo ponto D conduzido DG paralela a AB, DK perpendicular sobre BC, uma recta qualquer EF, tire-se pelo ponto de encontro E de EF com AB a linha EL paralela a DK. Seja EG = a, DK = b, e a base BF do triângulo BEF = x. Bem se vê que passado um certo termo, quanto mais crescer BF, tanto mais crescerá o triângulo, e que pelo contrário se BF diminuir, também o triângulo diminui, mas só até certo limite; porque se BF viesse a ser quase igual a BG, a recta EDF seria quase paralela a AB, isto é, estaria próxima a confundir-se com GD, e então o triângulo seria extremamente grande: há pois um valor de BF entre x = a e x = ∞, que dá o menor triângulo possível. Para o achar, busque-se a expressão geral do triângulo BEF.

Os triângulos semelhantes BEF, GDF dão GF : BF :: DF : EF, e os dois DKF, ELF dão DF : EF :: DK : EL; logo GF(x - a) : BF(x) :: DK(b) : EL = $\frac{bx}{x-a}$; será pois a superfície do triângulo BEF ou $\frac{EL.BF}{2}=\frac{4bx^2}{(x-a)}$. Assim diferenciando $\frac{x^2}{x-a}$, acharemos x = 2a por um cálculo já feito anteriormente. Logo se tomarmos BF = 2BG, a linha FDE que se tirar por D, dará o menor triângulo procurado EBF = 2ab.

Este é um problema de Geometria Plana onde se pretende optimizar a área de um triângulo. Aplica-se a semelhança de triângulos para escrever a equação em ordem a uma só variável e depois determina-se o diferencial e os respectivos zeros.

Problema III

Achar o maior paralelepípedo de todos os que têm a mesma superfície e a mesma altura.

Resolução:

Seja h a altura do paralelepípedo, ce a sua superfície, x e y os dois lados do rectângulo que lhe serve de base. A superfície total compõe-se de seis rectângulos, dos quais dois tem cada um a altura h e a base x, dois tem a altura h e a base y, e os dois últimos tem a base x e a altura y; assim a superfície total $ce = 2hx + 2hy + 2xy$ que é constante. Como a solidez hxy deve ser maior do que todas as da mesma superfície, teremos $xdy + ydx = 0$. Tirando desta equação o valor *dx*, e substituindo-o na expressão diferencial da superfície $2hdx + 2hdy + 2xdy + 2ydx = 0$, acharemos $y = x$; logo a base deve ser um quadrado. Para ter o lado deste quadrado, poremos em lugar de *y* o seu valor x na equação $2hx + 2hy + 2xy = ce$, e teremos $4hx + 2x^2 = ce$, que dá $x = -h \pm \sqrt{hh + \frac{1}{2}ce}$; excluindo pois a raiz negativa, que é inútil no caso presente, será $-x \pm \sqrt{hh + \frac{1}{2}ce}$ o valor conveniente de x.

Neste problema de Geometria Espacial pretende-se optimizar o volume de um paralelepípedo dada a sua área e a sua altura. Utiliza a fórmula da área do paralelepípedo para determinar uma das medidas da base em função da outra medida. Para a sua resolução o autor determina os diferenciais e os zeros do diferencial. Como obteve dois zeros para o diferencial, exclui o negativo concluindo que o outro zero é o valor pretendido.

Querendo agora saber *qual deve ser a altura h, para que o paralelepípedo tenha maior solidez entre todos os da mesma superfície*, advertiremos, que como a base deve ser um quadrado xx, a solidez irá exprimir-se por *hxx*. Diferenciando pois esta expressão na hipótese de *h* e *x* serem variáveis, e igualando o diferencial a nada, teremos $dh = -\frac{2hdx}{x}$. Substituindo este valor em $4hdx + 4xdh + 4xdx = 0$, que exprime então a outra condição de ser constante a superfície, acharemos *h* = *x*; logo o paralelepípedo procurado deve ser um cubo, porque a altura *h* deve ser igual ao lado do quadrado, que serve de base. Para achar agora o lado desse cubo, substitua-se x em lugar de *h* na equação $4hx + 2x^2 = ce$ e virá $6x^2 = ce$, que dá $x = \sqrt{\frac{ce}{6}}$. Logo entre todos os paralelepípedos de superfície constante, o que tem maior capacidade é o cubo, cujo lado é a raiz quadrada da sexta parte da mesma superfície.

Nesta parte o autor prova que o paralelepípedo com maior volume, dada a sua área, é o cubo.

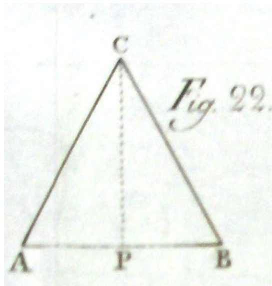
De seguida o autor apresenta a seguinte nota:

Procedemos do mesmo modo para achar o cilindro recto de maior capacidade entre todos os da mesma superfície.

Problema IV

Achar entre todos os triângulos do mesmo perímetro e base, qual é o que tem maior superfície.

Resolução:



Tire-se a perpendicular CP (Fig. 22), e seja a base AB = a, o perímetro do triângulo ABC = c, AP = x, CP = y; será $PB = a - x$, $AC = \sqrt{xx+yy}$, e $CB = \sqrt{yy+(a-x)^2}$. Logo teremos o perímetro ou $c = a + \sqrt{xx+yy} + \sqrt{yy+(a-x)^2}$, e a superfície $= \frac{ay}{2} =$ Max. Esta última condição dá $\frac{ady}{2} = 0$, logo $dy = 0$; e substituindo este valor na primeira equação depois de diferenciada, a saber $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{ydy-(a-x)dx}{\sqrt{yy+(a-x)^2}} = 0$, virá $x\sqrt{yy+(a-x)^2} = (a-x)\sqrt{xx+yy}$, isto é $xx = (a-x)^2$, que dá $x = \frac{1}{2}a$, por onde se mostra, que o triângulo deve ser isósceles. Levantemos pois uma perpendicular no meio de AB, e havendo descrito do ponto B com o raio igual à metade da diferença entre o perímetro c e a base a um arco, que corte a perpendicular em C, se tirarmos CB e CA, teremos o triângulo de maior superfície entre todos os isoperimétricos, construídos sobre a mesma base.

Neste problema o autor prova que o triângulo de maior área, dado o seu perímetro e a medida da base é o triângulo isósceles. Na sua resolução o autor aplica a noção de distância e o Teorema de Pitágoras para escrever a função a optimizar em ordem a uma só variável. Também esta resolução é feita usando diferenciais e calculando os respectivos zeros e a função que se obtém é uma função irracional.

De seguida, o autor apresenta a forma como resolver o seguinte problema:

Saber em geral, qual é o triângulo de maior superfície entre todos os isoperimétricos.

O autor apresenta ainda algumas notas/observações acerca da Resolução, bem como outras formas de demonstrar.

Explica ainda a forma de resolver do seguinte problema:

Dividir uma quantidade a em três partes x, y, a – x -y, tais que o produto de todas seja o maior possível.

Resolução:

Teremos $d\left[xy\left(a-x-y\right)\right]=0$. Porem em lugar de diferenciar de uma vez em ordem às duas variáveis x, y, diferenciamos somente em ordem a x, e virá $a-2x-y=0$, donde se conclui $x=\frac{1}{2}(a-y)$; valor que muda o produto em $\frac{1}{4}y(a-y)^2$. Diferenciando agora relativamente a y, acharemos $(a-y)^2=2y(a-y)$, que dá $y=\frac{1}{3}a$; logo as partes devem ser iguais, cada uma, a um terço da quantidade proposta.

É ainda apresentada uma outra forma de demonstrar este mesmo resultado.

Problema V

Achar entre todos os quadriláteros isoperimétricos, qual é o que tem maior superfície.

Resolução:

Abaixem-se dos ângulos C e D sobre o lado AB as perpendiculares DE, CF, e conduza-se por D a recta DK paralela a AB. Seja AE = s, DE = t, AF = u, CF = x, BF = y, o perímetro do quadrilátero igual a a; e os triângulos rectângulos darão $DA=\sqrt{ss+tt}$, $DC=\sqrt{(s+u)^2+(x-t)^2}$, $CB=\sqrt{xx+yy}$; logo será $a=u+y+\sqrt{ss+tt}+\sqrt{(s+u)^2+(s-t)^2}+\sqrt{xx+yy}$. Por outra parte $ABCD=DEFC+CFB-DAE=(t+x)\frac{s+u}{2}+\frac{xy}{2}-\frac{st}{2}$; logo devemos diferenciar esta quantidade, e a equação precedente. Porém como os radicais fariam o calculo subsequente muito complicado, suponhamos todos três constantes, o que dará … $d\sqrt{ss+tt}=0$ ou $sds+tdt=0$ … $(s+u)(ds+du)+(x-t)(dx-dt)=0$ … $xdx+ydy=0$. A equação do perímetro sendo diferenciada nesta suposição dá $du+dy=0$, e a condição do máximo dá $udt + sdx + udx + tdu + xds + xdu + xdy + ydx = 0$. Destas cinco equações diferenciais a primeira dá $ds = -\frac{tdt}{s}$, a terceira dá $dx = -\frac{ydy}{x}$ e a quarta dá $dx = -dy$. Substituindo estes valores na segunda e na quinta, teremos as equações … $-(tdt + sdy)(u + s)x - (ydy + xdt)(x - t)s = 0$ … $suxdt - suydy - ssydy - tsxdy - xxtdt - syydy = 0$; as quais mostram que $s = 0$; logo o ângulo DAB deve ser recto, e conseguintemente a equação do perímetro se torna em $a = u + y + t + \sqrt{u^2 + (x-t)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}$, e a expressão da superfície em $(t + x)\frac{u}{2} + \frac{xy}{2}$.

Diferenciemos pois supondo somente constantes os dois radicais; teremos … $udu + (x - t)(dx - dt) = 0$ … $xdx + ydy = 0$ … $dt + du + dy = 0$ … $u(dt + dx) + (t + x)du + xdy + ydx = 0$.

A segunda destas equações dá $dy = -\frac{xdx}{y}$; a terceira dá $dt = -du - dy = \frac{xdx - ydu}{y}$; e substituindo na primeira e na quanta, teremos as equações … $ydu + (x - t)(ydx - xdx + ydu) = 0$ … $u(xdx - ydu + ydx) + (t + x)ydu - x^2dx + y^2dx = 0$, as quais mostram que $y = 0$; logo o ângulo CBA deve ser recto, e conseguintemente a equação do perímetro se reduz a $a = t + u + x + \sqrt{u^2 + (x-t)^2}$, e a expressão da superfície $a(t + x)\frac{u}{2}$.

Diferenciemos agora, não supondo constante senão o radical; teremos … $udu + (x - t)(dx - dt) = 0$ … $dt + du + dx = 0$ … $u(dt + dx) + (t + x)du = 0$. A segunda dá $dt = -dx - du$; substituindo pois este valor nas outras duas, e combinando-as virá $x = t$; logo a equação do perímetro se reduz a $a = 2t + 2u$, e a expressão da superfície a ut.

Estas duas expressões sendo diferenciadas dão $dt + du = 0$ … $udt + tdu = 0$; logo $t = u$. Concluiremos pois, que as linhas AB, AD, DC, CB são iguais entre si; e como o ângulo A deve ser recto, o quadrilátero procurado necessariamente será um quadrado.

Neste problema o autor mostra que o quadrilátero de maior área, dado o seu perímetro, é o quadrado. Esta resolução é mais complexa do que as dos problemas anteriores. O autor começa por decompor o quadrilátero em três triângulos rectângulos e um rectângulo, sendo que o perímetro do quadrilátero será então a soma das hipotenusas dos três triângulos mais o comprimento do rectângulo. Aplica então o Teorema de Pitágoras para determinar as medidas das hipotenusas, depois apresenta o perímetro do quadrilátero e a função a optimizar. Utilizando os diferenciais destas duas expressões chega ao diferencial do qual pretende determinar os zeros concluindo, finalmente, que o quadrilátero de maior área, dado o seu perímetro é o quadrado.

O autor ainda apresenta a seguinte observação/generalização:

Esta propriedade podia achar-se com mais facilidade; mas não satisfaríamos então ao que nos propusemos, isto é, a mostrar de que modo a liberdade de tomar esta ou aquela quantidade por constante facilita o cálculo em muitos casos. Se aplicarmos mesmo aos outros polígonos, acharemos que em geral de todas as figuras isoperimétricas do mesmo número de lados, o polígono regular desse número de lados é o que tem maior superfície; donde se segue, que de todas as figuras isoperimétricas o círculo é a que tem maior superfície.

2.3.1.5. CONCLUSÃO

Nesta obra, Bézout designa os problemas de optimização como problemas, o que não acontecia nas obras analisadas anteriormente. Estes são seguidos das respectivas resoluções.

Para além dos problemas apresentados, o autor aborda ainda, em algumas situações, casos particulares ou generalizações dos problemas apresentados. Estes nem sempre apresentam Resolução.

Os problemas apresentados são Aritméticos, de Geometria Plana e de Geometria Espacial. Pretende-se optimizar áreas, volumes ou produtos.

Também nesta obra se utiliza o Cálculo Diferencial para resolver os problemas de máximos e mínimos.

Para fazer a resolução, o autor começa por equacionar o problema, de seguida calcula a respectiva derivada e os zeros desta. Por fim apresenta a resposta ao respectivo problema.

2.4. INSTITUCIONALIZAÇÃO: SÉCULO XIX

O século XIX é considerado o período de Ouro da Matemática, uma vez que se produziu mais durante este século do que em todas as épocas precedentes.

Neste espaço de tempo encontramos também vários autores relacionados com o nosso tema de investigação. São, por norma, professores universitários na área do Cálculo Diferencial e Integral que publicam os seus apontamentos. Muitos destes livros eram depois traduzidos e usados como manuais noutras universidades e até noutros países. De todos iremos seleccionar apenas dois para analisar detalhadamente. Vejamos alguns desses autores e quais as obras que escreveram.

Silvestre-François Lacroix (1765-1843) publicou a obra *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* (1806). Augustin-Louis Cauchy (1789-1875) foi um importante autor de livros didácticos: *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1821), *Résumé dés leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) e *Leçons sur le calcul différentiel* (1829). Um dos seus maiores sucessores foi Jacques Charles François Sturm (1803 – 1855) igualmente autor de um livro didáctico, *Cours d'Analyse* (1857). Algum tempo depois Joseph Alfred Serret (1819-1885), professor posterior a Sturm, publicou a obra *Cours de Calcul Differenciel et Integral* (1878). Bernhard Riemann (1826-1866) também desenvolveu alguns trabalhos nesta área e os seus escritos estão compilados na obra *Oeuvres mathématiques de Riemann* (1898). Por fim, Henri Lebesgue (1875-1941), que foi professor, e que editou as suas lições, sendo a primeira obra *Leçons sur séries trigonométriques* (1903) e a outra *Leçons sur l'intégration et la recherche dés fonctions primitives* (1904).

Seleccionámos, nesta parte, para analisar, a obra de Sturm e a de Serret.

2.4.1. *COURS D'ANALYSE DE L´ÉCOLE POLYTECHNIQUE* DE STURM

2.4.1.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Jacques Charles François Sturm

Data de nascimento e falecimento do autor: 1803 – 1855

Título: *Cours D'Analyse de L´École Polytechnique*

Ano, editora e lugar da primeira edição: 1857, Gauthier-Villars: Paris

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1884, Gauthier-Villars: Paris

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Cota: 26-01 STU V.1 7 Ed.

2.4.1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Jacques Charles François Sturm nasceu em Genebra, Suiça, em 1803. Provem de uma família Protestante que lhe deu uma boa educação. O seu pai Jean-Henri Sturm era professor de aritmética e faleceu quando Sturm tinha 16 anos. Nessa altura, deixou de estudar Humanidades e começou a estudar Matemática na Academia de Genebra com Simons Lhuinier, em 1821, que, de imediato, reconheceu em Sturm um génio matemático. Entretanto Lhuinier reformou-se e ficou como seu sucessor Jean Jacques Schaub, pessoa que inspirou e ensinou Sturm e também o ajudou financeiramente, na Academia, pois, desde a morte do seu pai que a família de Sturm estava com consideráveis dificuldades económicas.

Quando deixou a Academia, Sturm foi apontado como tutor do filho mais novo de Mme de Staël, no Châteaux de Coppet, perto de Genebra. Terminou os seus estudos em Maio de 1823 e, como tinha muito tempo livre, começou a estudar, a investigar e a escrever artigos sobre Geometria, que publicou no *Annales de mathématiques purés et appliqués* de Gergonne.

Pelo final de 1823 a família mudou-se para passar uma temporada em Paris e Sturm acompanhou-a. Chegado à cidade parisiense, foi inserido nos círculos científicos pela família e onde conheceu Lalace, Poisson, Fourier, Gay-Lussac, Ampere, entre outros.

Em Maio de 1824 regressou a Geneva, mas em Dezembro de 1825 regressou de novo a Paris. Em 1829 publicou um dos seus artigos mais famosos *Mémoire sur la résolution des équations numériques.*

Inicialmente não foi fácil para Sturm conseguir emprego, uma vez que era estrangeiro e Protestante. Mas após a revolução de Julho de 1830, Sturm conseguiu ser nomeado professor de Matemática, no Collège Rollin. Em 1836 foi nomeado para a Académie des Sciences. Durante estes anos publicou alguns resultados importantes acerca de Equações Diferenciais.

Entre 1838 e 1840 foi professor de Análise e Mecânica, na École Polytechnique, em Paris e sucedeu a Poisson, na cadeira de Mecânica, da Faculte des Sciences em Paris.

Durante Cerca de 10 anos deu excelentes aulas, mas desejava dar aos seus alunos os melhores cursos possíveis pelo que, despendia, muito tempo, a preparar as suas lições para os cursos de Cálculo Diferencial e Integral e de Mecânica Racional. Estes cursos, intitulados Cours D'Analyse de l'École Polytechnique 2 Vol. (1857-63) e Cours de mécanique de l'École Polytechnique 2 Vol. (1861), ambos publicados postumamente, tornaram-se nos textos mais usados.

Apesar de não ter muito tempo para pesquisar, continuava a oferecer contribuições importantes para a Geometria Infinitesimal, Geometria Projectiva e Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies e Óptica Geométrica.

A partir de 1851 começou a ficar com problemas cardíacos e acabou por falecer em 1855.

2.4.1.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

Uma vez que esta obra tinha como objectivo ser utilizada como manual escolar, apresenta por isso, uma estrutura bastante distinta das obras analisadas anteriormente.

Ela está dividida em dois tomos. O primeiro, que vamos analisar, está dividido em duas partes: A primeira trata do Cálculo Diferencial e a segunda do Cálculo Integral. Cada uma destas duas partes está subdividida em lições. A parte dedicada ao Cálculo Diferencial é constituída por 26 lições, abarcando os vários sub – temas do Cálculo Diferencial. Em cada uma das lições Sturm apresenta as noções e definições relacionadas com o tema, bem como os teoremas e respectivas demonstrações. Expõe também notas, exemplos, observações e, no final de cada lição, um conjunto de exercícios com a respectiva solução, relacionados com o tema da lição.

As imagens utilizadas estão inseridas ao longo do texto e não no final da obra ou compiladas numa página, como vimos nas obras anteriores.

A décima quarta lição (pag. 167 – 179) é dedicada aos máximos e mínimos de funções de uma variável. É nesta lição que encontramos os problemas de máximos e mínimos. Vejamos como Sturm organiza esta lição:

Quatorzième Leçon : Maximum et minimum des fonctions d'une variable

Maximums et minimums de fonctions d'une seule variable indépendante

Applications

Maximums et minimums d'une fonction implicite

No final da lição Sturm apresenta uma lista de sete exercícios relacionados com a lição.

2.4.1.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

Como já foi referido, é na décima quarta lição que Sturm aborda os problemas de máximos e mínimos e após a respectiva aplicação do método de cálculo dos máximos e mínimos, apresenta algumas aplicações das quais duas são problemas de máximos e mínimos.

Ambas as aplicações estão também enunciadas e resolvidas na obra de Serret de uma forma muito semelhante.

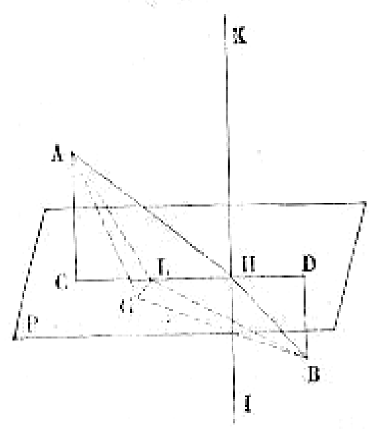
2ª Aplicação

São dados dois pontos A e B, situados em dois meios diferentes e separados por uma superfície plana P. Um móvel move-se no primeiro meio com uma velocidade uniforme u, e no segundo meio com uma velocidade uniforme v; procuramos o caminho AHB que o móvel deve fazer para ir de A a B no tempo mais curto. (pag. 170)

Resolução apresentada:

É claro antes de mais que este caminho deve ser composto de linhas rectas. Eu digo ainda que a linha cortada que resolve este problema deve estar no plano ABCD, conduzido pelas perpendiculares AC, BD ao plano P. Com efeito, suponhamos que esta linha é AGB e que ela intersecta o plano P no ponto G situado fora do plano ABCD. Tracemos GL perpendicular a CD, e juntemos AL e BL. Os triângulos AGL e BGL são rectângulos em L, tem-se AL<AG e BL<BG; assim, o móvel vai mais rapidamente do ponto A ao ponto B seguindo o caminho ALB do que seguindo o caminho AGB.

Fig 9.



Procuremos, no plano ABCD, perpendicular ao plano P, a linha AHB, que é percorrida pelo móvel no menor tempo possível.

Seja AC = a, BD = b, CD = c e CH = x;

o tempo que o móvel emprega para ir de A a H é $\frac{AH}{u} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u}$, e o que emprega para ir de Há B é $\frac{HB}{v} = \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v}$; assim, a função da qual pretendemos calcular o mínimo é

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v}$$

calculemos quando é que

$$f'(x) \text{ ou } \frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0$$

ou seja

$$\frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c-x}{v\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

Se quisermos resolver esta equação em ordem a x, deveremos elevar os dois membros ao quadrado, e teremos de seguida de resolver uma equação do quarto grau. Mas como

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin CAH = \sin AHK,$$

$$\frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = \sin HBD = \sin BHI$$

verificamos que, no caso do mínimo (a função f(x) não tem máximo), temos

$$\frac{\sin AHK}{u} = \frac{\sin BHI}{v} \text{ ou } \frac{\sin AHK}{\sin BHI} = \frac{u}{v}$$

Na teoria da luz, a quantidade $\frac{u}{v}$, razão das velocidades da luz nos dois meios, é o índice da refracção da luz, na passagem do primeiro meio para o segundo.

Este é um problema de Física que já surgiu anteriormente. Nele, pretende-se optimizar uma distância, repartida em duas partes em que um objecto se desloca a velocidades distintas. Na sua resolução surge a função a derivar como f(x) e não como y como anteriormente, depois calcula a sua derivada e respectivos zeros. Para equacionar o problema, o autor decompõe a figura em triângulos rectângulos, utilizando depois o Teorema de Pitágoras e as funções trigonométricas para relacionar os lados destes triângulos. A função obtida é uma função irracional.

4ª Aplicação

Determinar a distância mínima de um ponto dado M (a, b) a uma curva da qual conhecemos a equação (pag. 172)

$$(1)\quad y = f(x)\,.$$

Resolução apresentada:

Juntemos MK, K é um ponto qualquer da curva. Tem-se

$$\overline{MK}^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2\,.$$

Igualando a zero o diferencial desta expressão, temos

$$(x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}=0$$

equação que se transforma em

$$(2)\quad \frac{y-b}{x-a}.\frac{dy}{dx}+1=0$$

Ora esta relação entre $\frac{dy}{dx}$, coeficiente angular da tangente à curva dada no ponto *(x, y)*, e $\frac{y-b}{x-a}$, coeficiente angular da recta MK, mostra que estas duas rectas são perpendiculares entre elas. Assim a recta mínima deve cortar a curva dada num ângulo recto.

Se a distância MK for susceptível de um máximo, determiná-lo-emos ainda pela resolução das equações (1) e (2).

Consideremos em particular o círculo cuja equação é

$$x^2+y^2=r^2\,.$$

Tem-se $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, e a relação (2) ficará

$$1-\frac{y-b}{x-a}.\frac{x}{y}=0$$

Para determinar *x* e *y,* temos as duas equações

$$x^2+y^2=r^2$$

$$y=\frac{b}{a}x$$

que tomadas simultaneamente, representam os pontos de intersecção do círculo dado com a recta MO. Então KM será a distância mínima, e K'M a distância máxima, como verificaremos facilmente considerando as derivadas seguintes.

Mas apresenta-se aqui uma singularidade que podemos explicar pela definição de máximo e mínimo.

Suponhamos que o ponto dado é o ponto N situado sobre o eixo das abcissas a uma distância *a* do centro. O quadrado da distância NH será representado pela expressão

$$y^2 + (x-a)^2\,;$$

ou seja por

$$r^2 - 2ax + a^2.$$

Ora a derivada desta expressão é uma quantidade constante ($-2a$) que, por consequência, não pode ser igualada a zero. Assim, como existe uma distância mínima que é NA, não a obteremos pelo mesmo processo. Esta vem do facto de, depois da definição, uma função é mínima para um certo valor da variável, porque ele aumenta pelos valores maiores e mais pequenos dessa variável. Ora, se NH é considerado como uma função de x, NA não é mais um mínimo, pois esta função, real para os valores de *x* menores do que *r*, tornam-se imaginários para os valores maiores.

Neste problema de Geometria Analítica, o autor pretende optimizar a distância entre um ponto e uma curva dada. Na resolução desta aplicação o autor utiliza a fórmula da distância entre dois pontos para equacionar o problema. Depois determina o diferencial dessa expressão e iguala-o a zero. Trabalha então com a equação do diferencial igualada a zero e com a função da curva para determinar a solução óptima. Aplica ainda a segunda derivada para verificar se, de facto, se trata de um máximo ou de um mínimo.

No final da lição Sturm apresenta uma lista de exercícios seguidos, cada um deles, da respectiva solução.

1. *Qual é o maior quadrilátero que conseguimos formar com quatro lados dados?* (pag. 178)

Solução: O Quadrilátero inscritível.

2. *Determinar sobre uma circunferência dada um ponto tal, que a soma das suas distâncias a dois pontos dados seja um máximo ou um mínimo.* (pag. 178)

Solução: O ponto de contacto da circunferência e de uma elipse, tangente ao círculo, sendo como focos os dois pontos dados.

3. *Inscrever numa esfera dada um cone tal que a superfície total seja um máximo.* (pag. 178)

Solução: Designando por x a altura e por *r* o raio da esfera, tem-se $x = \frac{23-\sqrt{17}}{16}r$.

4. *Circunscrever a uma esfera dada um cone tal que o volume seja mínimo.* (pag. 178)

Solução: Usando as mesmas notações.

$$x = 4r \text{ , vol. max.} = \frac{8}{3}\pi r^3$$

5. *Entre todas as parábolas que podem descrever dois corpos pesados partindo de um ponto dado com uma velocidade dada, determinar a que tem a área maior.* (pag. 178)

Solução: Parábola descrita por um corpo lançado numa direcção com uma inclinação de 60 graus em relação ao horizonte.

6. *Entre todas as cordas com o mesmo comprimento inscritas numa curva dada, determinar a que corta o segmento maior ou mais pequeno.* (pag. 179)

Solução: A corda deve formar ângulos iguais com as tangentes à curva feitas pelas suas extremidades.

7. *Duas rodas circulares exteriores uma à outra sobre um mesmo plano rodam uniformemente em tornos dos seus centros fixos, uma faz duas voltas, a outra faz três voltas por segundo. Determinar os instantes e as posições das duas rodas para os quais dois pontos marcados sobre as suas circunferências estejam à maior ou à menor distância um do outro.* (pag. 179)

Este exercício não apresenta solução.

2.4.1.5. CONCLUSÃO

Nesta obra verificamos que os problemas de optimização surgem em duas situações distintas. Primeiro, após a explicação do método de cálculo de máximos e mínimos, o autor apresenta algumas aplicações do método, bem como a respectiva resolução. No final do capítulo ou lição o autor apresenta um conjunto de exercícios de aplicação com a respectiva solução. Esta é a primeira obra analisada que apresenta, no final do capítulo, exercícios de aplicação.

Nestas aplicações e exercícios são abordados problemas da Física, de Geometria Plana e de Geometria Espacial, onde se pretende optimizar distâncias, áreas, volumes e tempo.

A primeira aplicação pode ser designada de um problema da vida real.

Nas resoluções apresentadas o autor começa por equacionar o problema; seguidamente, calcula a respectiva derivada e os zeros da mesma; por fim tira as conclusões em relação ao extremo, apresentando depois a resposta ao problema.

2.4.2. COURS DE CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL DE SERRET

2.4.2.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Joseph Alfred Serret

Data de nascimento e falecimento do autor: 1819 – 1885

Título: *Cours de Calcul Differentiel et Integral*

Ano, editora e lugar da primeira edição: 1878, Gauthier-Villars: Paris

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1879, Gauthier-Villars: Paris

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Cota: 26-01 SER T.1.

2.4.2.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Joseph Alfred Serret nasceu em Paris, em 1819. Licenciou-se na École Polytechnique de Paris em 1840. Em 1848 tornou-se um examinador de entrada da École Polytechnique. Posteriormente, em 1861 tornou-se professor de Mecânica Celeste no Collège de France, e dois anos depois foi nomedado para a cadeira de Cálculo Diferencial e Integral na Sorbone. Tornou-se membro do Bureau des Longitudes em 1873.

Serret desenvolveu um trabalho importante na área da Geometria Diferencial. Juntamente com Bonnet e Bertrand fez grandes avanços nessa área. A fórmula fundamental na teoria de curvas no espaço é a fórmula de Frenet-Serret.

Escreveu, em 1878, uma obra constituída por dois tomos, *Cours de Calcul Differentiel et Integral*, contendo a substância das aulas de Cálculo Diferencial e Integral que tinha leccionado na Sorbonne e na Faculté des Sciences de Paris.

Em 1860 sucedeu a Poisot, na Académie des Ciences e onze anos depois retirou-se para Versailles quando a sua saúde se começou a deteriorar.

Também trabalhou na área da Teoria dos Números, Cálculo e Mecânica. Editou os trabalhos de Lagrange, que foram publicados em 14 volumes, entre 1867 e 1892. Editou ainda a 5º edição, de Monge, em 1850.

2.4.2.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

A obra de Serret é constituída por dois tomos. O primeiro é dedicado às regras do Cálculo Diferencial e ás aplicações deste Cálculo à Geometria e o segundo é dedicado ao Cálculo Integral.

O primeiro tomo, obra que vamos analisar, está dividida em 12 partes que o autor intitula de Capítulos.

O Capítulo VI (pag. 198 – 240) é dedicado à teoria de máximos e mínimos. Vejamos como está estruturado este capítulo:

Chapitre VI: Théorie des Maxima et des Minima

Des maxima et des minima des fonctions d'une seule variable

Application à quelques exemples

Remarque sur les maxima et les minima relatifs

Cas des fonctions implicites d'une seule variable indépendante

Des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables indépendantes

Application à quelques exemples

Cas où les dérivés partielles d'une fonction de plusieurs variables cessent d'être déterminés quand on donne aux variables les valeurs qui répondent au maximum ou au minimum

Cas des fonctions implicites de plusieurs variables indépendantes

Remarque sur le cas d'une fonction explicite de plusieurs variables liées par les équations donnés

É na parte intitulada *Application à quelques exemples* (de funções de uma só variável independente) que podemos encontrar alguns problemas de máximos e mínimos.

2.4.2.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

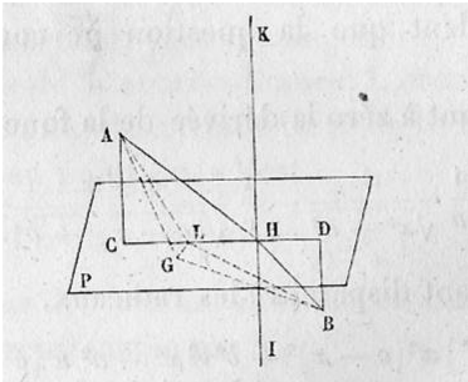
É, como já foi referido, no Capítulo VI que podemos encontrar os problemas de máximos e mínimos.

Este capítulo começa por apresentar a explicação teórica do método de cálculo de máximos e mínimos e de seguida apresenta alguns exemplos de aplicação. Iremos a seguir fazer a análise desses exemplos que estão também presentes na obra anterior. A outra parte do capítulo, como trata das funções implícitas e das funções com mais do que uma variável, não serão analisadas, uma vez que se encontram fora do âmbito desta investigação.

Exemplo III (Problema de Fermat)

Dois meios estão separados por um plano P, procuramos o caminho que deve seguir um móvel para ir, no tempo mais curto, de um ponto A do primeiro meio a um ponto B o segundo. O móvel move-se no primeiro meio a uma velocidade constante u, e no segundo meio a uma velocidade constante v. (pag. 203)

Resolução apresentada:



O caminho procurado é composto de duas linhas rectas, pois o espaço percorrido pelo móvel, num ou noutro meio, é proporcional ao tempo empregue. Além disso, esse caminho está situado no plano ACDB posto perpendicular ao plano P pelos pontos dados A e B e que o corta pela linha CD; com efeito, consideremos a linha quebrada AGB, situada fora do plano ACDB, e do ponto G onde ela encontra o plano P, tracemos GL perpendicular sobre CD, as rectas AL e LB serão respectivamente menores que AG e GB; consequentemente, os tempos para percorrer o caminho ALB será menor que o tempo necessário para ir de A a B pelo caminho AGB.

Posto isto, designemos por *a* e *b* as perpendiculares AC, BD traçadas dos pontos A e B sobre o plano P, por c a distancia CD e por x a distancia do ponto C a um qualquer ponto H de CD; teremos

$$AH = \sqrt{x^2 + a^2}\ , \quad BH = \sqrt{(c - x)^2 + b^2}$$

assim o tempo t que o móvel empregará para ir de A a B, pelo caminho AHB será

$$(1)\ \ t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}}{v}\ ;$$

esta é a função de x da qual procuramos o mínimo.

É evidente que a questão não comporta máximo.

Igualando a zero a derivada da função t, tem-se

$$(2)\quad \frac{1}{u}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{1}{v}\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}=0$$

onde, fazendo desaparecer os radicais,

$$(v^2-u^2)x^2(c-x)^2+b^2v^2x^2-a^2u^2(c-x)^2=0$$

assim a incógnita x depende de uma equação do quarto grau. Mas, sem resolver esta equação, podemos obter como se deduz da propriedade geométrica que caracteriza a linha procurada. Assim, coloquemos a linha KI perpendicular em H ao plano P; designemos por i o ângulo AHK e por r o ângulo IHB, tem-se

$$\sin r=\frac{DH}{BH}=\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}},$$

$$\sin i=\frac{CH}{AH}=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

e por consequência, a equação (2), que exprime a condição do mínimo, vem

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{u}{v}$$

Ela resulta de que o seno do ângulo de incidência i está para o seno do ângulo de refracção r na razão das velocidades u e v com as quais o móvel se pode mover no primeiro e no segundo meio, respectivamente.

Este é um problema de Física que já surgiu anteriormente. Nele pretende-se optimizar uma distância repartida em duas partes em que um objecto se desloca a velocidades distintas. Na sua resolução, surge a função a derivar como f(x) e não como y como anteriormente, de seguida calcula a sua derivada e respectivos zeros. Para equacionar o problema o autor decompõe a figura em triângulos rectângulos utilizando depois o Teorema de Pitágoras e as funções trigonométricas para relacionar os lados destes triângulos. A função obtida é uma função irracional.

Exemplo IV

Determinar os máximos e mínimos da distância de um ponto dado a uma curva dada. (p. 205)

Resolução apresentada:

Designemos por x_0 e y_0 as coordenadas do ponto dado relativos a dois eixos rectangulares; por x e y as coordenadas da curva dada. A ordenada y é uma função dada de x, e o quadrado da distância do ponto do ponto (x_0, y_0) ao ponto (x , y) é

$$(1)\ \ V=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$$

pretende-se calcular os valores máximo e mínimo da função de x representada por V.

Tem-se

$$(2)\ \ \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{dV}{dx}=(x-x_0)+(y-y_0)\dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2V}{dx^2}=\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)+(y-y_0)\dfrac{d^2y}{dx^2} \end{cases}$$

A condição $\dfrac{dV}{dx}=0$ do máximo ou do mínimo está aqui

$$(3)\ \ (x-x_0)+(y-y_0)\frac{dy}{dx}=0$$

ou

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}\frac{dy}{dx}=-1$$

$\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$ é o coeficiente de inclinação da recta que junta o ponto dado M_0 com o ponto procurado M da curva dada, $\dfrac{dy}{dx}$ é o coeficiente de inclinação da tangente em M à mesma curva. Assim a equação precedente exprime que a recta que junta o ponto dado ao ponto procurado é normal à curva.

Seja M um dos pontos assim determinados pela equação (3); esse ponto irá corresponder a um mínimo ou a um máximo, conforme $\dfrac{d^2V}{dx^2}$ seja positiva ou negativa. Mas, se $\dfrac{d^2V}{dx^2}$ for nula, deveremos recorrer às derivadas de ordem superior para decidir se temos um máximo ou um mínimo, ou se não é um nem outro. Este último caso apresenta-se em particular se, $\dfrac{d^2V}{dx^2}$ for nula no ponto M, o valor de $\dfrac{d^3V}{dx^3}$ é diferente de zero.

A recta M_0M será colocada, supondo que o ponto dado M_0 toma todas as posições possíveis sobre esta normal, irá existir uma posição M' do ponto M_0 para o qual a derivada $\frac{d^2V}{dx^2}$ seja nula; consequentemente, se tomarmos *x'*, *y'* coordenadas de M' tem-se

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}=0\ ,$$

e a segunda equação (2) pode então escrever-se na forma

$$\frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2}=\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{y_0-y'}{y-y'}$$

Esta mostra que o valor de M_0M será um mínimo ou um máximo, dependendo de que y_0-y' e $y-y'$ estejam na mesma linha ou em linhas contrárias. Noutros termos, irá existir um mínimo quando o ponto dado M_0 esteja situado entre M' e M, irá existir um máximo caso contrário. O ponto M' é, como iremos ver posteriormente, o que designamos por *centro da curvatura* da curva dada no ponto M.

Neste problema de Geometria Analítica, o autor pretende optimizar a distância entre um ponto e uma curva dada. Na resolução desta aplicação o autor utiliza a fórmula da distância entre dois pontos para equacionar o problema. Depois determina o diferencial dessa expressão e iguala-o a zero. Trabalha então com a equação do diferencial igualada a zero e com a função da curva para determinar a solução óptima. Aplica ainda a segunda derivada para verificar se é um máximo ou um mínimo.

2.4.2.5. CONCLUSÃO

Nesta obra verificamos que os problemas de optimização surgem como exemplos, após a explicação do método de cálculo de máximos e mínimos.

Os dois exemplos apresentados pelo autor foram estudados anteriormente por Sturm e as resoluções apresentadas são muito semelhantes.

Nestes dois exemplos, apresentados pelo autor, são abordados problemas da Física e problemas de Geometria Plana. No primeiro, calcula-se uma distância mínima, numa situação da vida real e no segundo, calcula-se a distância mínima entre um ponto e uma curva dada.

Nas resoluções apresentadas o autor começa por equacionar o problema; a seguir calcula a respectiva derivada e os zeros da mesma e por fim tira as conclusões em relação ao extremo, apresentando depois a resposta ao problema.

CONCLUSÕES

Neste segundo capítulo tínhamos como objectivo efectuar uma análise de algumas obras históricas para, com esta análise, identificar os vários matemáticos que nas suas obras abordaram os problemas de optimização e fazer uma análise a esses mesmos problemas e à respectiva resolução.

Assim, após uma pesquisa nos livros de História da Matemática, fizemos a identificação dos matemáticos e das obras que, possivelmente, abordaram estes problemas. De seguida fizemos uma localização das obras e uma primeira análise das mesmas para verificar se, de facto, abordavam estes problemas. Finalmente seleccionámos algumas dessas obras que nos parecem ser representativas do nosso estudo.

Uma das primeiras conclusões a que chegámos foi que, de facto, os problemas de optimização já eram abordados muito antes de surgir o conceito de derivada. Pois o primeiro autor que verificámos ter feito a sua abordagem foi Euclides na sua obra *Elementos* no século IV (a. C.) e, posteriormente, também Pappus, no século IV D.C., fez uma abordagem dos mesmos na sua obra *La collection Mathématique*. Ambos os autores são muito anteriores ao surgimento do conceito de derivada.

Também, com base na análise que efectuámos a cada uma das obras, podemos tirar conclusões acerca dos vários tipos de problemas encontrados bem como das respectivas resoluções/demonstrações.

Quanto ao enunciado dos problemas, verificámos que estes surgem, na obra de Euclides e na obra de Pappus sob a forma de proposições. Também, na obra de L'Hôpital, uma vez que é uma das primeiras obras que surgiu após o conceito de derivada, estes são enunciados como exemplos. Na obra de Bézout, escrita na época em que se dá a consolidação do conceito de derivada, estes aparecem, pela primeira vez, enunciados como problemas. Quanto ás duas últimas obras analisadas, Sturm, enuncia-os como uma aplicação do cálculo de máximos e mínimos e são, pela primeira vez, apresentados exercícios de aplicação e na obra de Serret são enunciados como problemas.

Os problemas abordados são também de diversos tipos. Assim, na obra de Euclides apenas são abordados problemas de Geometria Plana e na obra de Pappus todos os problemas são de Geometria Plana ou de Geometria Espacial. Na obra de L'Hôpital surge um leque mais vasto de problemas, além dos dois tipos já referidos, surgem também problemas de Aritmética, de Física e até de Astronomia. Na obra de Bézout surgem problemas de Geometria Plana, Geometria Espacial e de Aritmética. Por fim, nas duas últimas obras, surgem os de Geometria Plana, de Geometria Espacial e da Física.

Também o que se pretende optimizar varia de obra para obra. Na primeira obra surgem problemas de optimização de distâncias, áreas ou ângulos. Na segunda obra, para além dos anteriores, surgem também os de optimização de volumes. Na terceira obra surgem os de optimização de áreas, produtos, razões e de tempo. Na quarta obra analisada surgem os de optimização de áreas, volumes e produtos. Por fim, nas últimas obras surgem os de optimização de distâncias, áreas, volumes e tempo.

Consequentemente, também o tipo de resolução que se faz varia significativamente. As duas primeiras obras, uma vez que enunciam os problemas como proposições, apresentam as demonstrações das mesmas. Assim usam o método de redução ao absurdo e outras proposições anteriormente apresentadas, utilizam também relações entre triângulos ou ângulos. A partir da terceira obra, uma vez que marca o surgimento do conceito de derivada, deixamos de ter demonstrações e passamos a ter as resoluções dos problemas ou exemplos apresentados. Estas resoluções começam por equacionar o problema, depois calculam a derivada da função bem como os respectivos zeros e, por fim, apresentam a resposta ao problema apresentado.

As resoluções costumam ser complementadas com imagens ao longo do texto, com excepção da obra de L'Hôpital e de Bézout que apresentam as imagens posteriormente compiladas. Em relação às duas primeiras obras, uma vez que são traduções das obras originais, não podemos conjecturar onde estas eram apresentadas.

Em relação à localização dos mesmos na obra, podemos verificar que nas duas primeiras estes se encontravam em distintas partes da obra, não existindo, obviamente, uma parte dedicada aos problemas de máximos e mínimos. Em todas as outras estes estavam incluídos no Cálculo Diferencial e eram referidos como aplicações ou como problemas de máximos e mínimos.

Assim, com base na análise que efectuámos a cada uma das obras, podemos construir uma tabela de catalogação dos vários problemas encontrados, bem como das respectivas resoluções/demonstrações. Nessa tabela podemos catalogar as várias formas de enunciar os problemas, os tipos de problemas abordados, o tipo de optimização que se efectuar e o tipo de resolução apresentada.

Na primeira coluna da tabela indicamos a obra e o número do problema da obra: E refere-se à de Euclides, P à de Pappus, L à de L'Hôpital, B à de Bézout, ST à de Sturm e SE à de Serret. O número que surge à frente da letra indica o número do problema em questão.

Na primeira linha da tabela indicamos os vários pontos que vamos analisar e na segunda linha a catalogação de cada um dos pontos analisados. O significado das siglas que usamos está indicado na grelha apresentada a seguir.

Forma de Enunciado	**Tipo de Problemas**	**Tipo de Optimização**	**Tipo de Resolução**
Proposição (PR)	Geometria Plana (GP)	Distância (OD)	Demonstração (DEM)
Exemplo (EX)	Geometria Espacial (GE)	Área (OAR)	Resolução (RES)
Problema (PB)	Aritmética (AR)	Volume (OV)	
Aplicação (AP)	Física (FI)	Produto (OP)	
Exercício (EXR)	Astronomia (AS)	Ângulo (OAN)	
		Razão (OR)	
		Tempo (OT)	

Tabela de Catalogação dos Problemas Históricos

	Forma de Enunciado					Tipo de Problemas					Tipo de Optimização							Tipo de Resolução	
	PR	EX	PB	AP	EXR	GP	GE	AR	FI	AS	OD	OAR	OV	OP	OAN	OR	OT	DEM	RES
E1	X					X					X							X	
E2	X					X					X							X	
E3	X					X					X							X	
E4	X					X									X			X	
E5	X					X						X						X	
P1	X					X						X						X	
P2	X					X						X						X	
P3	X						X						X					X	
P4	X						X						X					X	
P5	X						X								X			X	
P6	X					X					X							X	
L1		X				X		X						X					X
L2		X				X		X								X			X
L3		X					X					X							X
L4		X					X					X							X
L5		X					X					X							X
L6		X							X								X		X
L7		X							X										X
L8		X								X							X		X
B1			X					X						X					X
B2			X			X						X							X
B3			X				X						X						X
B4			X			X						X							X
B5			X			X						X							X
ST1				X					X								X		X
ST2				X		X					X								X
ST3					X	X						X						-	-
ST4					X	X					X							-	-
ST5					X		X					X						-	-
ST6					X		X						X					-	-
ST7					X	X			X			X						-	-
ST8					X	X					X							-	-
ST9					X	X			X		X							-	-
SE1			X						X								X		X
SE2			X			X					X								X

3. ANÁLISE DOS PROGRAMAS OFICIAIS E DOS MANUAIS ESCOLARES PORTUGUESES DO SÉCULO XX E XXI

Após a análise efectuada aos livros históricos de Matemática, impõe-se agora realizar uma análise ao sistema de ensino português. Com a realização desta análise pretendemos: verificar quando e de que forma foram introduzidos nos programas oficiais portugueses os problemas de optimização; analisar em cada plano de estudos a importância dada à disciplina de Matemática e, dentro desta, a importância dada ao estudo do Cálculo Diferencial e especificamente ao estudo dos problemas de optimização e ainda analisar como estes foram abordados, ou seja, o tipo de problemas proposto pelo Ministério e o tipo de problemas abordados pelos manuais escolares, verificar se os manuais, acerca dos problemas de optimização, vão de encontro às propostas do Ministério. Por fim, observar qual a alteração sofrida pelos programas, em relação aos problemas de optimização, após a introdução das calculadoras gráficas no Ensino Secundário.

O século XX, em Portugal, foi um século marcado por alguns acontecimentos que, certamente, influenciaram o ensino e, em particular, a elaboração dos programas oficiais para a disciplina de Matemática. No início do século passamos de um regime Monárquico para um regime Republicano que, posteriormente, se transformou num regime ditatorial. Também a evolução das novas tecnologias, especialmente do computador e da calculadora, marcaram o ensino desta disciplina.

Para esta fase da nossa investigação foi muito importante a recolha de legislação acerca dos programas oficiais da disciplina de Matemática realizada por Aires (2006), no seu trabalho de investigação "*O conceito de derivada no Ensino Secundário em Portugal ao longo do século XX: Uma abordagem histórica através dos planos curriculares e manuais escolares*". Neste foi efectuado um estudo histórico centrado na questão do ensino da noção de derivada, desde que ocorreu a sua introdução no mesmo ensino, no século XX, mais concretamente no ano de 1905, acompanhando a sua evolução ao longo do referido século. De grande importância foi também a investigação realizada por González Astudillo (2002) intitulada "*Sistemas Simbólicos de Representación en la Enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva Histórica*" que apresenta uma caracterização das representações dos pontos críticos presentes nos manuais escolares espanhóis e em livros históricos.

Também a obra de Rómulo de Carvalho (1985), *História do ensino em Portugal. Desde a fundação da nacionalidade até ao fim do regime de Salazar – Caetano,* acerca do ensino em Portugal foi de precioso auxílio, uma vez que nos permitiu ter uma visão mais alargada das alterações sofridas ao longo do século, pelo nosso sistema de ensino.

Indispensáveis foram de igual modo os livros de História de Portugal dirigidos por José Hermano Saraiva que nos permitiram ter uma visão mais ampla acerca do ambiente político, social e económico do país aquando das diversas reformas.

Foram ainda de grande interesse as publicações periódicas da revista Gazeta da Matemática, criada em 1940 e publicada pela SPM[17]. Estas permitiram-nos sentir as opiniões, criticas e comentários dos Matemáticos, Professores de Matemática e Pedagogos do nosso país em relação às sucessivas alterações curriculares sofridas pela disciplina de Matemática ao longo dos dois últimos séculos.

Todos os estudos e investigações realizadas pelas diversas entidades governamentais e não governamentais acerca das diversas reformas educativas e programas oficiais tiveram também um papel importante para a realização da nossa investigação.

Assim, começámos por fazer uma recolha de legislação para identificar as várias reformas curriculares realizadas ao ensino, em Portugal, bem como investigar se estas conduziram a alguma alteração na disciplina de Matemática, mais especificamente no estudo da derivada e suas aplicações.

Com base nesta pesquisa dividimos esta análise em cinco períodos:

- 1º Período: Introdução nos programas oficiais do estudo da derivada
- 2º Período: Introdução das aplicações da derivada nos programas oficiais
- 3º Período: Introdução das Matemáticas Modernas em Portugal
- 4º Período: A Lei de Bases do Sistema Educativo
- 5º Período: Introdução da calculadora gráfica nos programas oficiais

Posteriormente à análise dos programas oficiais da disciplina de Matemática, realizámos uma recolha de manuais escolares respeitantes às reformas curriculares que referem o estudo da derivada, mais especificamente, os que contemplam o estudo das aplicações da derivada ou o cálculo de extremos de uma função. Dado que, a partir do

[17] Sociedade Portuguesa da Matemática

momento em que deixa de estar em vigor o livro único, surge um elevado número de manuais escolares para cada ano, optámos por seleccionar, para cada um dos períodos referidos, anteriormente, alguns destes manuais a fim de analisar mais detalhadamente os problemas de optimização.

A tabela seguinte contém a listagem de todos os manuais analisados. Referindo para cada um dos manuais o nome do autor ou autores, o título do livro, o ano lectivo a que pertence, o ano da publicação, o nome da editora, a reforma curricular a que se refere e, por fim, as observações onde fazemos referência ao facto de ser ou não o livro único bem como o Diário de Governo em relação ao qual está de acordo.

Tabela de Manuais Escolares que abordam os problemas de optimização

Autor	Título da Obra	Ano Lectivo	Ano Publ.	Editora	Refor-ma	Obs.
J. Sebastião e Silva; José Duarte Silva Paulo	Compêndio de Álgebra	6º,7º Ano 3ºC-Ens. Lic.	1958	Livraria Rodrigues	1954	L. U. – DG 2ª S. de 22/1/1958
J. Sebastião e Silva; José Duarte Silva Paulo	Compêndio de Álgebra	6º,7º Ano 3ºC-Ens. Lic.	1960	Livraria Rodrigues	1954	L. U. – DG 2ª S. de 22/1/1958
J. Sebastião e Silva; José Duarte Silva Paulo	Compêndio de Álgebra	6º Ano - Ens. Lic.	1963	Livraria Popular de Francisco Franco	1954	L. U. – DG
J. Sebastião e Silva; José Duarte Silva Paulo	Compêndio de Álgebra	6º Ano – Ens. Lic.	1968	Livraria Cruz	1954	L. U. – DG 2ª S. de 8/5/1968
António Nascimento Palma Fernandes	Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética Racional	6º Ano - Liceus	1961	Livraria Didáctica	1954	
J. Sebastião e Silva	Compêndio de Matemática	7º Ano	1965		1963	2º proj. esp.STP-4/SP/Portugal
Ondina Vasconcelos	Compêndio de Matemática	1º CC (Antigo 6º)	1973	Porto Editora	1973	Matemática Clássica
Fernando Borja Santos	Sebenta de Matemáticas Modernas	5º Ano CC. (antigo 7º)	1974		1973	
Madalena Garcia; Alfredo Osório; António Ruivo	Compêndio de Matemática	2º Ano CC. V1	1975	Empresa Literária Fluminense	1973	D.L. nº 47 587 de 10/3/1967
J. A. Loureiro de Amorim	Exercícios de Matemática	2º Ano CC.	1977?	Didáctica Editora	1973	
A. César Freitas; Francelino Gomes	Matemática	11º Ano (2º CC) Vol. 2	1979	Livraria Popular Francisco Franco	1979	
Henrique Verol Marques	Exercícios de Matemática 1	11º Ano	1979	Editorial Presença	1979	

António do Nascimento Palma Fernandes	Matemática 7 – Exemplos e exercícios	11º Ano	1980	Plátano Editora	1979	
Paulo Abrantes; Raul Fernando Carvalho	M11 – Matemática 11º ano	11º Ano	1984	Texto Editora	1979	
M. A. F. Neves; M. Teresa C. Vieira; Alfredo G. Alves	Matemática	11º Ano	1988	Porto Editora	1979	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	10º Ano	1992	Editorial O Livro	1991	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	11º Ano	1994	Editorial O Livro	1991	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	12º Ano	1994	Editorial O Livro	1991	
Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo	Infinito 11	11º Ano	1994	Areal Editores	1991	
Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo	Infinito 12	12º Ano	1995	Areal Editores	1991	
M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito	Matemática 10	10º Ano	1994	Porto Editora	1991	
M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito	Matemática 11	11º Ano	1994	Porto Editora	1991	
M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito	Matemática 12	12º Ano	1995	Porto Editora	1991	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	10º Ano	1996	Editorial O Livro	1997	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	11º Ano	1997	Editorial O Livro	1997	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	12º Ano	1997	Editorial O Livro	1997	
Ana M.B. Jorge, C. Barroso Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo	Infinito 10	10º Ano	1997	Areal Editores	1997	
Ana M.B. Jorge, C. Barroso Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo	Infinito 11	11º Ano	2001	Areal Editores	1997	
Ana M.B. Jorge, C. Barroso Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo	Infinito 12	12º Ano	1995	Areal Editores	1997	
Maria Augusta F. Neves	Matemática 10	10º Ano	2001	Porto Editora	1997	
Maria Augusta F. Neves	Matemática 11	11º Ano	2001	Porto Editora	1997	
Maria Augusta F. Neves	Matemática 12	12º Ano	2002	Porto Editora	1997	

A análise de cada período foi repartida em três partes:

- Parte A – Análise do programa oficial: Nesta apresentámos o programa oficial bem como algumas características deste ou da época em que se insere.
- Parte B – Análise dos manuais: Nesta começámos por apresentar a descrição dos vários manuais consultados, indicando, para cada um, a ficha de referência da obra consultada (autor, título, ano lectivo, reforma curricular, ano, editora e lugar de edição e sua localização) e estrutura da obra. Depois apresentámos a lista de todos os problemas de optimização encontrados.
- Parte C – Análise do período: Nesta parte surge uma descrição das características dos problemas deste período.

Ao iniciar a análise dos problemas de optimização presentes nos manuais escolares, a primeira questão que se colocou foi relativamente à forma como poderíamos fazer essa análise de forma a conseguir caracterizar os problemas presentes em cada período.

González Astudillo (2002) dá-nos uma caracterização das representações presentes nos manuais escolares espanhóis. Camacho Machin (1998) faz uma classificação dos tipos de problemas de optimização que surgem nos manuais escolares e de apresenta-nos uma proposta de resolução, utilizando a calculadora gráfica TI92. Martin Kindt (1995) compara diferentes métodos de resolução do mesmo problema resolvendo problemas antigos, utilizando a calculadora gráfica. Também Mesa (2004) apresenta uma caracterização dos exercícios apresentados nos livros de texto.

Como se trata de uma investigação acerca de problemas optamos por fazer essa análise baseada nas quatro fases de resolução de problemas propostas por Polya (1975), visto ser o autor referido nos manuais escolares.

Segundo Polya (1975), para resolver um problema devemos seguir os passos seguintes:

1. *Compreensão do Problema:* Identificar a incógnita, os dados e a condicionante; Verificar se é possível satisfazer a condicionante, se esta é suficiente para determinar a incógnita; Traçar uma figura.
2. *Estabelecimento de um plano:* Encontrar a conexão entre os dados e a incógnita e verificar se é necessário considerar problemas auxiliares.

3. *Execução do plano:* Verificar cada passo, verificar se cada passo está correcto.
4. *Reflexão:* Examinar a solução obtida, verificar se esse resultado é possível.

Refere o autor que:

"*Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão interrelacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.*"

Assim sendo, à medida que fomos analisando os vários problemas de optimização presentes nos manuais utilizados, tentamos identificar as características destes relativamente a cada uma das quatro fases da resolução de problemas.

Criámos então um conjunto de treze categorias repartidas pelas quatro fases: seis categorias para a primeira fase, três para a segunda, três para a terceira e uma para a última. Cada uma das categorias é composta pelas diferentes características que identificámos nos problemas analisados.

Primeira fase: Compreensão do problema

Nesta primeira fase pretende-se proceder à identificação das incógnitas, dos dados e das condicionantes.

Identificámos, para esta fase, seis categorias:

– Tipo de Problema (T): Nesta categoria referimos a forma como o problema é apresentado no manual.
    - Exemplo Resolvido (TEP) – Problemas que surgem sob a forma de exemplo de aplicação seguido da respectiva resolução.
    - Exercício Resolvido (TER) – Problema que surge sob a forma de exercício mas seguido da respectiva resolução.
    - Exercício (TE) – Problema que surge sob a forma de exercício, normalmente no final do capítulo ou nas margens do manual, sem resolução, mas com solução no final.
    - Demonstração (TDM) – Problema que surge sob a forma de demonstração.

    - Relatório (TR) – Problema em que se pretende que o aluno elabore um relatório ou uma composição, explicando assim, o processo de resolução.

- Contexto do problema (C): Nesta categoria referimos qual é o contexto em que o problema se enquadra.
    - Geometria Métrica (CGM) – Problema de geometria métrica.
    - Geometria Analítica (CGA) – Problema de geometria analítica.
    - Aritmética (CAR) – Problema de aritmética, normalmente ligado à optimização de produtos ou somas.
    - Contexto Real Medida (CRM) – Problema em contexto real de medida em que se pretendem, normalmente, optimizar distâncias, áreas, volumes.
    - Contexto Real Física (CRF) – Problema em contexto real de física, normalmente relacionado com velocidade ou intensidade.
    - Contexto Real Economia (CRE) – Problema em contexto real da área da economia em que se pretende optimizar um custo ou um lucro.

- Função a optimizar (O): Nesta categoria referimos o que se pretende optimizar no problema em questão.
    - Distância (OD);
    - Área (OA);
    - Perímetro (OPE);
    - Volume (OV);
    - Produto (OPR);
    - Soma (OS);
    - Tempo (OT);
    - Custo (OC).

- Esquemas/ Figuras auxiliares (F): Nesta categoria referimos se o enunciado do problema vem acompanhado ou não de uma figura ou um esquema auxiliar e, no caso de ter figura, se esta é uma figura simples ou se possui algum tipo de dados auxiliares.
    - Sem esquemas (FSE) – Problemas em que o enunciado não apresenta nenhuma figura ou esquema que auxilie a resolução.

  - Figura simples (FFS) – Problemas que apresentam apenas a figura ou uma ilustração.
  - Figura com dados (FFD) – Problemas em que, no enunciado, surge uma figura com dados que auxiliam a resolução, normalmente surgem nos problemas geométricos ou físicos.

- Tipo de dados (D): Nesta categoria distinguimos entre os problemas que apresentam dados numéricos e os problemas que apresentam dados genéricos.
  - Dados numéricos (DN) – Problemas com dados numéricos.
  - Dados genéricos (DG) – Problemas em que se determina a solução para um qualquer valor genérico

- Tipo de enunciado (EN): Nesta categoria fazemos a distinção entre os problemas que apresentam um enunciado simples e os problemas em que o enunciado pode encaminhar o aluno na resolução do problema.
  - Enunciado simples (ENS) – Problemas em que o enunciado é simples, não havendo neste nenhum tipo de ajuda à resolução do problema.
  - Resolução encaminhada (ENE) – Problemas com notas que ajudam na resolução ou com um conjunto de questões prévias que encaminham o aluno na resolução do problema.

Segunda fase: Estabelecimento de um plano

Nesta segunda fase pretende-se encontrar a conexão entre os dados e a incógnita. Foram identificadas para esta fase três categorias.

- Função/Equação auxiliar (A): Nesta categoria fazemos a distinção entre os problemas em que a função auxiliar surge explicitamente no enunciado daqueles em que o aluno tem de identificar, a partir dos dados, qual a função auxiliar que deve usar.
  - Explícita (AE) – Problemas em que a função auxiliar surge de forma explícita, ou seja, casos em que, por exemplo, é dado o valor do

perímetro ou da área, levando o aluno a pensar que este será o dado que lhe permite tirar o valor de uma variável em função da outra.

- Implícita (AI) – Problemas em que, a partir dos dados fornecidos, o aluno tem de procurar encontrar a relação que lhe permite determinar o valor de uma das variáveis em função da outra. Frequente para problemas em que se usa a noção de distância, Teorema de Pitágoras ou semelhança de figuras.

– Noções aplicadas (N): Nesta categoria pretendemos identificar as noções que têm de ser aplicadas na resolução do problema.
  - Teorema de Pitágoras (NTP) – Problemas em que se aplica o Teorema de Pitágoras para determinar o valor de uma variável em função de outra.
  - Distância (ND) – Problemas em que se usa a fórmula de cálculo da distância entre dois pontos ou em que simplesmente se usa a noção de distância para determinar o valor de uma variável em função de outra.
  - Semelhança de Figuras (NSF) – Problemas em que se aplica a noção de semelhança de figuras.
  - Perímetro (NPR) – Problemas em que aplicamos a fórmula de cálculo do perímetro de uma figura.
  - Área (NA) – Problemas em que aplicamos a fórmula de cálculo da área de uma figura.
  - Volume (NV) – Problemas em que aplicamos a fórmula de cálculo do volume de uma figura.
  - Soma (NS) – Problemas em que utilizamos a noção de soma para escrever uma variável em função da outra, normalmente surge nos problemas aritméticos.
  - Produto (NP) – Problemas em que utilizamos a noção de produto para escrever uma variável em função da outra, normalmente surge nos problemas aritméticos.
  - Função (NF) – Problemas em que utilizamos a expressão algébrica de uma função para escrever uma variável em função da outra.
  - Funções Trigonométricas (NFT) – Problemas em que utilizamos as funções trigonométricas (sin (α), cos (α), tan (α)) para relacionar duas variáveis.

  - Magnitudes físicas (NMF) – Problemas em que utilizamos magnitudes físicas para determinar uma variável em função da outra, na maioria dos casos a fórmula da velocidade e apenas num caso a noção de intensidade.

- Estratégia (E): Nesta categoria pretendemos distinguir entre os problemas que surgem pela primeira vez e que, portanto, obrigam a pensar na estratégia de resolução e os problemas que, de alguma forma, têm características comuns com problemas que surgiram anteriormente e dos quais nos podemos socorrer para a resolução do nosso problema.
  - Histórico (EH) – Problemas que encontramos nos livros históricos analisados.
  - Exame (EE) – Problemas referidos como retirados de exame.
  - Manual (EM) – Problema que surgiu em manuais anteriores.
  - Novo (EN) – Problemas que encontramos pela primeira vez no manual em questão.

Terceira fase: Execução do plano

Nesta terceira fase pretende-se executar o plano, verificando cada passo. Encontramos para esta fase três categorias.

- Funções Utilizadas (f): Nesta categoria pretendemos identificar o tipo de função que teremos de optimizar.
  - Polinomial (fp)
  - Racional (fr)
  - Irracional (fir)
  - Trigonométrica (ft)

- Esquema de cálculo de extremos (e): Nesta categoria pretendemos distinguir as diferentes formas como são calculados os extremos da função.
  - Cálculo dos zeros da derivada (ez) – Problemas em que, para determinar o extremo, apenas se calculam os zeros da função derivada.

- Cálculo dos zeros da derivada e estudo do sinal da derivada (ezs) – Problemas em que se calculam os zeros da derivada e de depois se faz o estudo do sinal da função derivada para identificar máximos e mínimos.
- Cálculo dos zeros da derivada e estudo do sinal da 2ª derivada (ezss) – Problemas em que se calculam os zeros da derivada e depois se estuda o sinal da segunda derivada nesses pontos para identificar máximos e mínimos.
- Cálculo analítico do vértice da parábola e análise da concavidade (ev) – Problemas em que se efectua o cálculo analítico do vértice da parábola, que normalmente surge nos problemas a partir da lei de bases do sistema educativo, do 10º ano.
- Utilização da calculadora gráfica para calcular extremos (ecg) – Problemas em que o cálculo dos extremos é efectuado a partir do esboço da função a optimizar obtido na calculadora gráfica.
- Utilização de outro tipo de resolução (eo) – Problemas em que a resolução foi feita por outro processo e que surgiu apenas num problema com resolução Geométrica e Algébrica.

– Gráficos, figuras ou esquemas auxiliares (g): Nesta categoria pretendemos verificar se a resolução não apresenta qualquer tipo de esquema auxiliar ou se vem acompanhada de algum tipo de gráfico, esquema ou quadro auxiliar.
  - Sem esquemas (gn) – Problemas cuja resolução não apresentam qualquer gráfico, esquema ou figura auxiliar.
  - Com figura (gf) – Problemas em que a resolução apresenta uma figura alusiva ao problema, normalmente acompanhada de dados.
  - Com quadro de monotonia (gqm) – Problemas cuja identificação dos máximos ou mínimos é efectuado através do quadro de monotonia
  - Com gráfico da função (gg) – Problemas em que a resolução vem acompanhada do gráfico da função. Em problemas dos últimos períodos é vulgar a resolução ser feita analítica e graficamente.

Quarta fase: Reflexão

Nesta quarta e última fase pretende-se examinar a solução obtida. Esta última fase apenas tem uma categoria que se refere ao valor pedido no enunciado.

- Valor pedido (v): Nesta categoria fazemos a distinção entre os problemas em que o valor pedido surge de forma explícita e os problemas em que o valor pedido surge de forma não Explícita e, portanto, o aluno tem de perceber o que, de facto, é pedido.
    - Explicito (ve) – Problemas em que o valor pedido é feito Explicitamente.
    - Implícito (vi) – Problemas em que o valor pedido é feito implicitamente. Por exemplo, nalgumas situações pedem as dimensões de uma determinada figura sem que se peça Explicitamente um determinado valor como, por exemplo, o valor da incógnita.

3.1. INTRODUÇÃO NOS PROGRAMAS OFICIAIS DO ESTUDO DA DERIVADA

Nesta secção vamos analisar as reformas do ensino liceal em Portugal, desde a introdução do conceito de derivada nos programas oficiais, mas nas quais ainda não se contempla o estudo das aplicações desta e, consequentemente, não abordam o estudo dos problemas de optimização.

A última reforma efectuada no século XIX foi a reforma de Jaime Moniz que foi regulamentada em 18 de Abril, 14 de Agosto e 14 de Setembro de 1895. Esta foi uma das reformas melhor planeadas de toda a nossa história, mas, talvez por originar muitas alterações ao sistema que estava em vigor, não foi bem sucedida, pois fez com que o número de alunos matriculados nos liceus tivesse baixado de 3658, em 1895, para 458, em 1896. Como sofreu inúmeras críticas por parte de diversos sectores da sociedade portuguesa, houve necessidade de realizar uma outra para neutralizar as deficiências desta (Carvalho, 1985, p. 644). Esta reforma não contemplava o estudo da derivada.

Assim, a 3 de Novembro de 1905 são publicados os programas relativos à primeira reforma efectuada no século XX. Era então ministro José Coelho.

Com esta o ensino nos liceus ficou dividido em dois cursos: Curso Geral com cinco classes e o Curso Complementar com duas classes. Estando este último dividido em dois cursos: Letras e Ciências.

A disciplina de Matemática estava presente nos cinco anos do Curso Geral e nos dois anos do Curso Complementar de Ciências. Tinha uma carga horária de 5 horas na primeira classe; 4 horas na segunda e terceira; 3 horas na quarta e quinta e 5 horas na sexta e sétima classe.

Terminou então o regime do livro único, podendo os professores usar qualquer compêndio que tivesse a aprovação de uma comissão nomeada pelo governo.

Esta reforma reveste-se de uma grande importância dado que é precisamente com esta que o estudo da derivada é introduzido pela primeira vez nos programas do Ensino Secundário.

Neste programa o estudo da derivada surge no último ano de escolaridade, isto é, no 7º ano (ou classe) do Curso Complementar de Ciências e é inserida no capítulo de Álgebra. Este capítulo estava estruturado da seguinte forma:

VII classe: Álgebra

Equação do 2º grau a uma incógnita: resolução e discussão. Composição da equação. Propriedades do trinómio do 2º grau. Resolução de desigualdades do 2º grau. Discussão de problemas do 2º grau. Equações biquadradas. Equações irracionais que se reduzem a equações do 1º e 2º grau.

Sistema de duas equações a duas incógnitas, uma do 1º grau e outra do 2º grau.

Função exponencial. Nova definição dos logaritmos.

Noção de derivada; sua interpretação geométrica. Derivada de uma soma, de um produto, de um quociente, de uma potencia, de uma raiz. Derivadas de funções circulares. Revisões.

Verificamos que nesta reforma apenas se pretende ensinar as regras de derivação, não se refere o estudo das aplicações da derivada.

Ao contrário da anterior reforma, onde vigorava o regime do livro único, nesta apenas se exige que os compêndios tenham prévia aprovação de uma comissão nomeada pelo governo.

No final do programa surge a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em análise aparece a seguinte referência:

Compêndio de Álgebra para a 6ª e 7ª classe.

Este compêndio não possui nenhum problema de optimização.

Nos finais do século XIX surge um movimento de oposição ao regime monárquico. Este movimento segue para o século XX, dando origem a 5 de Outubro de 1910 à Implantação da República.

Um dos objectivos, entre outros, deste movimento, era reformar a mentalidade portuguesa e uma das formas de o fazer seria através da instrução e da educação, falando-se mesmo em "educação republicana". Esta era uma educação interessada na criação e consolidação de uma nova maneira de ser português, capaz de expurgar a Nação de quantos males a tinham mantido, e mantinham, arredada do progresso europeu, sem força, sem coragem, sem meios para sacudir de si a sonolência em que mergulhara (Carvalho, 1985, p. 651).

A 7 de Julho de 1913 foi criado novamente o Ministério da Instrução Pública. Este tinha sido criado pela primeira vez em 12 de Julho de 1870 pois até a essa data todos os assuntos relacionados com a instrução eram tratados no Ministério do Reino, ministério sobrecarregado com inúmeras pastas.

Implantada a República, iniciam-se as reformas educativas. Começam por reformar a instrução primária e a seguir o ensino universitário.

Assim, só sete anos após a Implantação da República surge a primeira reforma do Ensino Secundário do período republicano. Esta data de 17 de Abril de 1917 e foi levada a cabo por Pedro Martins. Tinha como objectivo "compilar, coordenar e sistematizar as posições sobre o Ensino Secundário, contidas em numerosas leis, decretos, regulamentos e portarias" (Carvalho, 1985, p. 683).

Nesta reforma manteve-se tudo o que estava em vigor da anterior, tendo-se apenas acrescentado, ao Curso Complementar de Letras, a disciplina de Ciências Físicas e Naturais e ao Curso Complementar de Ciências, a disciplina de Filosofia. Esta decisão não agradou aos pais nem aos alunos, uma vez que estes não viam necessidade de os alunos de Letras aprenderem Ciências e vice-versa.

Por esta razão gerou grande contestação. Os Liceus foram encerrados o que levou à revogação do decreto e regressou-se à reforma de 1905.

Alfredo Magalhães realizou, em 1918, uma nova reforma do sistema educativo. Nesta época Portugal estava sob um regime ditatorial, o que se reflectiu nas linhas orientadoras desta nova reforma.

As alterações que Alfredo Magalhães pretendia fazer no Ensino Secundário eram semelhantes às de Pedro Martins, mas ainda mais fortes.

Foi a 27 de Novembro de 1918 que foram publicados os programas relativos a esta reforma.

Nesta o estudo da derivada é feito na 6ª classe do Curso Complementar de Ciências, no capítulo intitulado Elementos de Cálculo Infinitesimal e não no capítulo dedicado à Álgebra. Vejamos como se encontra organizado este capítulo:

VI Classe: Elementos de Cálculo Infinitesimal

Teoria dos limites. Teoremas sobre os limites da soma, produto e cociente. ***Derivada: importância desta noção. Derivada de uma soma, de um produto, de um cociente, de uma potência, de uma raiz, de uma função de função.***

Noção de integral (basta mostrar a existência em casos particulares).

Aplicações

(Decreto nº 5:002 do Diário de Governo nº 257 de 28 de Novembro de 1918)

.

Podemos assim verificar que, com a criação do capítulo dedicado ao Cálculo Infinitesimal, o estudo da derivada é mais aprofundado, introduzindo-se aplicações deste.

No final do programa surge a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em análise surge a seguinte referência:

Compêndio de Álgebra Elementar e Elementos de Cálculo Infinitesimal, para as classes II, IV, V, VI e VII.

Este compêndio não possui nenhum problema de optimização.

Também esta reforma não teve futuro uma vez que o regime ditatorial que tinha sido instaurado em 1917 pelo então Presidente da República Sidónio Pais, caiu em Dezembro de 1918 com o seu assassinato.

Só em 26 de Setembro de 1919, com a proximidade do início do ano lectivo, foi publicada a nova reforma. Esta levava a assinatura de Joaquim José de Oliveira que então era o Ministro da Instrução.

Com ela introduz algumas alterações, ao nível da carga horária, bem com ao das disciplinas que constituem cada um dos cursos.

A disciplina de Matemática faz parte do elenco de disciplinas da VI e da VII classe, tendo no primeiro uma carga horária de 3 horas semanais e no segundo de 4 horas semanais.

A derivada passa a ser estudada na VII classe do Curso de Ciências, dentro do capítulo dedicado aos Elementos de Cálculo Infinitesimal. Vejamos:

VII Classe: Elementos de Cálculo Infinitesimal

Teoria dos limites. Teoremas sobre os limites da soma, produto e cociente.

Derivada: importância desta noção. Derivada de uma soma, de um produto, de um cociente, de uma potência, de uma raiz, de uma função de função, de uma função composta e de funções implícitas. Derivadas das funções circulares.

Noção de integral.

Aplicações.

(Decreto nº 6:132 do Diário de Governo nº 196 de 26 de Setembro de 1919)

Verificamos assim que o programa da disciplina de Matemática se mantém praticamente sem alterações. A derivada continua a fazer parte do capítulo de Elementos de Cálculo Infinitesimal, leccionado na VII classe, acrescentando-se apenas o estudo da derivada de uma função composta, de funções implícitas e das funções circulares.

Mas, como já referimos, também no Curso Complementar de Letras existia a disciplina de Matemática. Esta apenas fazia parte do VI ano com uma carga horária de 3 horas semanais. Este programa não se encontra dividido por temas, como no curso de Ciências, os temas aparecem todos seguidos.

Vejamos como está composto o parágrafo que inclui o estudo da derivada:

VI Classe

*Análise dalgumas demonstrações, já feitas, para a aquisição da noção de limite (ciclometria, volume do tetraedro, etc.). **Noção de derivada**, de diferencial e de integral. Aplicações simples ao cálculo das áreas e volumes do movimento e das tangentes às curvas.*

Este estudo só em casos muito simples se fará exclusivamente pelo processo analítico, todo o restante é sugerido e garantido pela geometria.

(Decreto nº 6:132 do Diário de Governo nº 196 de 26 de Setembro de 1919)

Neste programa apenas se pretende fazer uma pequena abordagem da derivada, não sendo referido o estudo da sua aplicação.

O regulamento desta reforma apenas se publica a 12 de Junho de 1920, sendo então ministro da Instrução Vasco Borges. Este regulamento será depois mandado suspender por Rego Chaves, voltando a estar em vigor o regulamento de Sidónio Pais.

A 18 de Junho de 1921, sendo já ministro da Instrução Ginestal Machado, decreta-se uma nova reforma, que é muito semelhante à anterior, não sofrendo os programas de Matemática nenhuma alteração em relação, à anterior (1919).

Esta foi a última reforma que se realizou até ao final da 1ª República, em 1926.

A 28 de Maio de 1926 dá-se um golpe militar que põe termo à Primeira República. Devido à instabilidade governamental que se vivia no momento, este movimento foi, inicialmente, bem recebido.

Instala-se então, até 1974, um regime Ditatorial que faz uso da censura à Imprensa.

A 2 de Outubro de 1926 é assinado pelo ministro Ricardo Jorge o *Estatuto da Instrução Secundária* que veio alterar, profundamente, o esquema de ensino que vigorava até então.

A escolaridade é reduzida em um ano, passando o curso complementar a ter apenas um ano. O curso Complementar de Letras deixa de ter a disciplina de Matemática.

Como consequência do encurtamento da escolaridade, os programas também são encurtados.

O capítulo relativo ao Cálculo Infinitesimal deixa de existir e a derivada passa para o capítulo dedicado à Álgebra na 4ª classe. Quanto à derivada, apenas se refere o estudo da *Noção de derivada*.

A reforma efectuada por Ricardo Jorge, uma vez que provocou inúmeras alterações, foi alvo de numerosas reclamações. Assim, a 22 de Janeiro de 1927, sendo então ministro da Instrução Alfredo Magalhães (que já fora ministro no antigo regime), publica-se um novo decreto, mas, a nível do estudo da derivada, não produziu nenhuma alteração.

Cordeiro Ramos veio a suceder a Alfredo Magalhães na pasta da Instrução. As medidas duras e repressivas no ensino liceal sofrem um agravamento.

A 14 de Janeiro de 1929 são aprovados os programas dos Cursos Complementares, pois na anterior alteração os programas não foram alterados.

Nesta reforma apenas se aborda a *noção de derivada*, na 6ª classe, no capítulo dedicado à Álgebra. Vejamos como se encontra distribuindo esse capítulo:

VI Classe: Álgebra

Números algébricos e complexos.

Noção de função; representação gráfica; noção intuitiva dos limites das funções de uma variável, de continuidade e de ***derivada; interpretação geométrica.***

Polinómios inteiros; propriedades gerais e elementares.

Fracções algébricas; significação dos símbolos:

$$\frac{m}{0},\frac{m}{\infty},\frac{0}{0},0\times\infty e \infty\times\infty$$

Discussão da equação do 1º grau a uma incógnita. Análise combinatória; binómio de Newton.

(Decreto nº 16:362 do Diário de Governo nº 11 de 14 de Janeiro de 1929)

Este ministro volta a fazer uma reformulação dos programas, que foi publicada a 27 de Setembro de 1930. A derivada continua a fazer parte da 6ª classe, no capítulo dedicado à Álgebra. Agora pretende fazer-se um estudo mais minucioso da derivada, introduzindo-se conteúdos que não eram abordados no anterior programa.

Vejamos como estava organizado este capítulo:

VI Classe: Álgebra

Funções; classificação das funções; propriedades elementares das funções inteiras; principio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; aplicações. Funções fraccionárias; símbolos de impossibilidade e indeterminação. Limites de funções de uma só variável; teoremas relativos à soma, ao produto e ao cociente destes limites; exercícios sobre a determinação dos limites de funções. Função continua num ponto; função continua num intervalo; exemplos de funções continuas e representação gráfica destas funções. Função crescente num ponto e num intervalo; função decrescente num ponto e num intervalo. ***Derivada e diferencial de uma função num ponto; interpretação geométrica da derivada; derivada da soma, do produto, do cociente, da potencia, da raiz, da função de função e da função inversa.***

Análise combinatória; arranjos, permutações e combinações. Binómio de Newton; aplicações. Resolução e discussão da equação geral do 1° grau a uma incógnita. Análise indeterminada do 1° grau.

(Decreto n° 20:369 do Diário de Governo n° 232 de 8 de Outubro de 1931)

No final do programa surge a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em análise aparece a seguinte referência:

Compêndio de Álgebra, num volume, para as classes 6ª e 7ª.

Este compêndio não possui nenhum problema de optimização.

Posteriormente, Cordeiro Ramos, reforma novamente os programas, uma reforma decretada em 8 de Outubro de 1931. A derivada continua a pertencer ao programa da 6ª classe, no capítulo dedicado à Álgebra. Mas em relação à derivada, o programa não introduz nenhuma alteração.

Com Carneiro Pacheco, como Ministro da Instrução Pública, o ensino sofreu grandes alterações. A 14 de Outubro de 1936 é decretada a reforma do ensino liceal. Esta introduz grandes alterações acerca da organização curricular, deixando de existir a separação entre curso Geral e Complementar, e também terminam as opções entre Letras e Ciências. Os conteúdos programáticos são encurtados e, consequentemente, o estudo da derivada é suprimido do programa.

Posteriormente foram ministros da mesma pasta Mário Figueiredo e Caeiro Mata. Mas, uma vez que se iniciou entretanto a 2ª Guerra Mundial, não surgiram, por parte destes, reformas curriculares, tendo sido feitas apenas pequenas alterações.

Os programas das disciplinas não sofreram alterações em relação ao seu conteúdo.

Em 1945 terminou a II Grande Guerra. Esperava-se então que surgisse uma viragem na política nacional. Tal não veio a suceder, mas, pelo contrário, a repressão do Estado acentuou-se.

Seguiu-se então na pasta da Educação Pires de Lima, grande apoiante da actuação de Salazar. Por esse motivo foi um dos ministros que ocupou a pasta durante o maior período de tempo (cerca de 8 anos).

A 17 de Setembro de 1947 surge a reforma do ensino liceal. Volta-se então ao esquema de estudos alterado por Carneiro Pacheco. Assim, o Curso Geral dos Liceus volta a ter cinco anos e o Curso Complementar dois, fazendo-se de novo a separação entre Letras e Ciências. A reforma dos programas foi publicada a 22 de Outubro de 1948, que foram reduzidos e as férias foram encurtadas.

Deste modo, a derivada volta a fazer parte do programa[18], passa-a para o VII ano e continua dentro do capítulo dedicado à Álgebra. O facto do conceito passar para o VII ano mereceu várias críticas uma vez que deveria surgir no VI ano, a seguir ao estudo dos infinitésimos e no ano em que o conceito é necessário para a disciplina de Física. Vejamos como ficou estruturado este capítulo:

VII Ano: Álgebra

Análise combinatória - elementos distintos e sem repetição. Binómio de Newton.

Números complexos a duas unidades; forma algébrica; igualdade, desigualdade e operações.

Equação do 2º grau a uma incógnita, resolução algébrica e gráfica; discussão.

Equação biquadrada; resolução algébrica; discussão. Transformação de um radical duplo na soma algébrica de dois radicais simples.

Equações irracionais redutíveis ao 2º grau.

Trinómio do 2º grau; representação gráfica; propriedades. Inequações: noções gerais e princípios de equivalência. Inequações do 2º grau a uma incógnita; inequações fraccionárias que se resolvam por meio de inequações do 1º ou 2º grau a uma incógnita.

Problemas do 1º e 2º grau; discussão.

O problema das tangentes e o das velocidades; noção de derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivada das funções algébricas e das funções circulares directas; derivada da função de função.

(Decreto nº 37:112 do Diário de Governo nº 247 de 22 de Outubro de 1948)

[18] Esta tinha sido excluída do programa com a reforma de Carneiro Pacheco em 1936

Aqui a derivada aparece precedida do cálculo de tangentes. Começa então a surgir a derivada, não como mais uma noção matemática, mas como uma ferramenta que se pode aplicar à resolução de problemas de tangentes e velocidades. Não se contempla ainda, posteriormente ao estudo da derivada, o estudo das aplicações desta.

No final do programa encontra-se a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em questão vem a seguinte referência:

Compêndio de Álgebra, num volume.

Depois de o analisar, verificamos que o compêndio não aborda os problemas de optimização.

Verificamos, então, que foi no início do século XX que o conceito de derivada foi introduzido nos programas oficiais, ao longo da primeira metade do século foi sofrendo algumas alterações em relação ao ano em que se aborda, ao capítulo em que se insere e à quantidade de assuntos relacionados com a derivada que se abordam. No entanto, não encontramos problemas de optimização, em nenhum dos manuais escolares, relativos a cada uma das reformas desta primeira metade do século.

3.2. INTRODUÇÃO NOS MANUAIS ESCOLARES DOS PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

Nesta secção iremos analisar as reformas curriculares, desde a introdução dos problemas de optimização nos manuais escolares até ao início das Matemáticas Modernas.

A. Análise do programa oficial

Durante a década de cinquenta o ensino liceal sofreu apenas pequenas alterações. Entre essas alterações é de referir que em 1950 se repôs novamente o livro único, medida que provocou alguma contestação, mas que apenas veio a ser alterada em 1974. Em 1952, estando ainda Pires de Lima na pasta da Educação, é lançado o Plano de Educação Popular, Cursos de Educação de Adultos e Campanha Nacional de Educação de Adultos.

Em 7 de Setembro de 1954 são aprovados os novos programas das disciplinas do Ensino Liceal. Estes tinham como objectivo simplificar o Curso Geral de forma a adequá-lo melhor à capacidade receptiva dos alunos.

Nestes novos programas, a derivada passa novamente para o 6º ano do Curso Complementar de Ciências, continuando inserida no capítulo dedicado à Álgebra. Vejamos como ficou estruturado este capítulo:

VI Ano: Álgebra

Breves noções sobre sucessivas generalizações do conceito de número; representação geométrica do sistema de números reais. Números complexos de duas unidades; forma algébrica; igualdade, desigualdade e operações. Noção elementar de variável e de função; expressão analítica de uma função; classificação das funções; funções inversas; representação gráfica de algumas funções.

Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites.

Noção elementar de continuidade de uma função.

Derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivadas das funções algébricas. Aplicação ao estudo da variação das funções nos casos simples.

Propriedades dos polinómios inteiros.

Adição algébrica, multiplicação e divisão de polinómios.

Divisão por (x-a); polinómio identicamente nulo; polinómios idênticos; principio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; regra de Ruffini.

Fracções algébricas; Símbolos de impossibilidade; símbolos de indeterminação da forma:

$$\frac{m}{0},\frac{m}{\infty},\frac{0}{0},0\times\infty e \infty\times\infty;$$

verdadeiro valor de uma expressão que se apresenta sob a forma indeterminada.

(Decreto nº 39807 do Diário de Governo nº 198 de 7 de Setembro de 1954)

Verificamos que, após o estudo da derivada, surge apenas a indicação do estudo de aplicações desta ao estudo da variação de funções nos casos simples.

Uma vez que vigora o regime do livro único, no final do programa vem a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em análise aparece a seguinte referência:

Compêndio de Álgebra, num volume.

Esta é, sem dúvida uma reforma muito importante no âmbito da nossa investigação uma vez que os manuais relativos a esta reforma são os primeiros a contemplar o estudo dos problemas de optimização.

Até ao final da década não se publica mais nenhuma alteração nos programas. Durante a mesma o ensino da Matemática é marcado pelo ensino memorístico e mecanizado. (Ponte, 1987, p. 5)

A Pires de Lima sucedeu, na pasta da Educação, Pinto Leite e Manuel Lopes de Almeida. Mas, a nível dos programas oficiais, não realizaram nenhuma alteração.

B. Análise dos Manuais

Esta é sem dúvida uma reforma com grande importância já que é nesta reforma que encontramos, pela primeira vez, problemas de optimização nos manuais escolares.

Como vigora novamente o regime do Livro Único, neste período apenas temos um manual escolar para analisar. Foram publicados mais manuais escolares, mas estes não apresentavam problemas de optimização. No entanto, o Livro Único teve várias edições que foram sofrendo algumas alterações. Assim sendo, iremos analisar as quatro edições que nos pareceram representativas deste período.

Todos os exemplares deste manual estavam rubricados e autenticados pelo Ministério da Educação Nacional.

Autor: José Sebastião e Silva; J. D. Silva Paulo
Título: Compêndio de Álgebra
Ano lectivo: 6º e7º Ano 3ºCiclo -Ensino Liceal
Ano, editora e lugar de edição: 1958, Livraria Rodrigues
Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Secundária José Falcão
Observações: Aprovado como livro único pelo D. G. nº 18, 2ª Série de 22/01/1958

Autor: José Sebastião e Silva; J. D. Silva Paulo
Título: Compêndio de Álgebra, 6º e7º Ano - 3ºCiclo -Ensino Liceal
Ano, editora e lugar de edição: 1960, Livraria Rodrigues
Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Secundária José Falcão
Observações: Aprovado como livro único pelo D. G. nº 18, 2ª Série de 22/01/1958

Autor: José Sebastião e Silva; J. D. Silva Paulo
Título: Compêndio de Álgebra, 6º ano, 1º Tomo -Ensino Liceal
Ano, editora e lugar de edição: 1963, Lisboa: Bertrand (Irmãos), Lda.
Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Secundária José Falcão
Observações: Aprovado como livro único pelo D. G. nº 100, 2ª Série de 24/04/1963.

Autor: José Sebastião e Silva; J. D. Silva Paulo
Título: Compêndio de Álgebra, 6º ano – 1º Tomo -Ensino Liceal
Ano, editora e lugar de edição: 1968, Braga: Livraria Cruz
Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Secundária José Falcão
Observações: Aprovado como livro único pelo D. G. nº 110, 2ª Série de 08/05/1968

Caracterização e estrutura da obra: A edição do Compêndio de Álgebra de 1958 estava dividida em duas partes: uma para o sexto ano e outra para o sétimo. Os Compêndios editados a seguir já estão separados para os dois anos, um para o sexto e outro para o sétimo. Na parte dedicada ao sexto ano encontramos um capítulo dedicado à derivada. Vejamos como está estruturado este capítulo:

Derivadas:

1. Introdução
2. Conceito de derivada

3. Regras de derivação

4. Aplicações das derivadas

Exercícios

Nota histórica

Observamos que existe, da parte dos autores, uma preocupação em apresentar uma introdução que permite depois perceber melhor o conceito. Existe também uma cuidado em apresentar uma nota histórica que permite aos alunos perceber quais os matemáticos que estudaram o tema bem como as várias etapas pelas quais passou o Cálculo Diferencial.

Neste compêndio, os problemas de optimização estão no quarto ponto, dedicado às aplicações das derivadas. Neste os autores começam por explicar o sentido da variação de uma função, a partir do sinal da derivada, e a seguir apresentam a aplicação dos teoremas enunciados e por fim dois exemplos de aplicações concretas. Encontramos dois problemas de optimização enunciados como exemplos de aplicação concreta do sentido da variação de uma função, seguidos da respectiva resolução. Existem depois no final do capítulo mais sete problemas de optimização, na parte dedicada aos exercícios de aplicação, as respectivas respostas surgem no final do enunciado de todos os exercícios.

Para além deste manual escolar, vamos ainda fazer a análise um livro de exercícios da autoria de António do Nascimento Palma Fernandes. Foi assistente na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e, posteriormente, professor do Liceu Pedro Nunes, sendo autor de vários livros de texto e livros de exercícios. A obra que analisamos teve várias edições. A última que encontrámos era a décima sétima edição que foi publicada em 1971 ou 1972. Vejamos, então, a ficha da obra:

Autor: António do Nascimento Palma Fernandes

Título: Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética Racional – 6º ano dos Liceus

Ano, editora e lugar de edição: 1961, Livraria Didáctica, Lisboa, 12ª edição

Localização da obra consultada: Biblioteca Pessoal

Caracterização e estrutura da obra: A obra está dividida em três partes, a primeira dedicada à Álgebra, a segunda dedicada à Trigonometria e a última à Aritmética Racional. A parte dedicada à Álgebra está dividida em sete capítulos, sendo o quinto consagrado às derivadas e ao estudo da variação das funções. Nesse capítulo o autor começa por apresentar oito exemplos resolvidos, sendo o último um problema de optimização. Depois apresenta cinquenta e um exercícios seguidos das respostas. Os exercícios estão separados por três temas:

- *Derivadas* (38 exercícios)
- *Estudo da variação de funções* (5 exercícios)
- *Problemas de máximos e mínimos* (8 exercícios)

Todos os problemas de máximos e mínimos são problemas de optimização.

Seguem-se os problemas de optimização que encontrámos nestas obras para cada um dos contextos.

Problemas de Geometria Métrica

SP1. *Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 cm, determinar os que tenham área máxima.* (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.230)

PF5. *Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 8 m, determinar os que tenham área máxima.* (Fernandes, 1961, p. 63)

SP3. *Exprimir a área, A, dum rectângulo, como função de um dos lados, x, supondo o perímetro igual a 20. Desenhar o gráfico da função no intervalo [0, 10]. Determinar, graficamente e analiticamente, o valor de x que torna a área máxima.* (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

PF1. *Dentre os rectângulos de perímetro igual a 20 cm determinar o que tem área máxima.* (Fernandes, 1961, p. 61))

SP6. *Um rectângulo está inscrito num semicírculo de raio fixo, r. Exprimir a área, A, do rectângulo, como função da base, x. Determinar o valor de x para o qual a área é máxima.* (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

PF4. *Dentre os rectângulos de área igual a 64 dm^2 qual é aquele que tem o perímetro mínimo? (Fernandes, 1961, p. 63)*

PF6. *Dentre os sectores circulares de perímetro igual a 8 metros, qual é o raio daquele que tem área máxima? (Fernandes, 1961, p. 63)*

PF7. *Dentre os prismas quadrangulares regulares que têm de volume 8 m^3, qual é aquele que tem área total mínima. (Fernandes, 1961, p. 63)*

PF8. *Dada uma esfera de raio igual a 1 metro determinar a medida do raio do cilindro de revolução inscrito de volume máximo. (Fernandes, 1961, p. 63)*

PF9. *A soma dos perímetros de uma circunferência e de um quadrado é constante. Demonstrar que a soma das áreas do círculo e do quadrado é mínima quando o diâmetro do círculo for igual ao lado do quadrado. (Fernandes, 1961, p. 63)*

Problemas de Aritmética

SP4. *A soma de dois números x e y, é uma constante a. Quando é máximo o seu produto (P = xy)? (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)*

SP5. *O produto de dois números positivos, x e y, é uma constante k. Quando mínima a sua soma (S = x + y)? (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)*

PF2. *Dois números têm por soma 12; determinar esses números de forma que a soma dos seus quadrados seja mínima. (Fernandes, 1961, p. 63)*

PF3. *Dois números têm por soma 20; determinar esses números de forma que o seu produto tenha valor máximo. (Fernandes, 1961, p. 63)*

Problemas de Medida em Contexto Real

SP2. *Pretende-se construir uma caldeira cilíndrica, fechada, com um dado volume V, de modo que a sua área total seja mínima. Determinar o raio da base, r, e a altura, h, da caldeira em tais condições.* (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.231)

SP7. *Uma caixa rectangular, sem tampa, de capacidade v, fixa, tem base quadrada. Exprimir a área total da caixa como função do lado, x, da base. Achar o valor de x para o qual a área é mínima.* (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

SP8. *Numa folha rectangular de zinco, com dimensões de 30 cm por 40 cm, cortam-se, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, dobrando-se em seguida a folha de modo a obter uma caixa aberta na parte superior. Determinar o volume da caixa como função do lado do quadrado que se cortou em cada canto. Qual deve ser a medida do lado do quadrado para que a caixa tenha volume máximo?* (Silva e Paulo, 1963, 1968 p.253)

SP9. *Pretende-se construir um gasómetro cilíndrico de volume V. Determinar a relação que deve existir entre o raio da base e a altura para que o custo da chapa metálica empregada na construção da superfície lateral e da base seja mínimo. Supõe-se que se emprega chapa da mesma espessura e da mesma qualidade em toda a superfície.* (Silva e Paulo, 1963, 1968, p.253)

C. Análise do período

Examinando o programa oficial relativo a esta reforma verificamos que o ano em que poderemos encontrar os problemas de optimização será no sexto, uma vez que é o ano em que se introduz o estudo da derivada. Esta encontra-se no capítulo de dedicado à Álgebra, precedida do estudo dos limites e da continuidade. O programa não refere especificamente o estudo dos problemas de optimização mas, após o estudo da derivada, refere-se a aplicação desta ao estudo da variação de funções em casos simples.

E como neste período vigora o regime do Livro Único, apenas efectuámos a análise dos Compêndios de Álgebra da autoria de Sebastião e Silva e de Silva Paulo editados ao longo de vários anos. Analisamos também um livro de exercícios da autoria de Palma Fernandes visto que este também foi editado ao longo de vários anos. Em ambas as obras é referido o estudo das aplicações das derivadas ou de problemas de máximos e mínimos.

No manual de Silva e Paulo **(SP)** há nove problemas de optimização: dois são apresentados como exemplos (SP1, SP2) e sete como exercícios de aplicação. No manual de Palma Fernandes **(PF)** existem nove problemas de optimização: um surge como exemplo (PF1) e os restantes como exercícios.

Observemos agora as características dos problemas deste período.

Começando por examinar as características que se prendem com a compreensão do problema, verificamos então que, dos dezoito problemas encontrados, apenas quatro apresentavam a respectiva resolução (SP1, PF5, PF1 e SP2). O problema PF9 é uma demonstração e os restantes problemas surgem como exercícios de aplicação. Nenhum dos enunciados vem acompanhado de gráficos, figuras ou esquemas auxiliares e, em relação aos problemas que apresentavam resolução, também estes não contêm qualquer tipo de figura, gráfico ou esquema auxiliar.

Identificamos, essencialmente, problemas geométricos, dez problemas de geometria métrica (SP1, PF5, SP3, PF1, SP6, PF4, PF6, PF7, PF8 e PF9) e quatro problemas em contexto real de medida (SP2, SP7, SP8 e SP9). Os restantes quatro problemas são problemas aritméticos. Assim sendo, neste período não assinalamos nenhum problema de Geometria Analítica, Física ou de Economia.

Os problemas de Geometria Métrica são do tipo:

> " ***(PF1)*** *Dentre os triângulos de perímetro igual a 20 cm determinar o que tem área máxima*"

Observemos agora um exemplo de um problema de Aritmética:

> " ***(PF3)*** *Dois números têm por soma 20, determinar esses números de forma que o seu produto tenha valor máximo".*

Relativamente aos problemas de medida em contexto real, temos o exemplo seguinte:

> " ***(SP9)*** *Pretende-se construir um gasómetro cilíndrico de volume V. Determinar a relação que deve existir entre o raio da base e a altura para que o custo da chapa metálica empregada na construção da superfície lateral e da base seja mínimo. Supõe-se que se emprega chapa da mesma espessura e da mesma qualidade em toda a superfície.*"

Estes três tipos de problemas estão presentes em quase todos os manuais analisados para as reformas posteriores.

Em relação à função a optimizar vimos que, nos catorze problemas geométricos, em onze pretende-se optimizar uma área: No problema SP1 e PF5 optimiza-se a área de um triângulo rectângulo dada a medida da hipotenusa, no problema SP3 e PF1 pretende-se optimizar a área de um rectângulo dada a medida do perímetro, no problema SP6 também se optimiza a área de um rectângulo, mas neste caso é ligeiramente mais complexo visto que o rectângulo está inscrito numa circunferência, de tal modo que será necessário determinar o seu comprimento e largura em função do raio da circunferência; no problema SP6 pretende-se determinar a área máxima de um sector circular, dado o perímetro; e no problema PF9 pretende-se optimizar a soma das áreas de um círculo e de um quadrado, dada a soma dos seus perímetros. Os restantes problemas em que se pretende optimizar uma área são de geometria espacial, sendo que no problema PF7 pretende-se determinar a área total mínima de um prisma quadrangular dado o volume, nos problemas SP2 e SP9 pretende-se optimizar a área de um cilindro dado o volume e no problema SP7 pretende-se optimizar a área de um paralelepípedo dado o volume.

Nos problemas PF8 e SP8 têm como objectivo optimizar o volume: sendo que no primeiro optimiza-se o volume de um cilindro de revolução inscrito numa esfera dado o raio desta e no segundo optimiza-se o volume de uma caixa dadas as dimensões da folha a utilizar para a construir. Apenas no problema PF4 se optimiza o perímetro de um rectângulo dada a sua área. Quanto aos problemas aritméticos, verificamos que em metade se pretende optimizar a soma de dois números (SP5, PF2), no primeiro pretende optimizar-se a soma de dois números dado o seu produto e no segunda pretende-se optimizar a soma dos seus quadrados dada a sua soma. Na outra metade (SP4 e PF3) pretende-se optimizar o produto de dois números dado a sua soma.

Nenhum problema tem figuras ou esquemas auxiliares. Quanto aos dados fornecidos no enunciado do problema, verificamos que a maioria dos problemas apresenta dados numéricos e apenas sete problemas dados genéricos (SP6, PF9, SP4, SP5, SP2, SP7 e SP9). Nos dois exemplos a seguir, o primeiro apresenta dados numéricos e o segundo dados genéricos:

> " ***(PF8)*** *Dada uma esfera de raio igual a 1 metro determinar a medida do raio do cilindro de revolução inscrito de volume máximo."*

> " **(SP7)** *Uma caixa rectangular, sem tampa, de capacidade v, fixa, tem base quadrada. Exprimir a área total da caixa como função do lado, x, da base. Achar o valor de x para o qual a área é mínima."*

Também o enunciado é na maioria dos problemas um enunciado simples e apenas quatro dos problemas encontrados apresentam um enunciado que orienta/encaminha na resolução do problema (SP3, SP6, SP7 e SP8). Vejamos:

> " ***(SP3)*** *Exprimir a área, A, dum rectângulo, como função de um dos lados, x, supondo o perímetro igual a 20. Desenhar o gráfico da função no intervalo [0, 10]. Determinar, graficamente e analiticamente, o valor de x que torna a área máxima.*

Observamos que, neste exercício, o aluno sabe que terá de começar por determinar a área do rectângulo em função de um dos lados e que a seguir irá desenhar o gráfico da função. Estas duas questões tornam-se extremamente úteis uma vez que, quando se pede para optimizar a área, o aluno já terá quase todo o trabalho realizado.

> " **(SP6)** *Um rectângulo está inscrito num semicírculo de raio fixo, r. Exprimir a área, A, do rectângulo, como função da base, x. Determinar o valor de x para o qual a área é máxima.*"

Vemos que, neste exercício, o autor começa por pedir para exprimir a área do rectângulo em função da base e só depois pede para determinar o valor de x para o qual a área é máxima.

> " **(SP7)** *Uma caixa rectangular, sem tampa, de capacidade v, fixa, tem base quadrada. Exprimir a área total da caixa como função do lado, x, da base. Achar o valor de x para o qual a área é mínima.*"

Também neste exercício o autor começa por pedir para exprimir a área total da caixa como função do lado da base e só depois pede para determinar o valor de x para o qual a área é mínima.

> " **(SP8)** *Numa folha rectangular de zinco, com dimensões de 30 cm por 40 cm, cortam-se, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, dobrando-se em seguida a folha de modo a obter uma caixa aberta na parte superior. Determinar o volume da caixa como função do lado do quadrado que se cortou em cada canto. Qual deve ser a medida do lado do quadrado para que a caixa tenha volume máximo?*"

Neste problema o autor começa por pedir para determinar o volume em função do lado do quadrado que se cortou nos quatro cantos da folha e só depois pede para determinar o valor do lado desse quadrado de forma que o volume seja máximo.

Passando agora para as características relativas ao estabelecimento de um plano observamos que, relativamente à função auxiliar que permite relacionar as variáveis, na maioria dos problemas é uma função que surge explicitamente, estando implícita apenas em seis problemas (SP1, PF5, PF1, SP6, PF8 e SP8). Vejamos um exemplo para cada uma das situações:

> " ***(PF4)*** *Dentre os rectângulos de área igual a 64 dm^2 qual é aquele que tem o perímetro mínimo?*"

> " **(SP8)** *Numa folha rectangular de zinco, com dimensões de 30 cm por 40 cm, cortam-se, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, dobrando-se em seguida a folha de modo a obter uma caixa aberta na parte superior. Determinar o volume da caixa como função do lado do quadrado que se cortou em cada canto. Qual deve ser a medida do lado do quadrado para que a caixa tenha volume máximo?*"

Analisando estes dois problemas verificamos que, na primeira situação é fornecido o valor da área e pede-se para optimizar o perímetro. Assim sendo, é fácil para o aluno verificar que a função auxiliar será determinada a partir do valor da área. Em contrapartida, na segunda situação, para determinar o volume o aluno terá de determinar o comprimento, a largura e a altura da caixa, uma vez que apenas é fornecida a medida dos lados da folha e o facto de serem retirados quatro quadrados dos cantos, o aluno terá de utilizar a noção de distância para verificar que o comprimento/largura da caixa será a diferença entre o comprimento/largura da folha e o comprimento/largura dos dois cantos, e a altura da caixa será a medida do lado do quadrado a retirar dos cantos.

As noções aplicadas na resolução dos problemas são, para os problemas geométricos, a noção de distância, o Teorema de Pitágoras e as fórmulas de cálculo do perímetro, da área e do volume. A noção de distância é utilizada no problema SP8 em que é fornecida a medida dos lados de uma folha rectangular e a partir daí tem de se determinar a medida do comprimento, da largura e da altura da caixa formada depois de cortar quatro quadrados dos cantos com a mesma medida. O Teorema de Pitágoras aplica-se na resolução dos problemas SP1, PF5, SP6 e PF8: Nos dois primeiros é dada a hipotenusa de um triângulo rectângulo e pretendemos escrever a medida de um dos catetos em função do outro cateto, no terceiro problema temos de determinar a base e a altura de um rectângulo inscrito num semicírculo a partir do raio e no último pretendemos determinar o raio da base e a altura de um cilindro inscrito numa esfera, dado o raio desta. Relativamente aos quatro problemas em que se utiliza a fórmula de cálculo do perímetro (SP3, PF1, PF6 e PF9), nos dois primeiros é dado o perímetro do rectângulo, no terceiro o perímetro de um sector circular e no último a soma do perímetro de uma circunferência e um quadrado. Quanto ao problema em que se utiliza a fórmula de cálculo da área (PF4) aplica-se a fórmula de cálculo da área de um rectângulo para determinar a medida do comprimento em função da medida da largura. Quanto aos quatro problemas em que utilizamos a fórmula de cálculo do volume (PF7, SP2, SP7 e SP9), no primeiro é dado o volume de um prisma quadrangular regular que se utilizará para determinar a medida da altura em função do medida do lado da base, no segundo e no último o volume de um cilindro para determinar a medida da altura em função da medida do raio da base, no terceiro é dado o volume de uma caixa rectangular de base quadrada que tem de ser utilizada para determinar a medida da altura da caixa em função do lado da base. Para os problemas aritméticos usou-se a soma e o produto. No problema SP5 é dado o produto de dois números que será utilizado para determinar um dos números em função do outro e nos restantes três problemas (SP4, PF2 e PF3) é dada a soma de dois números que será utilizada para determinar um dos valores em função do outro.

Consideremos o exemplo de um problema em que utilizamos o Teorema de Pitágoras e um problema aritmético em que se utiliza o produto:

> " ***(SP1)*** *Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 cm, determinar os que tenham área máxima."*

> ***" (SP5)*** *O produto de dois números positivos, x e y, é uma constante k. Quando mínima a sua soma (S = x + y)?"*

Para delinear a estratégia de resolução dos problemas, verificamos que onze problemas surgem pela primeira vez neste período, quatro já tinham surgido nas obras históricas (PF1, PF7, SP3, SP4) e três foram retirados do enunciado de exames (SP1, PF5, SP2).

Passemos agora às características que se prendem com a execução do plano. Começando pelo tipo de funções utilizadas para optimizar, vimos que apenas surgem três tipos de funções. Na maioria dos problemas surge para optimizar uma função polinomial, em cinco problemas aparece uma função racional (PF4, PF7, SP2, SP7 e SP9) e apenas em três problemas uma função irracional (SP1, PF5 e SP6). Nos problemas em que surge uma função racional, esta surge porque se utilizou a fórmula de cálculo da área ou do volume para determinar o valor de uma variável em função da outra variável, Quanto aos três problemas em que se chega a uma função irracional, esta surge uma vez que se aplicou o Teorema de Pitágoras para determinar o valor de uma das variáveis em função da outra variável.

Quanto ao esquema utilizado para o cálculo de máximos e mínimos, nos problemas que apresentam resolução, notamos que os autores começam por calcular a derivada da função a optimizar, depois calculam os zeros da derivada e, por fim, estudam o sinal da derivada, concluindo a seguir se o ponto é um máximo ou um mínimo. Vejamos o exemplo de resolução de um dos problemas:

> " ***(SP1)*** *Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 cm, determinar os que tenham área máxima."*

Resolução:

1. Equacionar os dados do problema e determinar a equação que se pretende optimizar em função de uma só variável

Representamos por x e y as medidas dos catetos de um tal triângulo, a sua área, S, será: S = xy/2. Mas tem-se $x^2 + y^2 = 36$, donde y = $\sqrt{36-x^2}$. Podemos pois exprimir S como função só de x:

$$S = \frac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}$$

2. Derivar a equação

Ora a derivada de S em relação a x é:

$$S' = \frac{1}{2}\sqrt{36-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{36-x^2}} = \frac{18-x^2}{\sqrt{36-x^2}}$$

3. Estudar o sinal da derivada e relacionar o sinal da derivada com a monotonia da função

Como o denominador da última fracção é sempre positivo, o sinal de S' será o de $18 - x^2$. Tem-se pois S' > 0, S' < 0 ou S' = 0, conforme for

$18 - x^2 > 0$, $18 - x^2 < 0$ ou $18 - x^2 = 0$,

Isto é, conforme $x < \sqrt{18}$, $x > \sqrt{18}$ ou $x = \sqrt{18}$. Logo, a função S de x (com x > 0) será crescente para $x \leq \sqrt{18}$ e decrescente para $x \geq \sqrt{18}$;

4. Conclusão e resposta ao problema

É portanto máxima para

$$x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \text{ sendo então } y = \sqrt{36-x^2} = 3\sqrt{2}$$

-em conclusão: os triângulos de área máxima, entre aqueles considerados, são isósceles.

Para terminar, em relação à reflexão, observamos que o valor pedido é explícito em onze problemas, ou seja, o autor indica claramente o valor que pretende. O valor pedido é implícito nos restantes sete problemas, ou seja, nestes o autor não indica explicitamente o valor que pretende. Consideremos um exemplo de cada uma das situações:

*“ **(PF6)** Dentre os sectores circulares de perímetro igual a 8 metros, qual é o raio daquele que tem área máxima? (Fernandes, 1961, p. 63)”*

*“ **(PF7)** Dentre os prismas quadrangulares regulares que têm de volume 8 m^3, qual é aquele que tem área total mínima. (Fernandes, 1961, p. 63)”*

No primeiro problema é pedido explicitamente o valor do raio enquanto que no segundo problema é pedido o prisma quadrangular regular com área total mínima, não se especificando qual a medida que se pretende, subentende-se que se pretende a medida do lado da base e a medida da altura.

Assim sendo, verificamos que este período é caracterizado por problemas em que não surge qualquer esquema, figura ou gráfico como auxiliar da interpretação do problema ou para ajudar na resolução. Não aparecem problemas de Geometria Analítica, de Física ou Economia e também não surgem problemas para apresentar um relatório.

Os dados obtidos na análise dos problemas de optimização deste período estão sintetizados na tabela a seguir.

3.3. INTRODUÇÃO DAS MATEMÁTICAS MODERNAS

A introdução das Matemáticas Modernas em Portugal, nos anos sessenta, foi vista como uma "Revolução no ensino". Era desta forma que era referida pelos meios de comunicação.

Esta revolução surge na sequência do que se vinha fazendo nos outros países, em muitas situações, por indicação de organismos internacionais. Em 1959 a Organização Europeia de Cooperação Económica (OECE) promoveu uma reunião de duas semanas em Royamont, França, com o tema "As novas matemáticas". Foi discutida então a necessidade de uma apresentação moderna da Matemática no Ensino Secundário.

Uma das conclusões mais importantes desta reunião foi a necessidade de modernizar o ensino da matemática. Para essa modernização era indispensável que cada país redigisse novos compêndios e os submetesse a ensaios sistemáticos.

José Sebastião e Silva (1914-1972) ocupou uma posição de destaque na introdução das Matemáticas Modernas em Portugal. Era licenciado em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Ciências de Lisboa na qual continuou depois como assistente, e, mais tarde, em 1960, foi nomeado professor catedrático, leccionando as disciplinas de Análise Superior e de História do Pensamento Matemático.

Foi também professor catedrático do Instituto Superior de Agronomia, e atendendo aos seus méritos, fora convidado por inúmeras e conceituadas universidades para realizar cursos e conferências acerca dos seus trabalhos de investigação.

Integrou o Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, onde publicou um vasto número de artigos de grande valor científico, reconhecidos a nível internacional. Assumiu posteriormente a sua direcção dando-lhe uma nova dinâmica.

Para além da rica carreira científica, assumiu também um papel fundamental na introdução das Matemáticas Modernas em Portugal. Presidiu à Comissão de estudos para a modernização do Ensino Liceal, nomeada pelo então ministro Galvão Teles. Publicou manuais e guias de utilização dos compêndios para alunos e professores e ministrou igualmente cursos de preparação ou de actualização para os professores dos liceus.

3.3.1. A REFORMA DE SEBASTIÃO E SILVA (1963)

Desde 4 de Dezembro de 1962, a pasta da educação é ocupada por Inocêncio Galvão Teles. A ele se deve o primeiro passo institucional para a introdução das Matemáticas Modernas em Portugal.

A. Análise do programa oficial

Dado o estado de degradação em que o ensino da Matemática se encontrava nesse momento, imperando um método de ensino desactualizado e incorrecto, foi nomeada uma comissão[19], em Julho de 1963, com o objectivo de realizar estudos e experiências sobre a actualização dos programas da disciplina de Matemática do 3º ciclo de Ciências do Ensino Liceal, tendo em conta as alterações que os programas de Matemática vinham a sofrer a nível internacional. Essa comissão era formada por quatro membros: José Sebastião e Silva (Presidente), Jaime Furtado Leote, Manuel Augusto da Silva e António Augusto Lopes.

Foram então criadas turmas piloto de Matemática Moderna, para o 6º e 7º ano do Liceu. Foi também nomeada uma comissão de eminentes professores de Matemática das universidades, das escolas secundárias e das instituições encarregadas de formar professores do Ensino Secundário. Esta comissão apresentou depois um relatório dos seus trabalhos contendo sugestões importantes.

Assim, o Ensino Secundário (com 6 anos) foi dividido em dois ciclos de três anos cada um. Os programas foram adaptados aos métodos tradicionais dos países que empreenderam a modernização dos seus programas. Considerou-se ainda que o ensino elementar das matemáticas não se devia procurar a abstracção, mas sim partir de bases concretas (Diário Popular, 06/03/1963).

Para além dos compêndios e guias para professores e alunos, era também necessário realizar cursos de preparação ou de actualização. Por isso, no ano lectivo de 58/59 Sebastião e Silva realizou no liceu Pedro Nunes uma série de palestras intituladas "Introdução à Lógica Simbólica e os Fundamentos de Matemática". Posteriormente, no ano lectivo 62/63, também a pedido dos professores, orientou um curso de "Introdução à

[19] Comissão de estudos para a modernização do Ensino Liceal

Matemática Moderna", na Faculdade de Ciências de Lisboa. Estes cursos tiveram uma forte adesão por parte dos professores. No ano seguinte foi ministrado novamente o mesmo curso, promovido pelo Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, que igualmente teve uma forte adesão dos professores.

Entre 1963 e 1966, Sebastião e Silva dedicou-se à escrita dos manuais (texto - piloto) e guias. Estes eram uma preciosa ajuda para a preparação das aulas dos professores. Os textos foram divididos em 3 volumes. Um para o 6º ano, e dois para o 7º ano. Cada um destes vinha acompanhado de um guia com algumas recomendações e orientações metodológicas.

Os programas sofreram uma alteração significativa. Foram introduzidos novos temas: Lógica, Teoria de Conjuntos, Álgebra, Cálculo Integral, Probabilidades, Estatística e Cálculo Numérico Aproximado. A Aritmética Racional foi suprimida do programa e todos os outros temas se mantiveram inalterados.

Assim, após realizadas as experiências nas turmas – piloto, procedeu-se, em 1967, à introdução em todos os liceus dos programas das Matemáticas Modernas. Em 1968 foram publicados os do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário (Portaria nº23:601 do Diário de Governo nº 213, Iª série, 2º suplemento de 9 de Setembro de 1968).

Nesses novos programas volta a ser criado um capítulo dedicado ao Cálculo Diferencial e o estudo da Derivada volta novamente para o 7º ano. Veja-se como ficou estruturado este capítulo.

Índice dos compêndios de Matemática do Ensino Complementar de Sebastião e Silva 1963/64

Volume II (7º Ano)

Capítulo I. Introdução ao cálculo diferencial

1. Cálculo numérico aproximado

2. Teoria dos limites de sucessões

3. Limites de funções de variável real

4. Derivadas

- *Conceitos fundamentais e regras de derivação*
- *Conceito de diferencial*
- *Regras de diferenciação*
- *O conceito de diferencial nas ciências da natureza*
- *Derivadas das funções exponencial e logarítmica*
- *Derivada da função logarítmica*
- *Derivadas das funções circulares*
- ***Máximos e mínimos: concavidade e inflexões***

- *Teorema de Cauchy*
- *Método da tangente (ou de Newton)*
- *Método da corda (ou regra da falsa posição)*
- *Interpolação por diferenças finitas*

Verificamos que o estudo da derivada é agora mais aprofundado do que anteriormente, referindo-se, pela primeira vez, o estudo dos máximos e mínimos.

Posteriormente a Galvão Teles, entre 19 de Agosto de 1968 e 15 de Janeiro de 1970, a pasta da Educação foi ocupada por José Hermano Saraiva. Este não fez nenhuma alteração a nível dos programas oficiais, concretamente no programa da disciplina de Matemática.

B. Análise dos Manuais Escolares

Uma vez que Sebastião e Silva dirigia a experiência de modernização do ensino da Matemática em Portugal, foi ele o autor dos textos-piloto, bem como dos guias de utilização dos mesmos textos utilizados pelos professores e pelos alunos nas turmas envolvidas nesta experiência. Sendo assim, iremos apenas analisar, nesta parte, este texto piloto.

Autor: J. Sebastião e Silva
Título: *Compêndio de Matemática*, 7º Ano
Ano, editora e lugar de edição: 1965, Lisboa: G.E.P.A.E.
Localização da obra consultada: Biblioteca Pessoal

O referido texto foi dactilografado pelo autor e foi editado pelo Ministério da Educação Nacional com a cooperação da O.C.D.E., de acordo com o 2º Projecto Especial STP-4/SP/Portugal.

Posteriormente, em 1976, após o falecimento do autor, estes textos-piloto foram publicados pelo Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica.

Na obra, Sebastião e Silva não apresenta nenhum problema de optimização, mas no ponto denominado "Máximos e mínimos: concavidade e inflexões" refere o seguinte:

Sobre estes assuntos seguir o Compêndio de Álgebra. Como já foi observado atrás, convirá até começar a tratá-los imediatamente após terem sido dadas as primeiras regras da derivação (antes do conceito de diferencial), para que o aluno tome contacto, o mais cedo possível, com as aplicações concretas do estudo das derivadas.

Concluímos então, que apesar de este compêndio não apresentar nenhum problema de optimização, o autor refere que se faça o estudo dos problemas apresentados no Compêndio de Álgebra. As várias edições desta obra foram analisadas no sub-capítulo3.2.

Observamos ainda, neste parágrafo, a preocupação do autor em apresentar para o tema das Derivadas, o mais cedo possível, as aplicações concretas para que os alunos tenham noção da aplicabilidade do tema em estudo.

3.3.2. A REFORMA DE VEIGA SIMÃO (1973)

A partir de 15 de Janeiro de 1970, a pasta da Educação foi ocupada por José Veiga Simão. Cerca de um ano depois de ter tomado posse apresenta dois documentos com vista a reformar o ensino. O Projecto do Sistema Escolar e as Linhas Gerais da Reforma do Ensino Superior. Promulgou ainda a Lei Orgânica do Ministério da Educação onde foi criada, entre outras, a Direcção do Ensino Secundário.

A. Análise do programa oficial

Após muita discussão e debate na Assembleia Nacional, A *Lei de Bases do Sistema Educativo*, foi publicada a 25 de Julho de 1973. No entanto, esta não chegou a ser implementada, uma vez que a 25 de Abril, de 1974, se deu a Revolução de Abril, que derrubou a ditadura.

Em Outubro de 1973 a escolaridade obrigatória é alargada para oito anos.

Os programas da disciplina de Matemática sofrem uma alteração em Junho de 1973. Nesta data a Direcção do Ensino Secundário publica o novo programa para o Curso Complementar dos liceus. Neste, é clara a influência do já falecido Sebastião e Silva uma vez que diz ainda respeito às Matemáticas Modernas.

Deste modo, o tema em estudo continua a fazer parte do 5º ano (antigo 7º ano), inserido no capítulo dedicado à Análise Infinitesimal. Observe-se como se encontra estruturado o programa de Matemática do 5º ano:

Programas de Matemática do Curso Complementar para o ano lectivo de 1974/75

5º Ano

2. Introdução à análise infinitesimal

2.1. Limites de sucessões

2.2. Limites de funções reais de variável real

2.3. Funções continuas

2.4. Derivadas e primitivas.

Derivada de uma função num ponto; significado geométrico. Derivabilidade e continuidade. Função derivada. Interpretação cinemática do conceito de derivada. Regras de derivação. Derivada da função inversa e da função composta. ***Aplicações das derivadas:*** *sentido da variação de uma função, concavidades, gráficos e*

***problemas concretos**. O problema da primitivação. Primitivação imediata e primitivação por decomposição. Aplicações simples do cálculo de primitivas.*

(DGES, Diário de Governo nº 149,I Iª série de 27 de Junho de 1973)

Como facilmente se infere, é possível verificar que o programa não refere explicitamente o estudo de problemas de optimização, mas refere o estudo das aplicações das derivadas a problemas concretos.

Foram também publicados os programas da Matemática Clássica para o 1º ano do Curso Complementar – antigo 6º ano, uma vez que, apesar de o ensino das Matemáticas Modernas já estar generalizado, ainda havia turmas onde se leccionavam estas matemáticas. Este programa é uma redução do programa anterior.

Curso Complementar – Matemática Clássica

Esquema Programático – 1º ano

2.7. As funções de variável natural. Limites de Sucessões

Limites de funções de variável real: continuidade

Derivadas: definição de derivada de uma função num ponto e sua interpretação geométrica.

Derivabilidade e continuidade (Com demonstração).

A função derivada. Regras de derivação, incluindo a derivada da raiz. Dedução nos casos da soma, produto, potência e derivada da função inversa.

***Aplicação a problemas de máximos e mínimos** e representação gráfica de funções.*

(DGES, Diário de Governo nº 149,I Iª série de 27 de Junho de 1973)

Pelo que se conclui, então, que a derivada é abordada no final do primeiro ano. O programa considera que se faça o estudo da aplicação da derivada a problemas de máximos e mínimos. Não se refere ainda a abordagem dos problemas de optimização.

B. Análise dos Manuais Escolares

Apesar de, em 1973, já estar em vigor, em todos os liceus, o programa da Matemática Moderna, existiam ainda turmas onde se leccionava a Matemática Clássica. Por isso, ainda encontramos uma edição de um manual de 1973, da autoria de Ondina

Vasconcelos, com o programa da Matemática Clássica, manual que iremos analisar nesta secção.

Em relação às Matemáticas Modernas, seleccionámos um manual da autoria de Madalena Garcia, Alfredo Osório e António Ruivo e dois livros de exercícios: um da autoria de Fernando Borja Santos e o outro da autoria de Loureiro de Amorim.

Seguem-se as fichas de cada uma das quatro obras:

Autor: Ondina Vasconcelos

Título: Compêndio de Matemática, 1º CC (Antigo 6º) Matemática Clássica

Ano, editora e lugar de edição: 1973, Porto Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca da Universidade de Trás-os-Montes

Caracterização e estrutura da obra: Esta obra é constituída por dezassete capítulos, sendo o último dedicado às derivadas. O Capítulo que se refere às derivadas está estruturado da seguinte forma:

1. *Derivada de uma curva num ponto. Conceito de tangente*
2. *Conceito de derivada*
3. *Regras de derivação*
4. ***Aplicações das derivadas***

Encontramos os problemas de optimização no quarto ponto, dedicado às aplicações das derivadas. Este ponto começa por abordar o sentido da variação de uma função, apresentando depos a aplicação dos teoremas relativos ao sentido da variação de uma função, a seguir as concavidades e inflexões, e, por fim, as aplicações concretas, onde se encontram os problemas de optimização.

Autor: Fernando Borja Santos

Título: Sebenta de Matemáticas Modernas – 5º Ano C.C. – Vol. I

Ano, editora e lugar de edição: 1974

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Secundária José Falcão.

Caracterização e estrutura da obra: Fernando Borja Santos era Licenciado em Ciências Matemáticas. A obra tem 398 páginas e está escrita à máquina.

Esta obra era essencialmente um livro de exercícios já que contém 500 exercícios resolvidos e explicados. Para cada um dos temas o autor começa por apresentar uma explicação teórica e posteriormente apresenta os exercícios respectivos.

A parte dedicada ao crescimento e concavidades está estruturada da seguinte forma:

- *Variação duma função; Máximo relativo; Mínimo relativo; Determinação dos pontos de máximo e mínimo; Exercícios*
- ***Problemas de máximos e mínimos;*** *Exercícios*
- *Derivadas de ordem superior; Concavidade e inflexão; Exercícios*
- *Tangentes nos pontos de inflexão; Exercícios*
- *Assintotas; Exercícios*

Autor: Madalena Garcia; Alfredo Osório; António Ruivo

Título: *Compêndio de Matemática* – 2º Ano C. C. V1

Ano, editora e lugar de edição: 1975, Empresa Literária Fluminense

Localização da obra consultada: Biblioteca Pessoal

Observações: D.L. nº 47 587 de 10/3/1967 (Experiências Pedagógicas)

Caracterização e estrutura da obra: Este manual tem 174 páginas, tem capa rija com a imagem de um referencial e algumas definições em linguagem matemática.

Os autores referem no prefácio o seguinte:

> *"Este compêndio de Matemática para o segundo ano do Curso Complementar dos Liceus foi elaborado, na linha de rumo do Compêndio do primeiro ano, tomando como base os textos para os programas experimentais da autoria do Professor Doutor Sebastião e Silva."*

Observamos então que a influência dos textos do Professor Sebastião e Silva é marcante na elaboração destes manuais.

O capítulo dedicado às derivadas está estruturado da seguinte forma

- Derivada de uma função num ponto: significado geométrico
- Derivabilidade e continuidade
- Função derivada
- Regras de derivação
- Derivada de uma função inversa
- Derivada de uma função composta
- **Aplicações das derivadas**

Os problemas de optimização encontram-se na parte dedicada às aplicações da derivada.

Nesta parte, os autores começam por explicar o estudo da variação de uma função. A seguir explicam o estudo das concavidades de uma função e por fim mostram problemas concretos, entre os quais estão alguns problemas de optimização.

Os mesmos autores também publicaram um manual na reforma que se segue mas, em relação aos problemas de optimização, não é feita nenhuma alteração.

Autor: J. A. Loureiro de Amorim

Título: *Exercícios de Matemática* – 2º Ano CC.

Ano, editora e lugar de edição: 1977

Localização da obra consultada: Didáctica Editora

Caracterização e estrutura da obra: Uma vez que esta obra é um livro de exercícios, começa por apresentar uma síntese da parte teórica seguida de exercícios resolvidos e depois exercícios para resolver.

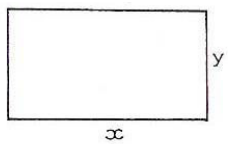
O capítulo dedicado às derivadas está estruturado da seguinte forma:

- Definição
- Regras de derivação
- Aplicações das derivadas
- Crescimento de uma função
- Máximos e mínimos
- Concavidades
- **Aplicações concretas**

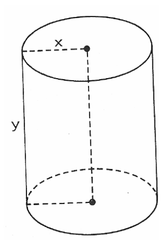
Os problemas de optimização encontram-se no ponto dedicado às aplicações concretas.

Passemos agora à análise dos problemas de optimização encontrados nestas obras.

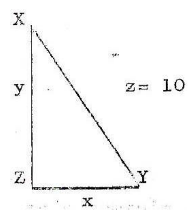
Problemas de Geometria Métrica



OV1. *A medida da área de um rectângulo é A e o perímetro é 18. Determinar a medida de cada uma das dimensões do rectângulo de área máxima. (Vasconcelos, 1973, p. 404)*



OV4. *O perímetro de um rectângulo é 2p. Determine as medidas das suas dimensões, de modo que seja, máximo o volume do cilindro por ele gerado, ao efectuar uma rotação completa em torno de um dos lados. (Vasconcelos, 1973, p. 408)*



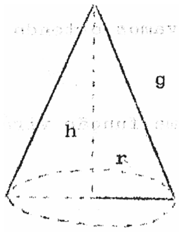
BS1. *Determinar o triângulo rectângulo de área máxima e cuja hipotenusa seja igual a 10 metros. (Santos, 1974, p. 368)*

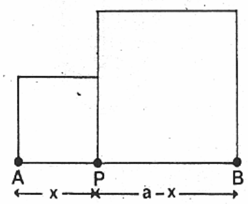
BS2. *Dentre os cilindros de volume igual a 16π, determine os que têm área total mínima. (Santos, 1974, p. 370)*

BS4. *Dentre os rectângulos de perímetro igual a 16, qual o que tem área máxima? (Santos, 1974, p. 371)*

BS5. *Dentre os rectângulos de área igual a S, qual o que tem perímetro mínimo? (Santos, 1974, p. 372)*

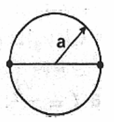
BS6. *Determine a altura que deve ter um cone de revolução cuja geratriz mede 9 cm, para que o seu volume seja máximo? (Santos, 1974, p. 373)*



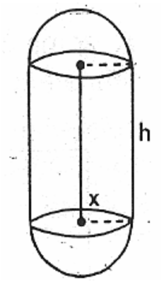


GOR2. *Determinar num segmento [AB] de comprimento a (fixo), um ponto P de modo que seja mínima a soma das áreas dos quadrados de lados* $\overline{AP}$ *e* $\overline{PB}$. *(Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 153)*

GOR3. *Um sólido é constituído por um cilindro de raio da base x e de altura h e por duas semiesferas assentes sobre as bases do cilindro e de raio igual ao raio da base deste.*



Supondo a superfície total do sólido igual a $4\pi a^2$ *e variáveis x e h, averiguar qual é o sólido de volume máximo. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 154)*

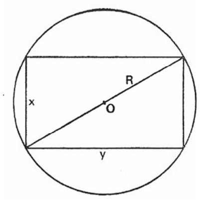


GOR4. *Averigúe de entre os rectângulos de área igual a 64 dm²,* *qual é aquele que tem o perímetro mínimo. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 157)*

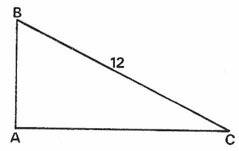
GOR5. *Considere os paralelepípedos rectângulos de base quadrada em que a soma das medidas das suas dimensões é 3.*

Determine a altura daquele que apresenta máximo volume. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 157)

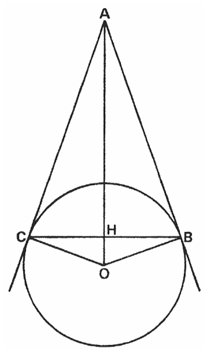
GOR6. *Exprima a área A de um rectângulo como função de um dos lados x, supondo que o perímetro é 20. Desenhe o gráfico da função no intervalo [0, 10]. Determine graficamente e analiticamente o valor de x que torna a área máxima. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 157)*



LA5. *Entre todos os rectângulos inscritos num círculo de raio R, qual será o que tem área máxima? (Amorim, 1977, p. 145)*



LA10. *Qual é a maior área que pode ter um triângulo rectângulo de hipotenusa 12 m? (Amorim, 1977, p. 150)*



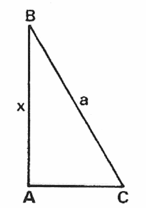
LA11. *Dois pontos A e O distam de a. Com centro no ponto O descreve-se uma circunferência de raio variável R e do ponto A tiram-se duas tangentes a essa circunferência.*

a) Qual é o triângulo isósceles, formado pelas duas tangentes e a corda que une os pontos de contacto, que tem superfície máxima?

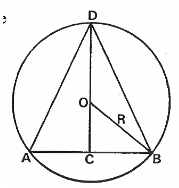
b) Qual é o quadrilátero formado pelas duas tangentes e pelos raios que passam pelos pontos de contacto, que tem superfície máxima? (Amorim, 1977, p. 152)

LA17. *Que relação há entre o raio e a altura de um cilindro de revolução (aberto na parte superior) que, entre todos os que tem o mesmo volume V, tem a menor superfície? (Amorim, 1977, p. 157)*

LA18. *Quais são as dimensões de um rectângulo que tem 196 m² de superfície, sabendo que o seu perímetro é mínimo? (Amorim, 1977, p. 157)*



LA13. *Um triângulo rectângulo de hipotenusa a dada, roda em torno do cateto maior. Qual é o máximo volume gerado que se pode obter? (Amorim, 1977, p. 155)*



LA14. *Inscrever numa esfera de raio R um cone cuja superfície lateral seja o maior possível. (Amorim, 1977, p. 155)*

LA15. *Dividir um comprimento de lado l, em dois segmentos tais que o produto dos seus comprimentos seja máximo. (Amorim, 1977, p. 157)*

LA16. *De todos os cilindros de revolução que tem a mesma superfície total de 1 dm².quais são as dimensões daquele que tem o maior volume? (Amorim, 1977, p. 157)*

LA21. *Num triângulo equilátero cujo lado a é dado, inscrever outro triângulo equilátero com a menor superfície possível.*

Concretizar para a = 12 m. (Amorim, 1977, p. 159)

LA22. *Num círculo de raio R traça-se uma corda perpendicular a um diâmetro e unem-se as extremidades da corda às extremidades do diâmetro. Calcular o máximo da diferença das duas superfícies dos dois triângulos que tem a corda comum como base. (Amorim, 1977, p. 159)*

LA23. *Num círculo de raio R traçar uma corda de maneira que fazendo-a girar em torno do diâmetro que lhe é paralelo, a superfície engendrada seja máxima. (Amorim, 1977, p. 159)*

LA24. *De todos os cilindros que tem a mesma superfície total* $2\pi a^2$ *qual é o que tem volume mínimo? (Amorim, 1977, p. 160)*

Problemas de Geometria Analítica

LA20. *Encontrar o caminho mínimo para ir de um ponto A a outro B, tocando uma dada recta r (os pontos A e B ficam do mesmo lado da recta). (Amorim, 1977, p. 159)*

Problemas de Aritmética

OV2. *A soma de dois números x e y, é uma constante a. Quando é máximo o seu produto? (Vasconcelos, 1973, p. 405)*

OV3. *O produto de dois números x e y é um constante a. Quando é mínima a sua soma? (Vasconcelos, 1973, p. 407)*

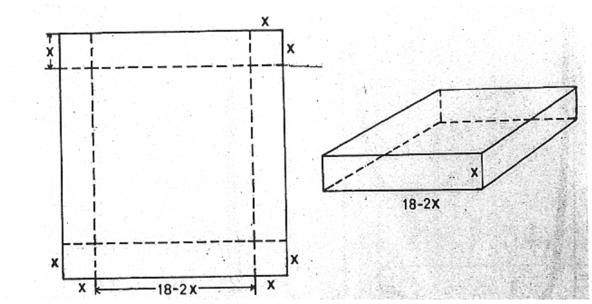
BS3. *Dividiu-se 32 em duas partes. Determinar esses números de forma que o seu produto seja máximo. (Santos, 1974, p. 370)*

LA3. *Quais serão os dois menores números que, diferindo de 4, dão um produto mínimo? (Amorim, 1977, p. 144)*

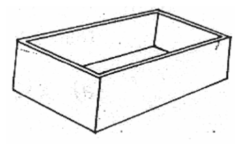
LA8. *Decompor o número 20 em duas partes de modo que a soma dos seus quadrados seja mínima. (Amorim, 1977, p. 149)*

Problemas de Medida em Contexto Real

GOR1. *Numa folha de cartolina quadrada de 18 dm de lado pretendem-se cortar, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, construindo-se seguidamente, por dobragem conveniente, uma caixa aberta na parte superior. Determinar a medida do lado do quadrado a cortar em cada canto para que a caixa tenha volume máximo. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 152)*



GOR7. *Na figura está representada uma caixa aberta em que a base é um rectângulo cujo comprimento é o dobro da largura.*



a. Prove que, se a área total da caixa é 54 dm², o volume da caixa é dado em dm³ pela expressão

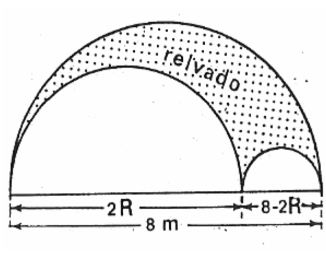
$$18x - \frac{2x^3}{3}$$

Em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.

b. Determine o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo e indique o valor do volume nesse caso. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 157)

(Exame de 1971 – 1ª chamada)

GOR8. *Num canteiro semicircular, cujo raio tem 4 m de comprimento, são reservados, de acordo com a figura, dois canteiros, igualmente semicirculares, destinados ao cultivo de flores, sendo para relvado a parte restante.*

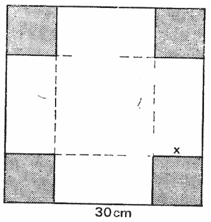


a. Mostre que a área do relvado é

$\pi(4R - R^2)$ metros quadrados

b. Investigue quais as medidas que deverão ter os raios dos canteiros das flores para que seja máxima a área do relvado. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 158)

(Exame de 1970 – 2ª época)

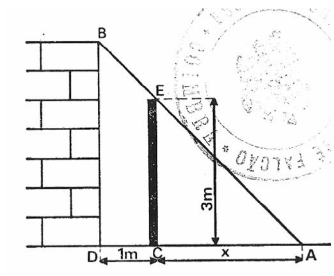


LA1. *Dispõe-se de uma folha de cartão de forma quadrada com 30 cm de lado. Com ela pretende-se fabricar uma caixa, cortando em cada canto um quadrado de lado x. Para que valor de x será mínimo o volume da caixa? (Amorim, 1977, p. 142)*

LA2. *Paralelamente ao muro de uma casa, ergue-se outro muro de 3 m de altura.*

A distância da casa à face do muro que está mais afastada é de 1 m.

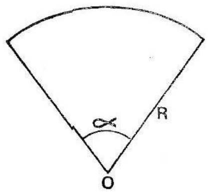
Qual será o comprimento mínimo das travessas que tocam o solo e a casa, apoiando-se sobre o muro? (Amorim, 1977, p. 143)



LA4. *Pretende-se fazer uma caçarola de alumínio utilizando uma folha de superfície dada S.*

Que relação deve existir entre a altura h e o raio R para que o volume seja máximo? (Supõe-se ausência de tampa e de desperdícios). (Amorim, 1977, p. 144)

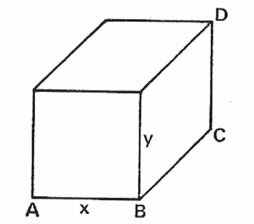
LA7. *Temos um círculo metálico de raio R e queremos cortar nele um triângulo isósceles com a maior superfície possível. (Amorim, 1977, p. 148)*



LA9. *Um jardineiro quer construir um canteiro com a forma de sector circular para o que dispões de 100 m de fio de ferro.*

Como deve ele proceder para obter um canteiro com a maior superfície possível? (Amorim, 1977, p. 149)

LA12. *Construir uma caixa prismática, de base quadrada, sem tampa, de forma que, $S = a^2$ tenha o máximo volume. (Amorim, 1977, p. 154)*



Problemas de Física

GOR9. *Ás oito horas um navio B encontrava-se a 65 km a oeste de outro navio A. B navega rumo a leste, à velocidade de 10 km/h enquanto A navega rumo a norte, com velocidade de 15 km/h.*

a. Mostre que, em cada instante, a distância em km que separa os dois navios é dada pela expressão

$$\sqrt{(65-10t)^2+225t^2}\ ,$$

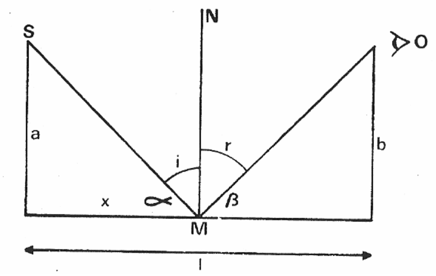
representando t o número de horas decorridas a partir das oito horas até esse instante.

b. Calcule a hora a que os dois navios se encontrarão à distância mínima. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 158

(Exame de 1970 – 1ª chamada)

***LA6.** Problema da reflexão da luz.*

Dado um espelho plano e uma fonte luminosa S, procurar a posição do ponto M onde um raio partindo de S incidirá sobre o espelho e se reflectirá na vista do observador sabendo que a luz se propaga em linha recta seguindo o caminho mais curto. Supõe-se, figura junta, conhecidos a, b, e l e determina-se a posição do ponto M por meio de x. (Amorim, 1977, p. 146)



Problemas de Economia

***LA19.** 400 pessoas assistem a um espectáculo cujos lugares custam 30$00. Se o número de assistentes diminuir de 40 pessoas quando o aumento de preço dos lugares for de 10$00, pretende-se saber qual será o aumento de preço que permitirá uma receita mais elevada. (Amorim, 1977, p. 157)*

C. Análise do período

Comecemos por fazer uma análise do programa relativo a esta reforma. Nesta, a derivada é abordada no 5º ano do Curso Complementar (actual 11º ano), inserida no capítulo destinado ao Cálculo Infinitesimal. O estudo da derivada é precedido do tratamento dos limites e continuidade. Existe um ponto específico que contempla o estudo das aplicações da derivada. Neste programa ainda não são utilizadas as calculadoras e não é feita qualquer sugestão ao manual a utilizar.

Assim sendo, uma vez que já não está em vigor o regime do Livro Único, detectámos um grande número de manuais escolares e de livros de exercícios para esta reforma. Como consequência também o número de problemas identificados, nos manuais seleccionados para analisar, é bastante superior ao número de problemas observados no período anterior, passamos de 18 problemas no período anterior para 43 nos manuais analisados neste período.

Relativamente aos problemas de optimização encontrados nos quatro manuais analisados neste período verificamos que, o manual da autoria de Ondina Vasconcelos **(OV)** apresenta apenas quatro problemas de optimização; a sebenta da autoria de Borja Santos **(BS)** seis; o livro de exercícios de Loureiro Amorim **(LA)** vinte e quatro e o manual de Madalena Garcia, Alfredo Osório e António Ruivo **(GOR)** apresenta nove problemas de optimização.

Analisemos agora as características dos problemas deste período. O primeiro aspecto a salientar é o facto de os manuais deste período vêm acompanhados figuras alusivas ao problema, por vezes mais do que uma figura quando o problema vem acompanhado da respectiva resolução.

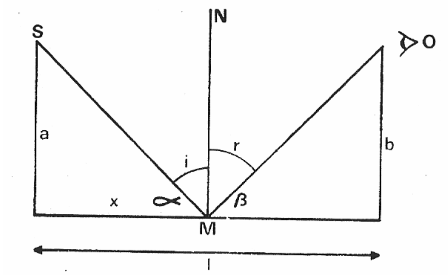
Por outro lado vemos, que relativamente ao tipo de problema, estes surgem sob a forma de exemplo, exercício resolvido e exercício; portanto, identificámos menos um tipo que no período anterior, uma vez que não existe neste período nenhum exercício em que se pretende realizar uma demonstração. No manual de Ondina Vasconcelos, os quatro problemas surgem sob a forma de exemplo; os seis problemas da sebenta de Borja Santos são apresentados sob a forma de exercício resolvido; no manual de Madalena Garcia, Alfredo Osório e António Ruivo encontramos três problemas enunciados sob a forma de exemplo, dois como exercício resolvido e quatro surgem sob a forma de exercício; por fim, na obra de Loureiro Amorim observamos que nove problemas eram enunciados como exemplo, cinco como exercício resolvido e dez como exercício.

Quanto ao contexto dos problemas, achámos, neste período, problemas de todos os contextos, sendo a maioria de Geometria Métrica. Encontrámos então nove problemas em contexto real de medida (GOR1, GOR7, GOR8, LA1, LA2, LA4, LA7, LA9, LA12), cinco de Aritmética (OV2, OV3, BS3, LA3, LA8), dois de Física (GOR9, LA9), um de Geometria Analítica (LA20), um de Economia (LA19) e os restantes vinte e cinco de Geometria Métrica. Deste modo, notámos neste período problemas de todos os contextos identificados, surgindo pela primeira vez os de Geometria Analítica, de Física e de Economia. Observemos a seguir um exemplo de cada um destes contextos:

" (***LA20)*** *Encontrar o caminho mínimo para ir de um ponto A a outro B, tocando uma dada recta r (os pontos A e B ficam do mesmo lado da recta)."*

" (LA6) *Problema da reflexão da luz.*

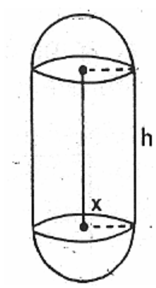
Dado um espelho plano e uma fonte luminosa S, procurar a posição do ponto M onde um raio partindo de S incidirá sobre o espelho e se reflectirá na vista do observador sabendo que a luz se propaga em linha recta seguindo o caminho mais curto. Supõe-se, figura junta, conhecidos a, b, e l e determina-se a posição do ponto M por meio de x."

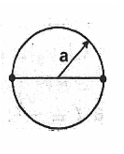


" (LA19) *400 pessoas assistem a um espectáculo cujos lugares custam 30$00. Se o número de assistentes diminuir de 40 pessoas quando o aumento de preço dos lugares for de 10$00, pretende-se saber qual será o aumento de preço que permitirá uma receita mais elevada."*

Relativamente à função a optimizar, apenas não surge optimização de tempo, detectando-se essencialmente, problemas em que se pretende optimizar uma área (dezassete problemas): de um rectângulo dado o perímetro (OV1, BS4, GOR6) ou o raio de uma circunferência circunscrita (LA5); de um triângulo rectângulo dada a hipotenusa (BS1, LA10); de um triângulo equilátero dada a medida do lado (LA21); de um triângulo isósceles dado o raio do círculo circunscrito (LA7); de dois triângulos inscritos num círculo dado o raio (LA22); de um sector circular dado o perímetro (LA9), ou área lateral de um cone ou cilindro dado o raio ou a geratriz (BS6, LA14). Pretende-se optimizar um perímetro de um rectângulo dada a área em três problemas (BS5, GOR4, LA18). Procura-se optimizar o volume (doze problemas): de um cilindro dado o perímetro do rectângulo que o gera (OV4); de um cone dada a geratriz (BS6, LA13); de um sólido constituído por um cilindro e duas semiesferas (GOR3); de um paralelepípedo dadas algumas dimensões (GOR5, PA1); de um prisma dada a superfície (LA12) e de um cilindro dada a sua superfície total (LA16, LA4). Optimizar uma distância dados dois pontos (LA20). Nos problemas de Aritmética pretende optimizar-se um produto dada a soma ou a diferença de dois números (OV2, BS3, PA3); optimizar-se uma soma dado o produto (OV3) ou optimizar a soma dos quadrados de dois números dada a sua soma (LA8). Nos problemas físicos pretende optimizar-se a distância entre dois pontos, sabendo a velocidade a que cada um se desloca e a distância entre eles (GOR9) ou o caminho mais curto seguido pela reflexão da luz (LA6). Finalmente, no problema de Economia pretende optimizar-se um custo, dada a variação no número de pessoas e de preços (PA19).

Apenas dois dos problemas apresentam uma figura simples (GOR7, LA11). Sete problemas apresentam uma figura com dados (GOR1, GOR8, LA1, LA2, LA9, LA12, LA6) e os restantes não apresentam qualquer esquema ou figura auxiliar. É ainda de salientar que o livro de Borja Santos e o de Ondina Vasconcelos não apresentam qualquer figura. Vejamos o exemplo de um problema que apresenta uma figura com dados:





***"(GOR3)** Um sólido é constituído por um cilindro de raio da base x e de altura h e por duas semiesferas assentes sobre as bases do cilindro e de raio igual ao raio da base deste.*

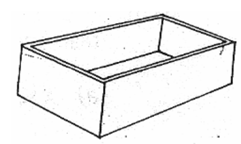
Supondo a superfície total do sólido igual a $4\pi a^2$ e variáveis x e h, averiguar qual é o sólido de volume máximo."

Em relação aos dados indicados no enunciado dos problemas, observámos que metade apresenta dados genéricos e a outra metade dados numéricos. Sendo que o livro de Loureiro de Amorim tem cerca de dois terços de exercícios com dados genéricos e apenas um terço com dados numéricos e o livro de Ondina Vasconcelos apenas tem um exercício com dados numéricos sendo os restantes exercícios com dados genéricos. É ainda de referir que num dos problemas é pedido para resolver o problema com dados genéricos e depois é pedido para concretizar com um valor específico (LA21).

Os enunciados dos problemas são maioritariamente simples, apresentando apenas quatro a resolução encaminhada (GOR6, GOR7, GOR8, GOR9). Vejamos os problemas com resolução encaminhada:

*" **(GOR6)** Exprima a área A de um rectângulo como função de um dos lados x, supondo que o perímetro é 20. Desenhe o gráfico da função no intervalo [0, 10]. Determine graficamente e analiticamente o valor de x que torna a área máxima."*

*" **(GOR7)** Na figura está representada uma caixa aberta em que a base é um rectângulo cujo comprimento é o dobro da largura.*



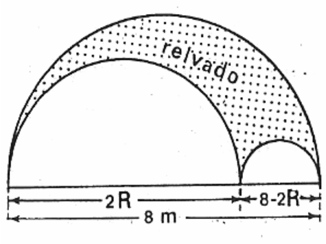
a. Prove que, se a área total da caixa é 54 dm², o volume da caixa é dado em dm³ pela expressão

$$18x - \frac{2x^3}{3}$$

Em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.

b. Determine o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo e indique o valor do volume nesse caso."

*" **(GOR8)** Num canteiro semicircular, cujo raio tem 4 m de comprimento, são reservados, de acordo com a figura, dois canteiros, igualmente semicirculares, destinados ao cultivo de flores, sendo para relvado a parte restante.*



a. Mostre que a área do relvado é $\pi(4R - R^2)$ metros quadrados

b. Investigue quais as medidas que deverão ter os raios dos canteiros das flores para que seja máxima a área do relvado."

*" **(GOR9)** Ás oito horas um navio B encontrava-se a 65 km a oeste de outro navio A. B navega rumo a leste, à velocidade de 10 km/h enquanto A navega rumo a norte, com velocidade de 15 km/h.*

a. Mostre que, em cada instante, a distância em km que separa os dois navios é dada pela expressão

$$\sqrt{(65-10t)^2 + 225t^2}\ ,$$

representando t o número de horas decorridas a partir das oito horas até esse instante.

b. Calcule a hora a que os dois navios se encontrarão à distância mínima."

Observamos, então, que o primeiro problema é semelhante ao do período anterior (SP3). Os três problemas seguintes têm uma estrutura idêntica uma vez que apresentam duas alíneas: na primeira pede-se para mostrar que a expressão que permite optimizar o problema é a expressão apresentada e na segunda é pedido para optimizar a situação. Sendo assim estes problemas são de mais fácil compreensão relativamente aos que não apresentam qualquer passo anterior que auxilie a determinar a expressão a optimizar. Para além disso, o facto de o aluno não conseguir determinar a expressão não o impede de achar a solução óptima uma vez que na alínea anterior a expressão já é dada.

A função auxiliar surge na maioria dos problemas de forma implícita (vinte e sete vezes) e explicitamente apenas em 16 problemas (OV1, OV4, BS2, BS4, GOR4, GOR6, LA17, LA18, LA16, LA24, OV2, OV3, LA3, GOR7, LA4, LA12). É ainda de referir que no manual de Ondina Vasconcelos a função auxiliar figura sempre explicitamente. Apontamos um exemplo de cada uma das situações:

> *" **(BS2)** Dentre os cilindros de volume igual a 16π, determine os que têm área total mínima."*

*" **(LA19)** 400 pessoas assistem a um espectáculo cujos lugares custam 30\$00. Se o número de assistentes diminuir de 40 pessoas quando o aumento de preço dos lugares for de 10\$00, pretende-se saber qual será o aumento de preço que permitirá uma receita mais elevada."*

No primeiro problema é dado o valor do volume. Deste modo, o aluno sabe que terá de utilizar a fórmula do volume na resolução do problema, mas no segundo apenas é dado o número de pessoas e o preço inicial e é dada a diminuição do número de pessoas quando o preço aumenta um determinado valor. Então concluímos que este problema terá uma dificuldade acrescida para determinar a função a optimizar.

Passando agora para as noções aplicadas, vemos que das noções listadas, apenas a noção de função e as funções trigonométricas não são utilizadas neste período. As noções que predominam são o Teorema de Pitágoras e a noção de área. O Teorema de Pitágoras aparece associado aos problemas geométricos com triângulos rectângulos ou com figuras inscritas em circunferências ou esferas e a noção de área surge associada a problemas geométricos em que se pretende determinar lados, perímetros ou volumes sabendo o valor da área de uma figura plana ou área lateral ou total de um sólido. Apreciemos:

> “ ***(LA4)*** *Pretende-se fazer uma caçarola de alumínio utilizando uma folha de superfície dada S.*
>
> *Que relação deve existir entre a altura h e o raio R para que o volume seja máximo? (Supõe-se ausência de tampa e de desperdícios).*”

Neste problema notamos que aplicando a noção de área de um rectângulo e de um círculo, chegamos a uma relação entre a altura e o raio da caçarola que de seguida, se utiliza para determinar o volume.

Relativamente à estratégia a utilizar concluímos que vinte e dois problemas surgem pela primeira vez nesta reforma, doze em manuais anteriores (BS1, BS3, BS5, GOR1, GOR4, GOR6, LA1, LA8, LA9, LA12, LA18, OV3), cinco nas obras históricas (BS4, LA14, LA15, OV1, OB2) e apenas quatro em exames (GOR7, GOR8, GOR9, LA10). Assim sendo, a obra de Borja Santos apenas têm dois problemas originais e a obra de Ondina Vasconcelos apenas tem um problema original. A obra de Loureiro Amorim é a que apresenta maior quantidade de problemas novos.

As funções utilizadas são tão só as funções polinomiais, funções racionais e funções irracionais, surgindo as funções polinomiais na maioria das situações (vinte e quatro problemas). As funções racionais aparecem em apenas oito problemas (BS2, BS5, GOR4, LA17, LA18, LA21, OV3 e LA2) e as funções irracionais em onze (BS1, LA5, LA10, LA11, LA14, LA22, LA23, LA20, LA7, GOR9 e LA6). As funções irracionais surgem, normalmente, em problemas em que se utiliza o Teorema de Pitágoras ou a distância entre dois pontos.

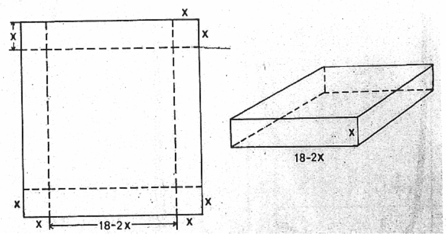
Nos que apresentam resolução vemos que na maioria dos casos o autor começa por calcular os zeros da função a optimizar e depois estuda o sinal da função. Em oito situações o autor apenas calcula os zeros da função deduzindo logo qual o valor do extremo e numa situação estuda o sinal da segunda derivada para concluir que o ponto é um extremo.

Fazendo agora a análise por cada autor, notamos que todos os problemas da obra de Borja Santos têm resolução, surgindo apenas o cálculo dos zeros da derivada. Na obra de Garcia, Osório e Ruivo, apuramos que dos três problemas que apresentam resolução, apenas em dois se calculam os zeros da derivada (GOR2, GOR3) e no outro são calculados os zeros e o sinal da derivada (GOR1). Passando para o livro de Loureiro de Amorim, vê-se que, dos vinte e quatro problemas da obra, cerca de metade apresenta resolução. Destes, num problema é feito o estudo do sinal da segunda derivada (LA4) e os restantes apresentam os zeros e o sinal da derivada (LA1, LA10, LA11, LA12, LA13, LA14, LA2, LA3, LA5, LA6, LA7, LA8, LA9). Por fim, na obra de Ondina Vasconcelos, concluímos que os quatro problemas contêm resolução, calculando-se os zeros e o sinal da derivada. Vejamos alguns exemplos:

> " ***(BS3)*** *Dividiu-se 32 em duas partes. Determinar esses números de forma que o seu produto seja máximo.*
>
> *Como se pretende que o produto de dois números seja máximo temos de determinar a derivada da função, $P = xy$, como P está em função de 2 variáveis, vamos eliminar uma delas, razão porque nos é dito que, $x + y = 32$.*
>
> *Logo, $y = 32 - x$, e desta forma vem:*
>
> $P = x.y = x(32-x)$
>
> $P' = 32 - x + x.(-1) = 32 - 2x$
>
> $32 - 2x = 0 \Rightarrow x = 16$
>
> *Para $x = 16$ a função tem um máximo e vem $y = 16$, e assim $P = 256$"*

Neste problema, o autor mostra a função a optimizar. Depois indica que como está em função de duas variáveis há necessidade de eliminar uma delas e utiliza então o valor da soma para determinar o valor de uma variável em função da outra. Seguidamente substitui na função a optimizar, obtendo uma função polinomial, deriva e determina os zeros da derivada, concluindo, de imediato, que esse é o valor para o qual a função tem um máximo.

> " ***(GOR1)*** *Numa folha de cartolina quadrada de 18 dm de lado pretendem-se cortar, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, construindo-se seguidamente, por*



dobragem conveniente, uma caixa aberta na parte superior. Determinar a medida do lado do quadrado a cortar em cada canto para que a caixa tenha volume máximo.

Representando por x a medida (em dm) do lado do quadrado a cortar, a medida do volume da caixa (em dm^2) será dada por

$V = (18 - 2x)^2 x$ *(Deverá ser $0 > x > 8$. Porquê?)*

Calculando a derivada, tem-se

$$V' = -4(18-2x)x + (18-2x)^2$$
$$= (18-2x)(-4x + 18 - 2x)$$
$$= (18-2x)(18-6x)$$

A derivada V' anula-se para x = 9 e para x = 3

Ora, dado que é $V' < 0$ para $3 < x < 9$ e $V' > 0$ para $x < 3$, a função admite um máximo relativo para x = 3.

Tem-se, pois:

a caixa de volume máximo é obtida, cortando em cada um dos cantos da folha um quadrado de 3 dm de lado."

Na resolução deste problema vê-se que em relação ao anterior, para além de calcular os zeros da derivada o autor faz ainda o estudo do sinal da derivada antes e depois dos zeros, para posteriormente concluir qual o valor da variável em que a função atinge o máximo.

" ***(LA4)*** *Pretende-se fazer uma caçarola de alumínio utilizando uma folha de superfície dada S.*

Que relação deve existir entre a altura h e o raio R para que o volume seja máximo? (Supõe-se ausência de tampa e de desperdícios).

A caçarola tem a forma de cilindro, cujo volume será:

$$V = \pi R^2 h$$

Procuremos exprimir h em função de R.

Como a superfície total do cilindro (repare-se que só tem uma base) é:

$$S = \pi R^2 + 2\pi R h$$

donde

$$h = \frac{S - \pi R^2}{2\pi R}$$

substituindo em V

$$V = \pi R^2 \left[\frac{S - \pi R^2}{2\pi R} \right] = \frac{R}{2}(S - \pi R^2)$$

$$V = f(R) = \frac{RS}{2} - \frac{\pi R^3}{2}$$

$$V' = \frac{S}{2} - \frac{3\pi R^2}{2} = \frac{S - 3\pi R^2}{2}$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} \Leftrightarrow S = 3\pi R^2$$

Mas como $S = \pi R^2 + 2\pi Rh$

teremos $3\pi R^2 = \pi R^2 + 2\pi Rh$

$2\pi R^2 = 2\pi Rh$

donde $R = h$

Mas será um máximo para V?

Como $V'' = -\frac{6\pi R}{2} = -3\pi R \langle 0$

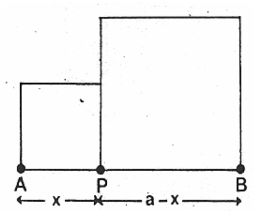
$V'' \langle 0$

Trata-se efectivamente de um máximo."

Neste problema verifica-se que após o cálculo dos zeros da derivada, o autor estudou o sinal da segunda derivada nesse ponto, concluindo, depois, que se trata de um máximo.

Quanto a gráficos, figuras ou esquemas auxiliares, treze problemas não apresentam nenhum destes auxiliares, onze apresentam uma figura alusiva ao problema (BS1, BS6, GOR1, GOR2, GOR3, LA5, LA10, LA13, LA14, OV1, OV4) e três o quadro de monotonia para identificar o extremo (LA1, LA2, LA3).

" ***(GOR2)*** *Determinar num segmento [AB] de comprimento a (fixo), um ponto P de modo que seja mínima a soma das áreas dos quadrados de lados* $\overline{AP}$ *e* $\overline{PB}$.



A soma S das áreas dos quadrados de lados $\overline{AP}$ *e* $\overline{PB}$ *é dada por*

$S = x^2 + (a - x)^2$

representando por x o comprimento do lado de um dos quadrados.

(Terá de ser $0 \leq x \leq a$*. Porquê?)*

Derivando S, tem-se

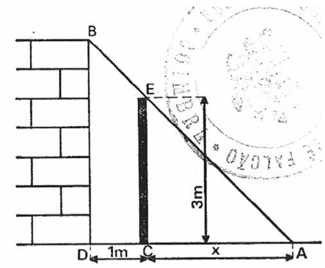
$S' = 2x + 2(a - x)$

$S' = 4x + 2a$

A derivada anula-se para $x = a/2$

Estude o sinal da derivada e conclua que S é mínimo para $x = a/2$*."*

Donde se infere que, neste problema, o facto de a resolução vir acompanhada de uma figura com dados, é um factor importante para a resolução do problema, uma vez que, desta forma, o aluno já tem os dados em função apenas de uma variável para determinar a função a optimizar.



(LA2) *Paralelamente ao muro de uma casa, ergue-se outro muro de 3 m de altura.*

A distância da casa à face do muro que está mais afastada é de 1 m.

Qual será o comprimento mínimo das travessas que tocam o solo e a casa, apoiando-se sobre o muro?

Seja l o comprimento da travessa $\overline{AB}$. *Este comprimento dependerá da distância* $\overline{AC}$ *=x.*

Pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$$

$$l^2 = (x-1)^2 + \overline{BD}^2$$

Mas a semelhança dos triângulos [Δ ABD] e [Δ AEC], tira-se:

$$\frac{\overline{BD}}{3} = \frac{x+1}{x} \therefore \overline{BD} = \frac{3x+3}{x} = 3 + \frac{3}{x}$$

Então: $l^2 = (x+1)^2 + \left(3+\frac{3}{x}\right)^2 = x^2 + 2x + 10 + \frac{18}{x} + \frac{9}{x^2}$

Consideremos então a função y(x) = l^2

$$y' = 2x + 2 - \frac{18}{x^2} - \frac{18}{x^3} = x + 1 - \frac{9}{x^2} - \frac{9}{x^3}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x + 1 - \frac{9}{x^2} - \frac{9}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 9x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(x+1) - 9(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^3 - 9) = 0$$

Como x > 0, a derivada só se anulará para $x = \sqrt[3]{9}$.

x	0		$\sqrt[3]{9}$ ≈2,08		+∞
y'		–	0	+	0
y = l^2	+∞	↘	≈29,20	↗	+∞
			Min.		

O menor comprimento que pode ter a travessa será aproximadamente $l = \sqrt{29{,}20} \approx 5{,}40\,m$ *"*

Deduz-se, que no livro de Loureiro Amorim identificamos, pela primeira vez, o quadro de monotonia para identificar o extremo da função. Este problema também tem particular interesse na determinação da função a optimizar, uma vez que é necessário utilizar dois conceitos: Teorema de Pitágoras e semelhança de figuras, para determinar a função com uma só variável.

Finalmente, quanto ao valor pedido, na maioria dos casos o valor a calcular surge de forma implícita, sendo de forma explícita em apenas dezoito situações. Olhando agora para cada um dos autores, dos seis problemas da obra de Borja Santos, apenas dois referem explicitamente o valor pedido (BS3, BS6); nos problemas da obra de Garcia, Osório e Ruivo apenas um problema tem o valor pedido implícito (GOR3); nos da obra de Loureiro de Amorim vemos, maioritariamente, problemas cujo valor pedido surge implicitamente; e, por fim, na obra de Ondina Vasconcelos todos os problemas referem implicitamente qual o valor a calcular.

Deste modo, a primeira característica deste período é o facto de alguns dos problemas apresentarem uma figura/esquema, o que não acontecia no período anterior. Neste período não se encontram problemas em que se pretenda fazer uma demonstração ou um relatório. Os outros tipos surgem de forma semelhante. A maioria dos problemas são de Geometria Métrica em que se pretende optimizar uma área ou um volume. Os enunciados quase não têm esquemas auxiliares e sem a resolução encaminhada na maioria dos casos. As noções mais aplicadas são o Teorema de Pitágoras e a fórmula da área. Grande parte dos problemas surge nesta reforma pela primeira vez. As funções utilizadas são essencialmente polinomiais e o esquema de cálculo dos extremos mais utilizado è através dos zeros da derivada.

Os dados obtidos na análise dos problemas de optimização deste período estão sintetizados na tabela a seguir.

3.3.3. O PERÍODO PÓS REVOLUÇÃO

Após 5 décadas de ditadura, dá-se, a 25 de Abril de 1974, um movimento revolucionário organizado pelos militares portugueses. Até então o país vivia num profundo isolamento em relação ao resto do mundo, a inflação aumentava de forma descontrolada, não havia liberdade de expressão e as colónias portuguesas viviam em guerra. Todos estes factores faziam com que muitos portugueses encontrassem na imigração a forma de fugir aos problemas do país e à guerra colonial.

Assim, logo a seguir à revolução, o MFA[20] apresentou um conjunto de medidas com o objectivo de extinguir todas as instituições ligadas ao Estado Novo que estrangulavam a liberdade nacional. Estas foram aceites pelos portugueses sem contestação.

Nos meses pós 25 de Abril, o país viveu momentos de grande agitação e instabilidade. Foram nomeados sucessivos governos provisórios que governavam por períodos muito curtos. Consequentemente também os ministros que tutelavam a pasta da Educação se iam sucedendo. As primeiras eleições, com uma elevada taxa de participação, foram realizadas um ano após a revolução.

O ministério que tutelava a educação passou a ter o nome de Ministério da Educação e Cultura, sendo o ministro indigitado Eduardo Henrique da Silva Correia. Este ocupou a pasta apenas durante dois meses sendo depois sucedido por Vitorino Magalhães Godinho, que dirigiu o referido Ministério até Novembro desse ano.

A. Análise do programa oficial

O ensino sofreu a partir de então fortes alterações dado que foi considerado entre as grandes prioridades.

Por esta razão se procedeu, entre 1975 e 1980, à unificação do curso geral, terminando, por isso a separação entre os Liceus e as Escolas Industriais visto que se considerava que estas faziam a separação entre os alunos provenientes dos vários estratos sociais. Foram também implementados os cursos complementares de via única nos dois ramos de ensino.

[20] Movimento das Forças Armadas

De tal modo que ainda em 1974 foi publicado o programa do Curso Complementar para o ano lectivo 1974/75 que não sofreu alterações, em relação ao programa anterior.

Para o ano lectivo 1976/77 também foi publicado o novo programa de Matemática para o Curso Complementar, mas, tal como no caso anterior, também neste a Matemática, sobretudo o capítulo dedicado à Análise Infinitesimal, não sofreu nenhuma alteração.

A partir do ano lectivo 1978/79 termina a separação, após o 9º ano, entre o Curso Complementar dos Liceus e o Curso Complementar Técnico. Surge assim o Curso Complementar do Ensino Secundário com as seguintes cinco áreas de estudo: A) Científico – natural, B) Científico-tecnológica, C) Económico-social, D) Humanísticos e E) Artes Visuais. Cada uma das áreas tinha três componentes: Formação geral, formação específica e formação vocacional. A disciplina de Matemática fazia parte da formação específica de todas as áreas, com excepção da área D) Humanísticos e tinha uma carga horária de quatro horas semanais para o 10º e para o 11º ano. Começando o programa a funcionar no ano lectivo de 1978/79 para o 10º ano, no ano lectivo 1979/1980 para o 11º ano e no seguinte para o 12º ano.

A derivada é então abordada no 11º ano, ou seja, no 2º ano do Curso Complementar. Vejamos então como ficou estruturado este programa:

Índice do livro único de acordo com o programa de Matemática do 2º ano do Ensino Complementar para o ano lectivo de 1979-1980

Compêndio de Matemática

11º ano (1º Volume)

- *Limites de Sucessões*
- *Função exponencial e função logarítmica*
- *Limites de funções reais de variável real. Continuidade*
- *Funções continuas*
- *Derivadas de funções reais de variável real*
    1. *Derivada de uma função num ponto: significado geométrico*
    2. *Derivadas laterais: interpretação geométrica*
    3. *Derivabilidade e continuidade*
    4. *Função derivada*
    5. *Regras de derivação*
    6. *Derivada de uma função inversa*

7. *Derivada de uma função composta*
8. ***Aplicações das derivadas***

(Despacho Normativo nº 135-A/79 do Diário da República nº 140/79 de 20 de Junho de 1979)

Do exposto, vê-se que foi dedicado um capítulo ao estudo da derivada. Este capítulo contempla no último ponto o estudo de aplicações das derivadas.

No ano lectivo de 1980/81 começa a funcionar o 12º ano, com uma carga horária de 4 horas semanais. Este vinha a substituir o ano propedêutico que pretendia preparar os alunos para a entrada no Ensino Superior e dar inicio também a uma profissionalização orientada para a inserção na vida activa. Estava dividido em duas vias: a de ensino e a profissionalizante.

O programa estava organizado do seguinte modo:

Programa do 12º ano para o ano lectivo de 1980-81

Parte I – Álgebra

Parte II – Análise Real

1. *Principio da indução matemática*
2. *Complementos sobre sucessões numéricas*
3. *Séries numéricas*
4. *Complementos sobre funções reais de uma variável real*
5. *Complementos sobre derivação de funções reais de uma variável real*
   5.1. *Derivação de funções circulares e das "funções" circulares inversas*
   5.2. *Derivação da função exponencial e logarítmica.*
   5.3. *A noção de diferencial de uma função num ponto; interpretação geométrica; regras de diferenciação.*
6. *Teoremas de Rolle, de Lagrange, de Cauchy e de Taylor*
7. *Complementos sobre representação gráfica de funções*
8. *Generalidades sobre linhas em IR^2. AS cónicas*
9. *Primitivação de funções reais de variável real*
10. *Integração de funções reais de uma variável real*

(Decreto nº 240/80 do Diário da República nº 165 de 19 de Julho de 1980)

Vemos que também no 12º ano se contempla o estudo da derivada. Esta surge no quinto ponto, mas pretende-se agora introduzir o estudo de novas regras de derivação. Não se contempla a abordagem dos problemas de optimização.

No entanto, o programa pecava pela extensão e os professores não conseguiam leccionar todos os temas que se pretendiam abordar. Pelo que, para o ano lectivo de

1983/84, foi publicado um novo programa, muito semelhante ao anterior, mas menos extenso. Apesar de ter sido encurtado, o estudo das derivadas não sofreu nenhuma alteração em relação ao programa anterior. Este continuou em vigor até 1986.

Por despacho de 28 de Julho de 1988, o mesmo ainda veio a sofrer mais algumas alterações. Foi, então, suprimido, o capítulo quarto dedicado ao *Espaço linear (espaço vectorial) sobre um corpo*.

Também o capítulo destinado aos *Complementos sobre derivação de funções reais de uma variável real* sofreu alterações. Foi suprimido o ponto 8.3. "*A noção de diferencial de uma função num ponto; interpretação geométrica; regra de diferenciação*", onde se pretendia que o aluno determinasse diferenciais de funções, passando a referir que o aluno resolvesse questões aplicando o conceito de derivada.

B. Análise dos Manuais Escolares

Analisemos agora os problemas de optimização encontrados nos manuais relativos às reformas referidas.

Para estas reformas seleccionámos cinco livros, dos quais três são manuais escolares e os outros dois são livros de exercícios.

Autor: A. César Freitas; Francelino Gomes

Título: *Matemática*

Ano lectivo: 11º Ano (2º CC) V2

Reforma curricular: 1979

Ano, editora e lugar de edição: 1979, Livraria Popular de Francisco Franco

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal de Ana Paula Aires;

Caracterização e estrutura da obra: Neste manual, o capítulo dedicado às derivadas de funções reais de variável real apresenta a seguinte estrutura:

- *Derivada de uma função num ponto. Interpretação geométrica;*
- *Função derivada. Regras de derivação. Derivadas de ordem superior;*
- *Aplicações das derivadas;*
    - *Sentido de variação de uma função;*
    - *Extremos relativos de uma função;*
    - ***Alguns problemas elementares de máximos e mínimos.***
- *Assímptotas paralelas aos eixos (assímptotas horizontais e verticais);*

- *Representação gráfica de uma função. Contradomínio e extremos absolutos;*
- *Exercícios.*

Na parte dedicada aos problemas elementares de máximos e mínimos encontramos quatro problemas de optimização com ilustração e seguidos da respectiva resolução. Posteriormente, no final do capítulo é apresentado um conjunto de exercícios, sendo sete problemas de optimização.

Autor: Henrique Verol Marques

Título: *Exercícios de Matemática 1*

Ano lectivo: 11° Ano

Reforma curricular: 1979

Ano, editora e lugar de edição: 1979, Editorial Presença

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: O autor, Henrique Verol Marques era Licenciado em Ciências Matemáticas e professor do Ensino Secundário. Publicou livros de exercícios para as Matemáticas Modernas e posteriormente para a reforma de 1979.

Trata-se de um livro apenas com exercícios e a respectiva resolução, sem qualquer explicação teórica.

O autor refere no início da obra que:

> *"A nova estrutura do Ensino Secundário implicou a reorganização de programas de Matemática com características inéditas.*
>
> *A exemplo do que aconteceu com o programa do 10° ano, parece extremamente ambicioso o programa agora adoptado para o 11° ano, quer na sua dimensão – certamente excessiva – quer no coeficiente de dificuldade que contém.*
>
> *O presente livro, como o volume que se lhe seguirá, procura respeitar as normas estabelecidas e contribuir para uma preparação prática conveniente dos alunos a que se destina."*

A obra contém 196 páginas, distribuídas por seis capítulos. Em cada um dos capítulos há exercícios, dando-nos no final do último a respectiva resolução.

No capítulo 5 são abordadas as derivadas de funções reais de variável real e no capítulo 6 o estudo de uma função. É neste 6° capítulo que encontramos alguns problemas de optimização no qual são apresentados 32 exercícios, dos quais nove são problemas de optimização.

Autor: António do Nascimento Palma Fernandes

Título: *Matemática 7 – Exemplos e exercícios*

Ano lectivo: 11° Ano

Reforma curricular: 1979

Ano, editora e lugar de edição: 1980, Plátano Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca do DMUC

Caracterização e estrutura da obra: Apesar de Palma Fernandes ter falecido em 1968, em 1980 foi publicada uma actualização do seu livro de exercícios levada a efeito por António de Oliveira Pegado, Maria do Rosário Ribeiro e Mavília Lobo Palmeira. A obra apresenta uma estrutura gráfica ligeiramente diferente do que a analisada anteriormente. Tem 255 páginas e está dividida em duas partes. A primeira abrange as funções e a segunda os elementos de análise. O quarto ponto da segunda parte trata das derivadas de funções reais de variável real e contempla, no final, alguns problemas concretos. Este ponto, relativo às derivadas, tem trinta e seis exercícios resolvidos dos quais apenas dois são problemas de optimização, mas ambos estão presentes na obra analisada anteriormente. Seguidamente são expostos 90 exercícios que contêm no final apenas a solução, sendo dez problemas de optimização, mas só três não estão na obra já analisada.

Autor: Paulo Abrantes; Raul Fernando Carvalho

Título: *M11 – Matemática 11° ano*

Ano lectivo: 11° Ano

Reforma curricular: 1979

Ano, editora e lugar de edição: 1984, Texto Editora

Localização da obra consultada: DMUC

Caracterização e estrutura da obra: Paulo Abrantes e Raul Fernando Carvalho, para além deste manual, produziram um vasto número de manuais escolares nesta época para os vários níveis de escolaridade.

A obra acima referida tem cerca de 400 páginas repartidas em três partes: Funções, Elementos de Análise e Combinatória, Probabilidades e Estatística. A parte dos Elementos de Análise está dividida em três sub-capítulos contemplando o terceiro a Derivação.

Este sub-capítulo tem a seguinte estrutura:

- *Situações*

- *Razão incremental*
- *Derivada da função num ponto*
- *Derivadas laterais*
- *Derivabilidade e continuidade*
- *Função derivada*
- *Regras de derivação*
- *Variação e extremos de uma função*
- *Problemas práticos*
- *Estudo de funções*
- *Exercícios e problemas*
- *Prolongamentos: Assímptotas obliquas e método de Newton.*

Observa-se pela referida estrutura que os seus autores revelam uma grande preocupação em apontar para cada tema a sua aplicabilidade em situações ligadas à vida corrente. Expõem ainda, para cada um, os prolongamentos, ou seja, desenvolvimentos dos assuntos tratados, mas que não fazem parte do programa oficial.

Encontramos os problemas de optimização na parte referente aos problemas práticos. Nesta os autores mostram três problemas de optimização seguidos da respectiva resolução. Tanto o enunciado como a resolução vêm acompanhados de gráficos, esquemas, figuras e tabelas que ajudam à compreensão do problema. Ao longo da apresentação dos problemas surgem ainda outras actividades, ou seja, novas questões/exercícios pertinentes, que o aluno pode resolver, a partir do que lhe é apresentado.

No final dos problemas de optimização os autores indicam a definição de problema de optimização bem como os passos que deve seguir a sua resolução:

> *"Tratamos aqui um tipo de problemas em que se pretende obter a maior área, a receita máxima, o custo mínimo, …*
>
> *Dá-se-lhes por vezes o nome de problemas de optimização. Em geral, a sua resolução passa pelas seguintes etapas:*
>
> 1) *Definir uma função – se possível, com apenas uma variável – que constitua um modelo matemático do problema a estudar.*
> 2) *Estudar a variação desta função, em especial procurando os seus máximos e mínimos.*
> 3) *Verificar a adequação dos resultados teóricos obtidos À situação concreta a que o problema se refere."*

Também na parte relativa aos exercícios e problemas se detectam mais alguns problemas de optimização. Nesta é apresentado um conjunto de 29 exercícios dos quais 6 são problemas de optimização.

Autor: M. A. F. Neves; M. Teresa C. Vieira; Alfredo G. Alves

Título: *Matemática*

Ano lectivo: 11° Ano

Reforma curricular: 1979

Ano, editora e lugar de edição: 1988, Porto Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Estes autores, e em particular Maria Neves, produziram uma grande quantidade de manuais escolares e de livros de exercícios para os diversos níveis de escolaridade. O presente tem 375 páginas, repartidas por dez capítulos, sendo o sétimo dedicado às derivadas de funções reais de variável real.

O capítulo está estruturado da seguinte forma:

- *Da tangente a uma curva à noção de derivada*
- *Derivada de uma função num ponto*
- *Interpretação geométrica de derivada de uma função num ponto*
- *Derivadas laterais*
- *Derivabilidade e continuidade*
- *Função derivada*
- *Derivada de uma função constante, derivada da função identidade, derivada de uma soma de funções, derivada do produto de funções, derivada de um quociente de funções, derivada da função inversa, derivada da função composta, derivadas de ordem superior à primeira*
- ***Aplicações das derivadas***
- *Assímptotas verticais e assímptotas horizontais*
- *Esboço do gráfico de uma função: contradomínio e extremos absolutos*
- *Exercícios*

Para além do conjunto de exercícios que surgem no final do capítulo, são expostos também alguns nas margens do manual, relativos ao tema em estudo. Os autores recomendam o seu livro Exercícios de Matemática, 11° ano, dos mesmos autores e da referida editora, de harmonia com este manual escolar.

Os problemas de optimização aparecem nas aplicações das derivadas, no ponto que diz respeito aos problemas concretos. Os autores começam por explicar os passos a seguir na resolução dos mesmos, a seguir mostram cinco problemas resolvidos com base nos passos referidos no início. Estes são acompanhados de imagens, gráficos e tabelas que ajudam à compreensão do enunciado, bem como da resolução. Nas margens são registados mais doze exercícios sobre problemas de optimização. Nos exercícios do final do capítulo não existe nenhum problema de optimização.

Examinemos agora os problemas de optimização destas obras.

Problemas de Geometria Métrica

FG1. *Determinar o rectângulo de maior área que se pode inscrever numa dada circunferência. (Freitas e Gomes, 1979, p. 138)*

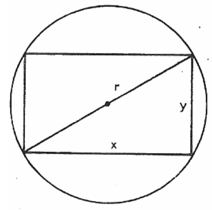


Fig. 43

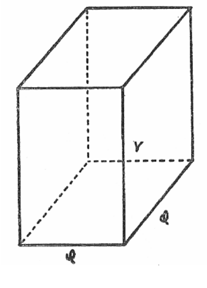
FG5. *Determine o rectângulo de maior área que se pode inscrever num triângulo isósceles de base 20 cm e altura 40 cm, por forma que dois vértices do rectângulo pertençam à base do triângulo. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)*

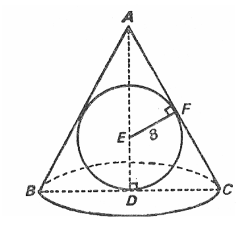
FG6. *Determine, de entre os rectângulos de área 81 cm² aquele que tem menor perímetro. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)*

FG9. *De entre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede a, determine a que tem maior área. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)*

FG11. *Determine a altura do cone de revolução de volume mínimo que pode ser circunscrito a uma esfera de raio r. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)*

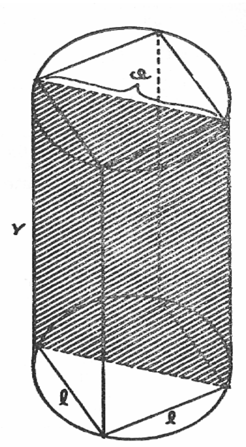
VM1.*Considere os paralelepípedos rectângulos de base quadrada em que a soma das suas dimensões é igual a uma constante a. Determine, em função de a, a altura daquele que apresenta o máximo volume. (Marques 1979, p.43) (Exames oficiais)*





VM2. *Determine a altura do cone circular recto de volume mínimo circunscrito a uma esfera de raio 8 unidades. (Marques 1979, p.43)*

VM3. *Num cilindro de revolução está inscrito um prisma quadrangular regular. A secção feita no cilindro por um plano que contem o eixo, tem 30 cm de perímetro.*



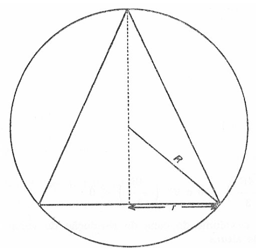
a. *Mostre que sendo x a medida, expressa em centímetros, do diâmetro de uma base do cilindro, o volume do prisma, em cm³, é dada pela expressão*

$$\frac{15x^2 - x^3}{2}$$

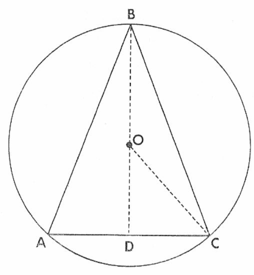
b. *Atendendo à natureza do problema, determine o domínio da função assim definida.*

c. *Determine o valor de x para o qual é máximo o volume do prisma.*

d. *Esboce o gráfico da função em referencial cartesiano e indique as coordenadas do ponto de inflexão desse gráfico. (Marques 1979, p.43) (Exames oficiais)*



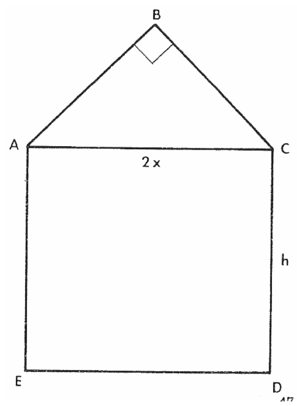
VM7. *Entre todos os triângulos isósceles inscritos numa circunferência de raio constante R, determine, em função de R, a altura x daquele que, rodando em torno dessa altura, gera o cone de revolução de volume máximo. (Marques 1979, p.47) (Exames oficiais)*



VM8. *Considere o triângulo estritamente isósceles inscrito numa circunferência de raio 5 cm.*

a. *Designando por x a medida da altura relativa ao lado desigual mostre que a área do triângulo pode ser dada em cm² pela expressão* $A = x\sqrt{10x - x^2}$.

b. *Verifique que a área é máxima quando x = 7,5 cm. (Marques 1979, p.47)*



VM9. *Um pentágono [ABCDE] está decomposto num triângulo rectângulo e isósceles [ABC] e um rectângulo [ACDE].*

A área do pentágono é 12 cm².

a. *Mostre que o perímetro y do rectângulo [ACDE] pode obter-se pela fórmula*

$$y = \frac{3x^2 + 12}{x}$$

b. *Recorrendo ao significado geométrico da derivada, determine uma equação da tangente ao gráfico da função definida por* $y = \frac{3x^2 + 12}{x}$ *no ponto (1, 15).*

c. *Determine x, de modo que seja mínimo o perímetro do rectângulo. (Marques 1979, p.47)*

PF1. *Dentre os rectângulos de perímetro igual a 20 cm determinar o que tem área máxima.* (Fernandes, 1980, p. 240))

PF2. *Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 m, qual é aquele que tem área máxima.* (Fernandes, 1980, p. 240)

PF5. Dentre os rectângulos de área igual a 64 dm^2 qual é aquele que tem o perímetro mínimo? (Fernandes, 1980, p. 250)

PF6. *De entre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 8 m, qual é aquele que tem área máxima.* (Fernandes, 1980, p. 250)

PF7. *Os catetos de um triângulo rectângulo somam 40 metros. Determinar a hipotenusa do que tem maior área. (Fernandes, 1980, p. 250)*

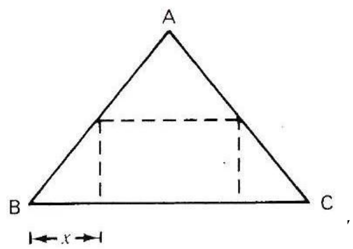
PF9. *De entre os sectores circulares de perímetro igual a 8 metros, qual é o raio daquele que tem área máxima? (Perímetro do arco = Rn e área do sector =* $\frac{R^2}{4}n$*, n em radianos)(Fernandes, 1980, p. 250)*

PF10. *De entre os prismas quadrangulares regulares que têm de volume 8* m^3*, qual é aquele que tem área total mínima. (Fernandes, 1980, p. 250)*

PF11. *Dada uma esfera de raio igual a 1 metro determinar a medida do raio do cilindro de revolução inscrito de volume máximo. (Fernandes, 1980, p. 250)*

PF12. *A soma dos perímetros de uma circunferência e de um quadrado é constante. Demonstrar que a soma das áreas do círculo e do quadrado é mínima quando o diâmetro do círculo for igual ao lado do quadrado. (Fernandes, 1980, p. 250)*

AC9. *O triângulo [ABC] é isósceles, sendo* $\overline{AB} = \overline{AC} = 10\,m$; $\overline{BC} = 12\,m$.



Pretendemos inscrever nele um rectângulo, da forma que a figura indica. Para que valor de x se obterá um rectângulo de área máxima e qual é o valor dessa área? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 313)

NVA6. *Entre os rectângulos de perímetro 40 dm, calcule as dimensões do que tem maior área. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 243)*

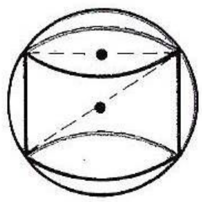
NVA8. *A soma de todas as arestas de um prisma recto de base quadrada é 72 cm.*

a. *Se x é a medida da aresta da base, mostre que o volume do prisma é dado pela fórmula*

$$V = 18x^2 - 2x^3$$

b. *Calcule as dimensões do prisma de volume máximo. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 244)*

NVA12. *Entre os cilindros de revolução inscritos numa superfície esférica de raio 2 dm, calcule as dimensões do que tem maior volume. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 247)*



Problemas de Geometria Analítica

FG10. *Considere um referencial o.n. no plano e os pontos A = (0, a) e B = (b, 0). Determine um ponto P do eixo Ox tal que* $\overline{AP} + \overline{PB}$ *seja mínimo. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)*

NVA4. *Num mesmo referencial ortonormado consideraram-se o ponto P (2, 3) e o gráfico da função*

$$x \mapsto y = x^2 + \frac{5}{2}$$

Definir, pelas suas coordenadas, o ponto do gráfico da função mais próximo do ponto P. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 248)

NVA13. *Quais as coordenadas do ponto da recta de equação*

2y + 3x = 4

mais próximo do ponto (3,4)? (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 248)

NVA14. *Entre as rectas que passam pelo ponto P (2, 1) escreva a equação axial da que forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 248)*

NVA15. *Defina sobre a recta y = x um ponto tal que a soma dos quadrados das distâncias aos pontos*

A (1, 0), B (-1, 0), C (0, 6)

seja mínima. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 249)

Problemas de Aritmética

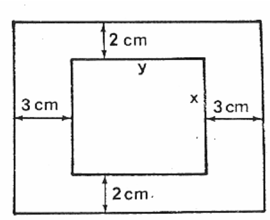
PF3. *Dois números têm por soma 12; determinar esses números de forma que a soma dos seus quadrados seja mínima. (Fernandes, 1980, p. 250)*

PF4. *Dois números têm por soma 20; determinar esses números de forma que o seu produto tenha valor máximo. (Fernandes, 1980, p. 250)*

AC4. *De entre os pares de números reais positivos cujo produto é 64 qual é aquele em que a soma é mínima? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 312)*

NVA7. *Decomponha 20 num produto de dois factores cuja soma seja mínima. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 243)*

Problemas de Medida em Contexto Real



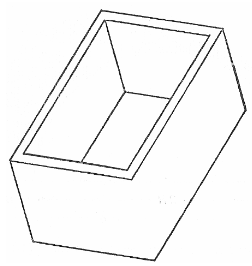
FG3. *Pretende-se imprimir um livro por forma que, em cada página, a mancha impressa seja um rectângulo de 216 cm² e com margens superior e inferior de 2 cm e margens laterais de 3 cm – Fig. 46.*

Quais devem ser as dimensões mais económicas para o livro (admitindo que o custo do livro é tanto menor quanto menor for a área de cada página)? (Freitas e Gomes, 1979, p. 140)

FG7. *Um lavrador pretende cercar com 1200 m de rede uma zona rectangular com a maior área possível, dividindo-a, ainda, em duas partes, paralelamente a um dos lados.*

Qual a maior área que o lavrador pode cercar? (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)

FG8. *Pretende-se construir com chapa metálica um reservatório cilíndrico de base circular e capacidade 64 litros. Determine as dimensões do reservatório de forma que a quantidade de chapa a utilizar seja mínima. Considere os casos de o reservatório ter ou não ter tampa. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)*



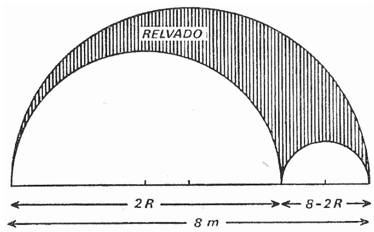
VM5. *Na figura está representada uma caixa aberta em que a base é um rectângulo cujo comprimento é o dobro da largura.*

a. Prove que, se a área total da caixa é 54 dm², o volume da caixa é dado, em dm³, pela expressão $18x - \frac{2x^3}{3}$ *em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.*

b. Determine o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo e indique o valor do volume nesse caso.

c. Considere a função real de variável real definida pela expressão obtida em a) e determine os pontos de inflexão do seu gráfico.

d. Esboce esse gráfico. (Pode utilizar um referencial não monométrico). (Marques 1979, p.45) *(Exames oficiais)*

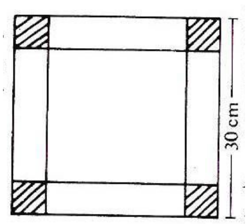


VM6. *Num canteiro semi-circular cujo raio tem 4 metros de comprimento, são reservados, de acordo com a figura junta, dois canteiros, igualmente semi-circulares, destinados ao cultivo de flores, sendo para relvado a parte restante.*

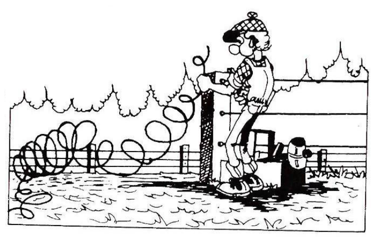
a. Mostre que a área do relvado mede π *(4R - R²) metros quadrados.*

b. Investigue quais as medidas que deverão ter os raios dos dois canteiros das flores, para que seja máxima a área do relvado. (Marques 1979, p.46)

(Exames oficiais)

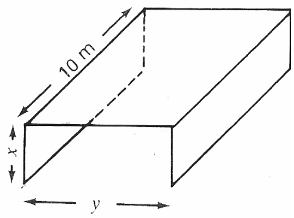


PF8. *Com uma placa de latão de 30 cm de lado pretende-se fazer uma caixa sem tampa. Que dimensões devem ter os quadrados a cortar dos 4 cantos, para que esta tenha o máximo volume? (Fernandes, 1980, p. 250)*



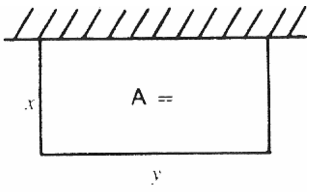
AC1. *A maior área possível: Um indivíduo dispõe de 20 metros de arame com os quais quer vedar um pequeno parque de forma rectangular num terreno que*

tem à sua disposição. Pretendendo obter a área máxima, que dimensões deve escolher para o parque? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 296)



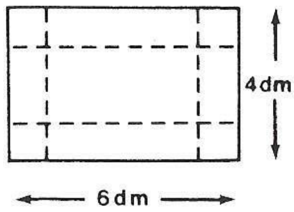
AC3. *A construção mais barata: Pretende-se construir um túnel com a forma que a figura sugere, usando-se três placas rectangulares do mesmo material e espessura uniforme (duas laterais e uma em cima).*

O túnel tem uma extensão de 10 m e a sua boca deve ter 72 m² de área. Que valores devem ter a largura e a altura do túnel para que a construção seja a menos cara possível? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 298)



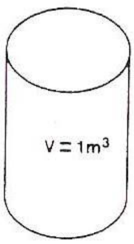
AC5. *Pretendemos que um terreno de forma rectangular (em que um dos lados está encostado a um muro) tenha uma área de 50 m².*

Que dimensões deve ter o terreno para que o comprimento da vedação a utilizar ao longo dos outros três lados seja o menor possível? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 312)

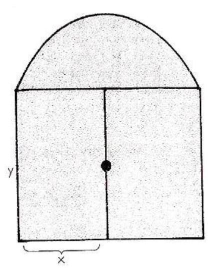


AC7. *Se cortarmos quatro quadrados iguais nos cantos de uma folha rectangular de 6 dm x 4 dm, poderemos dobrá-la e construir uma caixa aberta.*

Qual deve ser a medida do lado do quadrado a cortar para que a caixa tenha volume máximo (indica um valor aproximado com erro inferior a 1 cm) (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 313)

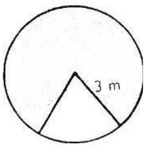


AC8. *Quais devem ser as medidas do raio da base e da altura de um reservatório cilíndrico fechado com um volume de 1 m³, de modo que a sua área total seja mínima? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 313)*

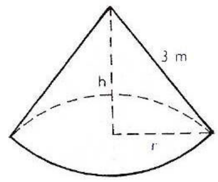


NVA1. *Uma janela tem a forma que a gravura ao lado reproduz: um rectângulo coroado com um semicírculo. O perímetro da janela deve ser 714 cm.*

Calcule as dimensões que permitem uma maior entrada de luz. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 243)



NVA2. *Dispõe-se de um círculo de lona de 3m de raio. Cortando um sector circular pode construir-se uma tenda de campismo com a forma cónica. Para que a capacidade seja máxima, quais devem ser as dimensões da tenda (raio da base e altura)? (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 244)*



NVA5. *Pretende-se construir um cercado com a forma rectangular e com a área de 1200 m^2.*

a. *Mostre que o perímetro do cercado é dado pela fórmula*

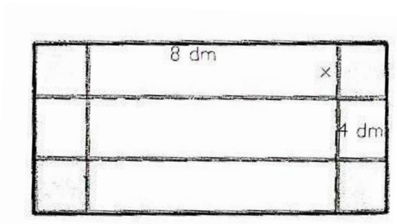
$$P = 2x + \frac{2400}{x}$$

em que x representa o comprimento, em metros, do cercado.

b. *Calcule as dimensões do cercado de modo que o perímetro seja mínimo. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 243)*

NVA9. *Pretende-se construir um reservatório cilíndrico com a capacidade de 6280 m^3. Quais devem ser as suas dimensões de forma que a sua área total seja mínima (menor custo)? (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 245)*

NVA10. *Com chapas de latão de 8 dm/4 dm, cortando em cada canto um quadrado e fazendo dobragens convenientes, obtém-se caixas sem tampa.*
Quanto deve medir o lado do quadrado, x, para que a capacidade seja máxima? (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 246)



NVA11. *Pretende-se construir uma caixa, sem tampa, em que a base seja um rectângulo de comprimento duplo da largura.*

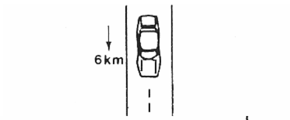
a. *Prove que, se o volume é 36 dm^3 a área total em dm^2 é dada pela fórmula*

$$A = \frac{108 + 2x^3}{x}$$

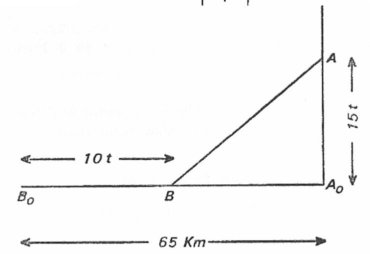
Em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.

b. *Calcule x de modo que a área seja mínima. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 247)*

Problemas de Física



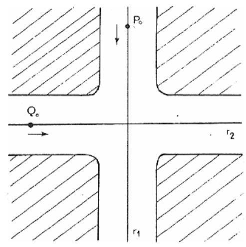
VM4. *Às oito horas um navio B encontra-se a 65 km a Oeste de outro navio A. O navio B ruma a Leste, à velocidade de 10 km/h, enquanto A navega rumo ao Norte, com a velocidade de 15 km/h.*

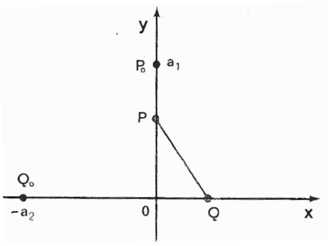


a. *Mostre que, em cada instante, em quilómetros, que separa os dois navios é dada pela expressão* $\sqrt{(65-10t)^2+225t^2}$.

b. *Calcule a hora a que os dois navios se encontram à distância mínima. (Marques 1979, p.44) (Exames oficiais)*

FG2. *Dois pontos materiais P e Q movem-se sobre duas rectas perpendiculares* r_1 *e* r_2 *com movimentos uniformes de velocidades (algébricas) respectivamente* v_1 *e* v_2.

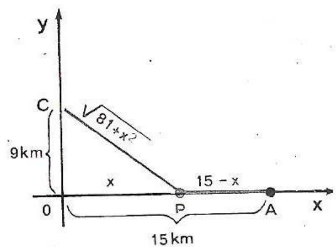




No instante inicial, isto é, no instante em que se começa a contar o tempo, P encontrava-se na posição P_0 *à distância* a_1 *de* r_2 *e Q encontrava-se na posição* Q_0 *à distância* a_2 *de* r_1*, como se esquematiza na Fig. 44.*

Determinar o instante em que a distância dos pontos é mínima e calcular essa distância. (Freitas e Gomes, 1979, p.139)

FG4. *Um ciclista vive num local isolado C, que dista 9 km do ponto O mais próximo de uma estrada rectilínea e alcatroada e pretende ir a uma aldeia A que dista 15 km de O, sobre essa estrada.*



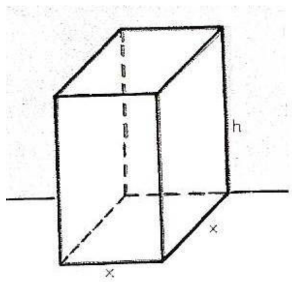
Supondo que o ciclista se desloca a 5 km/h na estrada alcatroada e a 4 km/h no acesso à estrada, determine em que ponto deve atingir a estrada alcatroada para fazer o percurso total no menor tempo possível. (Freitas e Gomes, 1979, p. 141)

AC6. *Dois automóveis deslocam-se, à mesma velocidade, em estradas perpendiculares e no sentido indicado pelas setas.*

Um deles está a 6 km do cruzamento e o outro a 8 km do cruzamento. Quando é que a distância entre eles é mínima? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 312)

Problemas de Economia

NVA3. *Pretende-se construir, encostado a uma parede, um reservatório de base quadrada e com a capacidade de 294 m³. Cada m² de face encostada à parede e da base fica por 1000$00 e cada m² das restantes faces fica por 2000$00.*



a. *Representando por x a medida, em metros, da aresta da base, mostrar que o custo é dado pela fórmula*

$$C = 1000\left(3x^2 + \frac{2058}{x}\right).$$

b. *Calcular as dimensões do reservatório de modo que o custo seja mínimo e esse custo mínimo. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 246)*

AC2. *O preço mais conveniente: A comissão de finalistas de uma escola secundária está a organizar um festival desportivo para angariar fundos. Tendo alugado o pavilhão de um clube da zona, calcularam que, vendendo por 150$00 cada bilhete, conseguiriam uma lotação de 500 pessoas. Porém, um estudo mais atento (baseado em sondagens) levou-os a concluir que, por cada 10$00 que baixassem àquele preço, teriam mais 50 pessoas a comprar o ingresso.*

Supondo válidas estas previsões, qual é o preço de cada bilhete que assegura uma maior receita global? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 297)

C. Análise do período

Comecemos por fazer uma análise do programa oficial. Como vimos, a derivada é abordada no 11° ano, num capítulo respeitante à derivada, sendo precedido pelo estudo dos limites e continuidade. A parte referente ao estudo da derivada contém um ponto relativo às suas aplicações. Nesta altura começam a utilizar-se as calculadoras científicas, mas estas não são de grande auxílio para a resolução de problemas de optimização.

Relativamente aos cinco manuais analisados, averiguámos que, comparativamente ao período anterior, o número de problemas de optimização é ligeiramente superior, cinquenta e seis, uma vez que também estudámos mais uma obra do que no período anterior. Na obra de Freitas e Gomes (FG) encontramos onze problemas de optimização; na de Verol Marques (VM) nove; na de Palma Fernandes (PF) doze; na de Abrantes e Carvalho (AC) nove e na de Neves, Vieira e Alves (NVA) encontramos dezasseis problemas de optimização.

Notámos também, através de um primeiro olhar pelos problemas de optimização deste período, que muitos já surgiram nas obras analisadas anteriormente, em particular os problemas que surgiram em exames oficiais.

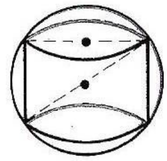
Debrucemo-nos agora sobre as características dos problemas de optimização encontrados.

Começando pelo tipo de problema, observamos que a maioria dos problemas surgem como exercícios (trinta e quatro), sendo doze problemas apresentados como exemplos e apenas nove como exercícios resolvidos. Surge ainda uma demonstração e não detectámos nestes manuais nenhum relatório ou actividade de grupo. Na obra de Freitas e Gomes encontramos os quatro primeiros problemas sob a forma de exemplo (FG1, FG2, FG3, FG4) e os restantes sete sob a forma de exercícios. Na obra de Verol Marques todos os problemas se surgem sob a forma de exercício resolvido enquanto que na de Palma Fernandes encontramos um exemplo (PF1), uma demonstração (PF12) e os restantes são exercícios. Na de Abrantes e Carvalho, os três primeiros problemas surgem sob a forma de exemplo (AC1, AC2, AC3) e os restantes seis sob a forma de exercício. Por fim, na obra de Neves, Vieira e Alves os cinco primeiros problemas surgem também sob a forma de exemplo (NVA1, NVA2, NVA3, NVA4, NVA5) e os restantes sob a forma de exercício. Nota-se então que, a maioria dos manuais desta reforma, apresenta primeiro os problemas de optimização sob a forma de exemplo (com resolução) e posteriormente os exercícios de aplicação. Examinemos agora o problema que surge sob a forma de demonstração:

> “ ***(PF12)*** *A soma dos perímetros de uma circunferência e de um quadrado é constante. Demonstrar que a soma das áreas do círculo e do quadrado é mínima quando o diâmetro do círculo for igual ao lado do quadrado.*”

Apesar deste surgir na parte destinada aos exercícios, o que se pretende fazer é uma demonstração, de tal modo que o aluno sabe, à partida, qual o resultado a que terá de chegar.

Quanto ao contexto em que o problema se enquadra, identificámos neste período problemas de todos os contextos, sendo grande parte de Geometria Métrica (vinte e quatro) ou em contexto real de medida (dezassete), ocorrendo os outros contextos em número mais reduzido: cinco problemas de Geometria Analítica (FG10, NVA4, NVA13, NVA14, NVA15) quatro de Aritmética (AC4, PF3, PF4, NVA7), quatro de Física (AC6, VM4, FG2, FG4) e dois de Economia (NVA3, AC2). Vejamos alguns dos problemas:



*" **(NVA12)** Entre os cilindros de revolução inscritos numa superfície esférica de raio 2 dm, calcule as dimensões do que tem maior volume."*

Este é um problema de Geometria Métrica em que temos um cilindro inscrito numa esfera. O enunciando vem acompanhado de uma figura simples, ou seja, sem qualquer dado, mas alguns traços na figura ajudam a visualizar a forma de determinar a função a optimizar, em ordem a apenas uma variável.

*" **(NVA13)** Quais as coordenadas do ponto da recta de equação*

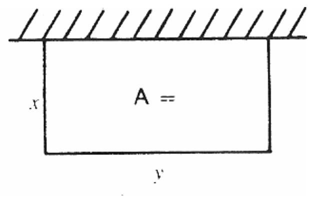
$$2y + 3x = 4$$

mais próximo do ponto (3,4)?"

Este é um problema de Geometria Analítica, sem qualquer tipo de ajuda para a resolução, em que se pretende achar a distância mínima de um ponto a uma recta.

*" **(AC5)** Pretendemos que um terreno de forma rectangular (em que um dos lados está encostado a um muro) tenha uma área de 50 m^2.*

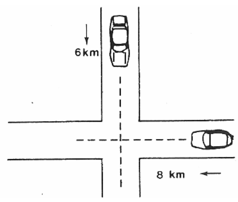
Que dimensões deve ter o terreno para que o comprimento da vedação a utilizar ao longo dos outros três lados seja o menor possível?"



Este é um problema de medida em contexto real em que se procura determinar o menor perímetro de um rectângulo sabendo a sua área.

*" **(AC6)** Dois automóveis deslocam-se, à mesma velocidade, em estradas perpendiculares e no sentido indicado pelas setas.*

Um deles está a 6 km do cruzamento e o outro a 8 km do cruzamento. Quando é que a distância entre eles é mínima?"

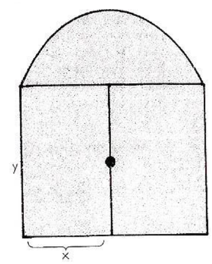


Este último é um problema da área da Física em que se intenta determinar a distância mínima entre dois objectos (automóveis), sabendo que se deslocam à mesma velocidade e a distância a que se encontravam inicialmente.

Relativamente à função a optimizar, vêem-se, neste período, todos os tipos. Destacam-se os problemas em que se procura optimizar uma área (vinte e cinco) ou um volume (treze) que surgem em elevado número.

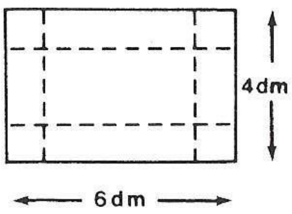
Nos problemas em que se optimiza uma área surgem as situações seguintes: optimizar a área de figuras planas ou de sólidos geométricos. Relativamente às figuras planas, surgem situações em que se pretende optimizar a área de um rectângulo dado o valor do perímetro (PF1, NVA6, AC1, FG7), o raio da circunferência circunscrita ao rectângulo (FG1) ou as dimensões de um triângulo isósceles circunscrito ao rectângulo (FG5, AC9); optimizar a área de um triângulo rectângulo dada a medida da hipotenusa (FG9, PF2, PF6), de um triângulo rectângulo dada a soma das medidas dos catetos (PF7), de um triângulo isósceles dado o raio da circunferência circunscrita (VM8) ou de um triângulo formado pelas rectas que passam num determinado ponto e os eixos (NVA14). No problema PF9 determina-se a área máxima de um sector circular dado o seu perímetro; no problema FG3 pretende-se determinar a menor área da página de um livro dada a área de impressão e a medida das margens. Aparecem também situações em que se pretende optimizar a área de figuras planas compostas: No problema VM6 determina-se a área máxima de um canteiro delimitado por tês semicircunferências, estando duas inscritas na terceira; dado o raio da terceira, no problema NVA1 pretende-se determinar a área máxima de uma figura composta por um rectângulo coroado com um semicírculo, dado o perímetro dessa figura; no problema PF12 pretende determinar-se a soma das áreas mínimas de círculo e de um quadrado dada a soma dos perímetros. Passando agora para os problemas em que se pretende determinar a área de um sólido geométrico, encontramos situações em que se pretende determinar: a área total mínima de um cilindro, prisma ou paralelepípedo dado o seu volume (AC8, NVA9, FG8, PF10, AC3, NVA11). Veja-se um exemplo em que se acha a área máxima de uma figura composta por um rectângulo e um semicírculo:

> " ***(NVA1)*** *Uma janela tem a forma que a gravura ao lado reproduz: um rectângulo coroado com um semicírculo. O perímetro da janela deve ser 714 cm.*
>
> *Calcule as dimensões que permitem uma maior entrada de luz."*



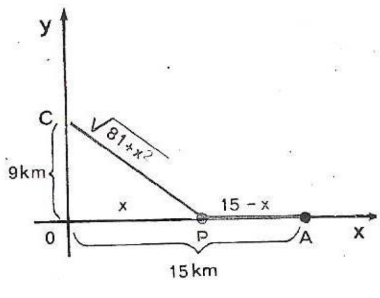
Nos problemas em que se optimiza um volume dão-se as situações: optimizar o volume de um cone circunscrito a uma esfera, dado o raio da esfera (VM2, FG11); o volume de um paralelepípedo ou prisma, dada a soma das suas dimensões (VM1, NVA8); o volume de um prisma dado o perímetro de uma secção feita (VM3); o volume de um cilindro, dado o raio de uma esfera que o circunscreve (OF11, NVA12); o volume de uma caixa de base rectangular, dada a sua área (VM5); o volume de uma caixa, dadas as dimensões da folha utilizada para a construir (PF8, AC7, NVA10); o volume de um cone dado o raio do sector circular utilizado para o construir (NVA2) ou optimizar o volume de um cone de revolução, dado o raio da circunferência que contem o triângulo que o gera (VM8). Vejamos um exemplo da situação que surge em maior número:

> " ***(AC7)*** *Se cortarmos quatro quadrados iguais nos cantos de uma folha rectangular de 6 dm x 4 dm, poderemos dobrá-la e construir uma caixa aberta.*
>
> *Qual deve ser a medida do lado do quadrado a cortar para que a caixa tenha volume máximo (indica um valor aproximado com erro inferior a 1 cm)"*



Relativamente aos problemas restantes, em seis optimiza-se uma distância; em cinco o perímetro; em três a soma; num problema pretende-se optimizar um produto; num pretende-se optimizar o tempo e em dois pretende-se optimizar o custo. Quanto aos problemas em que se pretende optimizar a distância, no problema FG10 determina-se quando é mínima a soma da distância entre três pontos, nos problemas VM4, AC6 e FG2 pretende-se determinar a distância mínima entre dois objectos, sabendo a velocidade a que cada um se desloca e a distância a um determinado ponto; no problema NVA13 pretende-se determinar o ponto de uma recta cuja distância a um determinado ponto é mínima, e, por fim, no problema NVA15 pretende-se determinar quando é mínima a soma dos quadrados das distâncias entre uma recta e três pontos. Relativamente aos problemas em que se pretende optimizar um perímetro, em todos eles se pretende determinar o perímetro de um rectângulo dada a sua área (FG6, VM9, PF5, AC5, NVA5). Nos problemas aritméticos AC4, PF3, NVA7 pretende-se optimizar uma soma de dois números ou dos seus quadrados, dado o seu produto e no PF4 optimiza-se o produto de dois números sabendo a sua soma. No problema FG4 vai-se optimizar o tempo que um ciclista demora a percorrer um percurso repartido em duas partes em que se desloca a velocidades diferentes. Por fim, no problema AC2, pretende-se determinar o preço de um bilhete para tornar máximo o lucro, tendo em conta o número de pessoas que diminui se o preço aumentar um determinado valor e no problema NVA3 determinam-se as dimensões do reservatório de modo que o custo seja mínimo. Vejamos um exemplo de optimização de tempo que surge neste período:

> " ***(FG4)*** *Um ciclista vive num local isolado C, que dista 9 km do ponto O mais próximo de uma estrada rectilínea e alcatroada e pretende ir a uma aldeia A que dista 15 km de O, sobre essa estrada.*
>
> *Supondo que o ciclista se desloca a 5 km/h na estrada alcatroada e a 4 km/h no acesso à estrada, determine em que ponto deve atingir a estrada*

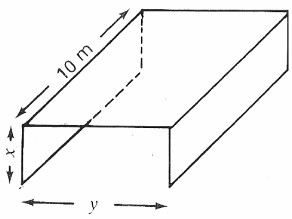


alcatroada para fazer o percurso total no menor tempo possível."

Passando agora para as figuras ou esquemas auxiliares do enunciado, concluímos que trinta e oito dos problemas não apresentam qualquer esquema, onze destes são os problemas de Geometria Analítica, Aritmética e Economia que não vêm acompanhados de qualquer tipo de figura ou esquema auxiliar no enunciado; quinze apresentam figuras com dados e apenas três apresentam figuras simples (VM5, AC1, NVA12). É ainda de referir que, por exemplo, no problema (FG4) se verifica que os dados estão representados num sistema de eixos coordenados, facilitando a compreensão do problema. Reparemos no exemplo seguinte em que temos uma figura com dados, de extrema importância, para a resolução do problema:

*" **(AC3)** A construção mais barata: Pretende-se construir um túnel com a forma que a figura sugere, usando-se três placas rectangulares do mesmo material e espessura uniforme (duas laterais e uma em cima).*

O túnel tem uma extensão de 10 m e a sua boca deve ter 72 m² de área. Que valores devem ter a largura e a altura do túnel para que a construção seja a menos cara possível? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 298)



Os dados são numéricos em quarenta e oito dos problemas surgindo de forma genérica em apenas oito (FG1, FG2, FG9, FG10, FG11, VM1, VM7, PF12). É ainda de referir que o livro de Freitas e Gomes apresenta o primeiro e o último problema com dados genéricos; o livro de Verol Marques apresenta o primeiro problema com dados genéricos e o livro de Palma Fernandes apresenta o último problema com dados genéricos. O livro de Abrantes e Carvalho e o livro de Neves Vieira e Alves apenas apresentam problemas com dados numéricos.

A maioria dos problemas apresenta um enunciado simples (quarenta e seis) e apenas dez dos problemas contêm uma resolução encaminhada. O livro de Freitas e Gomes, o de Palma Fernandes e o de Abrantes e Carvalho apenas mostram problemas com enunciado simples. No livro de Neves Vieira e Alves apenas quatro dos quinze problemas são de resolução encaminhada (NVA3, NVA5, NVA8 e NVA11) e no de Verol Marques seis dos nove problemas são de resolução encaminhada (VM3, VM4, VM5, VM6, VM8, VM9). Observemos alguns dos problemas com resolução encaminhada:

*" **(NVA11)** Pretende-se construir uma caixa, sem tampa, em que a base seja um rectângulo de comprimento duplo da largura.*

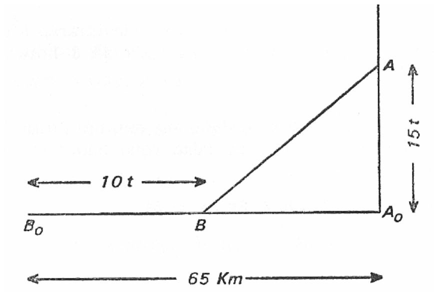
a. Prove que, se o volume é 36 dm³ a área total em dm² é dada pela fórmula

$$A = \frac{108 + 2x^3}{x}$$

Em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.

b. *Calcule x de modo que a área seja mínima."*

" ***(VM4)*** *Às oito horas um navio B encontra-se a 65 km a Oeste de outro navio A. O navio B ruma a Leste, à velocidade de 10 km/h, enquanto A navega rumo ao Norte, com a velocidade de 15 km/h.*



a. *Mostre que, em cada instante, em quilómetros, que separa os dois navios é dada pela expressão* $\sqrt{(65-10t)^2+225t^2}$.

b. *Calcule a hora a que os dois navios se encontram à distância mínima."*

Concluímos então que, em ambas as situações identificamos uma primeira alínea em que se procura que o aluno demonstre que a função a optimizar é a função dada e na segunda alínea que o aluno determine a solução óptima. Deste modo, mesmo que o aluno não consiga resolver a primeira alínea, consegue fazer a segunda, uma vez que já tem a expressão a optimizar.

A função auxiliar surge implicitamente na maioria dos problemas (trinta e dois) e surge explicitamente em vinte e quatro. No manual de Freitas e Gomes apenas dois problemas têm a função auxiliar de forma explícita (FG3, FG6). Os problemas em que a função auxiliar surge de forma explícita são aqueles em que é dado, por exemplo, o valor da área, do perímetro, do volume, da soma ou do produto. Nestas situações o aluno sabe à partida que terá de utilizar essas fórmulas para determinar o valor de uma variável em função da outra. Os problemas em que a função auxiliar surge de forma implícita são aqueles em que, por exemplo, é dada a medida da hipotenusa, do raio ou dos lados de uma figura e a partir daí o aluno tem de relacionar os dados para determinar o valor de uma variável em função da outra. Nos problemas de Física ou Economia a função auxiliar surge sempre implicitamente. Examinemos o exemplo de um problema de economia:

" ***(AC2)*** *O preço mais conveniente: A comissão de finalistas de uma escola secundária está a organizar um festival desportivo para angariar fundos. Tendo alugado o pavilhão de um clube da zona, calcularam que, vendendo por 150$00 cada bilhete, conseguiriam uma lotação de 500 pessoas. Porém, um estudo mais atento (baseado em sondagens) levou-os a concluir que, por cada 10$00 que baixassem àquele preço, teriam mais 50 pessoas a comprar o ingresso.*

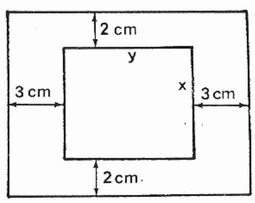
Supondo válidas estas previsões, qual é o preço de cada bilhete que assegura uma maior receita global?"

Num primeiro olhar sobre este problema, não é imediata a forma de calcular a função a optimizar apenas em função de uma só variável. Em primeiro ligar o aluno terá de apurar que a receita resulta do produto entre o número de bilhetes vendidos e o preço e logo a seguir terá de ver qual o aumento no número de pessoas correspondente a cada diminuição de 10$00 no preço do bilhete. Só depois consegue chegar à função a optimizar em ordem apenas a uma variável.

Apreciemos agora quais as noções aplicadas para a resolução dos problemas. Vemos então que, não existe uma noção que se destaque em relação às outras. A noção mais aplicada é o Teorema de Pitágoras que aparece em doze problemas, esta noção surge associada a problemas com triângulos em que necessitamos das medidas dos lados, ou em figuras inscritas, como, por exemplo triângulos em circunferências ou pirâmides/cones em esferas em que temos a medida do raio da circunferência ou da esfera e é necessário determinar a medida dos lados da figura inscrita. A fórmula de cálculo da área surge em dez problemas e a noção de perímetro também noutros dez e em cinco é aplicada a fórmula do volume. Estas surgem, normalmente, em problemas em que a função auxiliar aparece explicitamente, ou seja, no enunciado é dado o valor do perímetro, área ou volume da figura e a partir daí consegue-se determinar uma das variáveis em função da outra. A noção de distância surge em nove problemas, normalmente associada a problemas de Geometria Analítica ou de Física em que se pretende determinar a distância entre objectos ou em problemas de Geometria Métrica ou de Contexto Real de Medida em que é preciso de determinar a medida do lado ou parte do lado de uma figura em função de outros dados. Observemos dois exemplos:

*“ **(FG10)** Considere um referencial o.n. no plano e os pontos A = (0, a) e B = (b, 0). Determine um ponto P do eixo Ox tal que $\overline{AP}+\overline{PB}$ seja mínimo.”*

*“ **(FG3)** Pretende-se imprimir um livro por forma que, em cada página, a mancha impressa seja um rectângulo de 216 cm² e com margens superior e inferior de 2 cm e margens laterais de 3 cm.*



Quais devem ser as dimensões mais económicas para o livro (admitindo que o custo do livro é tanto menor quanto menor for a área de cada página)?”

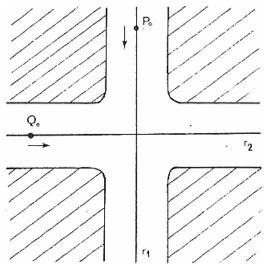
No primeiro caso temos um problema de Geometria Analítica em que se utiliza a noção de distância entre dois pontos. No segundo surge um problema em contexto real de medida em que se utiliza a noção de distância para chegar à medida de cada um dos lados do rectângulo com base na medida das partes do lado que nos são dadas.

A noção de semelhança de figuras detecta-se em cinco problemas, normalmente associada a problemas com figuras inscritas. Em quatro aplica-se a noção de velocidade, problemas da área da Física. Nos de Aritmética aplica-se a noção de soma (três problemas) ou de produto (dois problemas). A noção de função (equação da recta) aplica-se uma vez, num problema de Geometria Analítica e em nenhum problema se utilizam as funções trigonométricas. É ainda de referir que existem problemas em que é necessário aplicar mais do que uma noção, por exemplo, no problema AC9 aplica-se o Teorema de Pitágoras e a semelhança de figuras; nos problemas físicos é necessário, por vezes, usar a noção de velocidade e o Teorema de Pitágoras.

Relativamente à estratégia utilizada, apurámos que apenas vinte e três problemas aparecem, pela primeira vez; dos restantes, vinte e quatro já surgiram em manuais anteriores (FG1, FG6, FG7, FG8, FG9, PF2, PF3, PF4, PF5, PF6, PF8, PF9, PF11, PF12, AC2, AC4, AC7, AC8, NVA7, NVA8, NVA9, NVA10, NVA11, NVA12). Seis são retirados de enunciados de exames (VM1, VM3, VM4, VM5, VM6, VM7) e três pertenceram já a uma das obras históricas analisadas (PF1, PF10, NVA6).

Tal como no período anterior, a função que identificámos mais vezes é a função polinomial (vinte e cinco), seguida da função racional (dezoito) e as funções irracionais surgem em treze problemas. Os restantes tipos de funções não aparecem em nenhum problema. Note-se que todos os manuais analisados contêm os três tipos de funções. As funções irracionais vêm associadas a problemas em que se aplica o Teorema de Pitágoras ou a noção de distância, enquanto que as funções racionais surgem associadas a problemas em que se aplica a noção de área, volume, produto ou semelhança de figuras.

Apenas vinte e dois problemas mostram resolução. O esquema utilizado para cálculo dos extremos em catorze dos problemas é o cálculo dos zeros seguido do estudo do sinal. Apenas cinco problemas fazem o estudo do sinal da segunda derivada e os restantes dois problemas só calculam os zeros. No livro de Freitas e Gomes encontramos um problema em que apenas se calculam os zeros da derivada e os restantes que apresentam o cálculo dos zeros da derivada e o estudo do sinal. No livro de Verol Marques encontramos as três situações distintas. No livro de Palma Fernandes, no livro de Abrantes e Carvalho e ainda no livro de Neves Vieira e Alves todos os exercícios que apresentam solução são resolvidos da mesma forma: Cálculo dos zeros da derivada e estudo do seu sinal. Vejamos algumas situações:

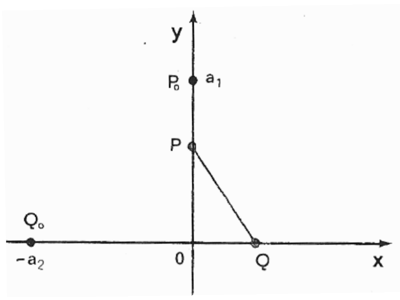


*" **(FG2)** Dois pontos materiais P e Q movem-se sobre duas rectas perpendiculares r_1 e r_2 com movimentos uniformes de velocidades (algébricas) respectivamente v_1 e v_2.*

No instante inicial, isto é, no instante em que se começa a contar o tempo, P encontrava-se na posição P_0 à distância a_1 de r_2 e Q encontrava-se na posição Q_0 à distância a_2 de r_1, como se esquematiza na Fig. 44.

Determinar o instante em que a distância dos pontos é mínima e calcular essa distância.

Considerando um sistema de eixos com origem no ponto de encontro das rectas, Fig. 45, a ordenada do ponto P no instante t será



$$y = a_1 - v_1 t$$

e a abcissa do ponto Q será

$$x = -a_2 - v_2 t$$

A distância dos dois pontos será nesse instante

$$\rho = \sqrt{(a_1 - v_1 t)^2 + (-a_2 - v_2 t)^2}$$

ou seja

$$\rho = \sqrt{(a_1{}^2 + a_2{}^2) - 2(a_1 v_1 + a_2 v_2)t + (v_1{}^2 + v_2{}^2)t^2}$$

Trata-se, então, de averiguar da existência de um mínimo para a função $\rho(t)$.

Se este mínimo existe, ele corresponderá ao mínimo da função $\rho^2(t)$ e reciprocamente. Por isso e por simplicidade, vamos trabalhar com esta função que designaremos por f(t). Tem-se

$$\frac{df}{dt} = -2(a_1 v_1 + a_2 v_2) + 2(v_1{}^2 + v_2{}^2)t$$

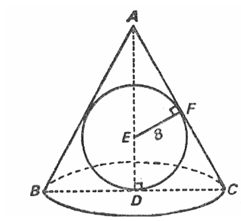
derivada esta que se anula para $t = \dfrac{a_1 v_1 + a_2 v_2}{v_1{}^2 + v_2{}^2}$

Nesse caso a própria natureza do problema indica que se trata de um mínimo cujo valor é, como facilmente se pode calcular,

$$\frac{(a_1 v_2 - a_2 v_1)^2}{v_1{}^2 + v_2{}^2}$$

Então, $\rho = \dfrac{|a_1 v_2 + a_2 v_1|}{\sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2}}$ *é a distância mínima procurada."*

Confirmamos que neste problema, o autor faz o cálculo dos zeros da derivada, como só obteve um valor, conclui de imediato que esse é o ponto em que se atinge o valor mínimo.



*“ **(VM2)** Determine a altura do cone circular recto de volume mínimo circunscrito a uma esfera de raio 8 unidades.*

Sendo x a altura do cone e y o raio da base.

Da semelhança de triângulos [AEF] e [ADC] resulta:

$$\frac{8}{y} = \frac{x-8}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{64}{y^2} = \frac{(x-8)^2}{x^2+y^2}$$

$$64x^2 + 64y^2 = y^2(x-8)^2$$
$$64x^2 = y^2\left(x^2 - 16x + 64 - 64\right)$$
$$y^2 = \frac{64x^2}{x^2 - 16x}$$

Volume do cone:

$$V = \frac{\pi y^2 x}{3}$$

$$\therefore V = \frac{\pi}{3} . \frac{64x^3}{x^2 - 16x}$$

$$V = \frac{64\pi}{3} . \frac{x^2}{x-16}$$

$$V' = \frac{64\pi}{3} . \frac{2x^2 - 32x - x^2}{(x-16)^2}$$

$$V' = \frac{64\pi}{3} . \frac{x^2 - 32x}{(x-16)^2}$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 32x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 32$$

Como x $\neq$0 é x = 32

$$V'' = \frac{64\pi}{3} . \frac{(2x-32)(x-16)^2 - 2(x-16)(x^2-32x)}{(x-16)^4}$$

$$V'' = \frac{64\pi}{3} . \frac{2(x-16)^3 - 2(x-16)x(x-32)}{(x-16)^4}$$

$$V''(32) = \frac{64\pi}{3} . \frac{2.16^3}{16^4} > 0$$

Como V'(32) = 0 $\wedge$ V''(32) > 0, o volume do cone é mínimo quando a altura do cone for 32 unidades.”

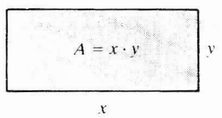
Neste problema, após o cálculo dos zeros da derivada, confirma-se através da segunda derivada que num dos valores obtidos a função tem um mínimo. Apesar de se ter obtido dois zeros da derivada apenas o valor diferente de zero é considerado.

Quanto aos gráficos, figuras ou esquemas auxiliares na resolução dos problemas verificamos que, em onze problemas é utilizado o quadro de monotonia; em nove surge uma figura na resolução; em dois surge o gráfico da função a optimizar e em quatro não é utilizado qualquer auxiliar. Os problemas com resolução da obra de Abrantes e Carvalho e da obra de Neves, Vieira e Alves incluem sempre o quadro de monotonia. Dos quatro problemas com resolução da obra de Freitas e Gomes, dois trazem uma figura e os outros dois não apresentam nada. Na obra de Verol Marques apenas um exercício não apresenta nada; seis apresentam uma figura e três incluem quadro de monotonia. Nos dois exercícios resolvidos da obra de Palma Fernandes, um apresenta quadro de monotonia e o outro não apresenta nada. É ainda de referir que existe um problema que apresenta figura e quadro de monotonia (VM4) e existe também um problema que apresenta figura, quadro de monotonia e gráfico (AC1). Consideremos este último exemplo:

Problema 1: A maior área possível.

Um indivíduo dispõe de 20 metros de arame com os quais quer vedar um pequeno parque de forma rectangular num terreno que tem à sua disposição. Pretendendo obter a *área máxima*, que dimensões deve escolher para o parque?

■ Esquema:



$P = 2x + 2y = 20$

Simplificando (e *matematizando*) o enunciado, o problema consiste em determinar, de entre todos os rectângulos de perímetro 20, qual é aquele que tem maior área.

Designando por x e y as dimensões do rectângulo será

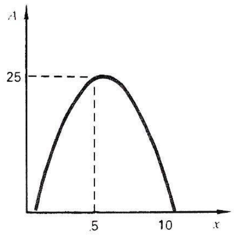
$$2x + 2y = 20 \iff x + y = 10 \iff y = 10 - x$$

e, como a área do rectângulo é dada por $A = x \cdot y$, ter-se-á

$$A = x \cdot (10 - x) \qquad \text{ou seja} \qquad A = 10x - x^2$$

expressão da área (A) em função de uma das dimensões (x).

■ Gráfico de $x \longmapsto A = 10x - x^2$ no intervalo $]0, 10[$:



Para que valor de x obtemos o valor máximo de A?

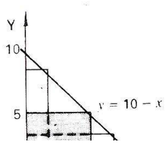
Derivando: $A' = D(10x - x^2)$, logo $A' = 10 - 2x$.

Facilmente se vê que A' se anula para $x = 5$, sendo positiva à esquerda de 5 e negativa à direita de 5.

Então A tem um máximo para $x = 5$, sendo 25 o valor da função nesse ponto. A área máxima é portanto de 25 m².

x		5	
$A' = 10 - 2x$	+	0	−
$A = 10x - x^2$	↗	25	↘
		máx.	

Devendo ser $x = 5$, então também $y = 5$ (recorda que $y = 10 - x$) pelo que se conclui que o quadrado de lado 5 é, de entre todos os rectângulos de perímetro 20, aquele que tem **maior área**.



Observamos que este problema apresenta uma resolução extremamente completa. Está dividida em duas partes, um corpo principal onde surge toda a resolução do problema e uma coluna na margem do manual onde aparecem esquemas e gráficos.

Finalmente, em relação ao valor pedido, este aparece de forma explícita, em vinte e nove dos problemas e implicitamente nos restantes dezassete. Na obra de Verol Marques surge sempre explicitamente.

Assim sendo, este período é caracterizado por problemas que surgem sob a forma de exercício. Encontram-se mais problemas em contexto real de medida que nos períodos anteriores e, tal como no período anterior, o que mais se optimiza é a área ou o volume. Existe também um aumento no número de problemas que contêm figuras com dados. O enunciado é simples na maioria dos problemas. As noções mais utilizadas são: o Teorema de Pitágoras, noção de perímetro e de área e a noção de distância.

Quanto à estratégia, notámos que existem mais problemas que já apareceram anteriormente, essencialmente noutros manuais, do que problemas que surgem pela primeira vez, estando a função a optimizar, neste período, mais repartida entre polinomial, racional e irracional. Por fim, em relação ao esquema de cálculo, nota-se que na maioria dos problemas que vêm acompanhados da resolução esta é feita pelo cálculo dos zeros da derivada e do estudo do seu sinal, apresentando grande parte destes problemas o quadro de monotonia.

Os dados obtidos na análise dos problemas de optimização deste período estão sintetizados na tabela a seguir.

3.4. A LEI DE BASES DO SISTEMA EDUCATIVO DE 1986

3.4.1. A REFORMA DE ROBERTO CARNEIRO E A LEI DE BASES DO SISTEMA EDUCATIVO (1986)

A. Análise do programa oficial

A 14 de Outubro de 1986 foi publicada a Lei de Bases do Sistema Educativo. Esta obrigava a uma reforma do sistema de ensino e definia princípios e orientações básicas para uma reorganização dos planos curriculares dos ensinos básico e secundário. A Comissão de Reforma do Sistema Educativo (CRSE) encarregou-se de interpretar as orientações curriculares da Lei de Bases, tomando as opções curriculares fundamentais, no que respeita aos critérios de selecção das matérias curriculares e aos princípios orientadores da estrutura curricular. Ficou definida então a configuração da educação secundária, nos seus objectivos, organização estrutural e plano de estudos.

O Ensino Secundário, composto por 3 anos, distribui-se por quatro agrupamentos distintos: 1) Científico-Natural, 2) Artes, 3) Económico-Social e 4) Humanidades. Cada um deles está subdividido em dois cursos: Curso Geral e Curso Tecnológico. Estando o primeiro vocacionado para os alunos que pretendiam prosseguir os seus estudos e o segundo vocacionado para a vida activa.

Neste quadro geral, a Matemática aparece como disciplina da Formação Específica, de vários agrupamentos, e a que é atribuída uma carga horária semanal de 4 horas em cada um dos anos do Ensino Secundário. Em 1987 é divulgado o documento Proposta de Reorganização dos Planos Curriculares dos Ensinos Básico e Secundário.

É neste quadro que é elaborado o programa do Ensino Secundário de Matemática, publicado em 1989, com uma primeira aplicação experimental, em algumas escolas no ano lectivo de 1991/92 e depois, desde 1993, com a aplicação generalizada em todas as escolas do país.

Com esta reforma foram criadas duas disciplinas distintas na área da Matemática: Matemática e Métodos Quantitativos. A primeira encorpava o agrupamento Científico-Natural, Artes e Económico-Social e a segunda o agrupamento Humanidades.

Analisaremos apenas o programa da primeira, uma vez que a segunda não contempla, no seu estudo, a Análise Infinitesimal.

Esta reforma marca a diferença em relação a todas as outras vistas até agora, já que é a primeira que se refere explicitamente aos problemas de optimização. É também inovadora em relação às ferramentas a utilizar, em particular para o estudo de funções, uma vez que contempla a utilização da calculadora gráfica e do computador no estudo das funções. Nessa altura não é ainda obrigatório o uso da calculadora gráfica na sala de aula pelo que as ferramentas auxiliares acabam por praticamente não ser utilizadas. Um outro aspecto a salientar é o facto de a derivada fazer parte do programa do 11º e do 12º ano e não apenas de um ano.

Uma vez que no 10º ano também se efectua o estudo de funções, iremos também analisar esse programa.

Examinemos então como ficou estruturado o programa experimental da disciplina de Matemática para o 10º ano.

Programas do Ensino Secundário de 1991

(Para aplicação em regime de experiência pedagógica)

10º Ano

Funções I – Generalidades. Função quadrática

- *Funções definidas por tabelas e por fórmulas; interpretação e elaboração de gráficos por pontos. Características gerais de uma função.*
- *Função quadrática*
- *Lógica. Primeiras leis de De Morgan. Quantificadores.*

(Programa de Matemática, 10º-12º anos, 1991)

Nesta parte do programa surgem como objectivos:

- *Analisar fórmulas da Geometria e de outras disciplinas para identificar funções de uma variável.*
- *Identificar em gráficos dados ou construídos (calculadora) domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonia,* ***extremos,*** *taxa de variação média num dado intervalo, injectividade de uma função e interpretar o fenómeno por ela descrito.*
- *Determinar, com o auxílio do gráfico e da calculadora, o comportamento da função numa vizinhança de pontos especiais do domínio.*
- ***Resolver problemas envolvendo a expressão de uma variável em função de outra, ou recorrendo a um gráfico.***

Pelo que se observa que, apesar de não surgir de forma explícita o estudo dos problemas de optimização, mas como se calculam extremos a partir da calculadora e se pretende fomentar a resolução de problemas, podemos encontrar nos manuais escolares alguns problemas de optimização.

Repare-se agora como ficou estruturado o programa experimental da disciplina de Matemática para o 11° ano.

11º Ano

Funções III – Limites. Derivadas

- *Limites e continuidade de funções*
- *Derivação de funções racionais. Segunda derivada. Aplicações*
  - *Derivada de uma função num ponto como limite da taxa de variação; interpretação geométrica*
  - *Teorema relativo à derivabilidade e continuidade (com demonstração)*
  - *Derivada da soma e do produto (com demonstração)*
    - *Derivada da potência e do quociente (informação)*
    - *Segunda derivada*
    - ***Aplicação da 1ª e da 2ª derivada ao estudo de gráficos, de máximos e mínimos relativos, de concavidades.***
    - *Assímptotas verticais e não verticais.*

(Programa de Matemática, 10º-12º anos, 1991)

Nesta parte do programa surgem como objectivos:

- *Calcular derivadas usando a definição (em casos simples), ou as regras de derivação.*
- *Determinar a tangente ao gráfico de uma função dada num ponto dado.*
- *Fazer o estudo analítico duma função racional e aplicá-lo num traçado de gráficos.*
- *Identificar, em situações problemáticas concretas, funções que permitam resolvê-las.*
- ***Resolver problemas de "máximos e mínimos"***

Este programa vem acompanhado de algumas indicações metodológicas. Em relação ao nosso tema há a seguinte indicação:

*Os **problemas de optimização** devem ser acessíveis e ter algum interesse prático. Exemplo:*

"De uma folha de cartão rectangular de 1m x 0,8m retira-se um quadrado em cada canto, para construir uma caixa sem tampa". Quando é que a capacidade da caixa é máxima?

Observámos que neste programa se refere, pela primeira vez, o estudo dos problemas de optimização. Assim, após aprender a calcular derivadas, os alunos devem resolver os respectivos problemas de aplicação, em particular problemas de optimização. Nas indicações metodológicas apresentam o exemplo de um problema de optimização de um volume.

Também o programa para o 12º ano contempla o estudo da derivada. Vejamos como ficou estruturado este programa, no capítulo dedicado às derivadas.

12º Ano

Funções IV – Complementos sobre Derivadas

- *Derivada da função inversa e da função composta; aplicações. Derivadas sucessivas. Derivadas de funções implícitas.*
  - *Derivada da função inversa e derivada da função composta; aplicação à derivada de* $\sqrt[n]{f(x)}$
  - *Derivada de* x^{α}*, com* $\alpha \in IR$ *e* $x \in IR^{+}$ *(informação)*
  - *Derivada da função implícita.*
- *Estudo de funções irracionais.*
  - *Funções irracionais: domínio, continuidade*

(Programa de Matemática, 10º-12º anos, 1991)

Nesta parte do programa surgem como objectivos:

- *Derivar funções compostas*
- *Fazer o estudo e gráfico de funções irracionais simples envolvendo apenas um radical quadrático ou cúbico.*

Surgem também algumas indicações metodológicas. Em relação ao nosso tema surge a seguinte indicação:

Fazer o estudo de algumas funções irracionais dos tipos $\sqrt{x-3}$ *,* $\sqrt[3]{x^2-x}$ *, as quais podem surgir ligadas a um **problema de optimização** como:*

"Determinar o rectângulo de área máxima que se pode inscrever num semicírculo de raio 10m."

Apurámos então que, apesar de os conteúdos programáticos não fazerem referência às aplicações das derivadas, estes constam nas indicações metodológicas. Adverte-se então que se faça o estudo de algumas funções irracionais, podendo estas estar ligadas a um problema de optimização. O exemplo apresentado é de um problema em que se pretende fazer a optimização de uma área.

Este programa não faz nenhuma referência a manuais para o ensino.

Relativamente às calculadoras, apenas eram utilizadas, pelos alunos, as calculadoras científicas, muito utilizadas para os cálculos estatísticos. De qualquer forma os professores podiam já utilizar as calculadoras gráficas como material de apoio às aulas.

B. Análise dos Manuais Escolares

Para esta reforma seleccionámos três manuais que iremos analisar para os três anos lectivos. Estes manuais foram seleccionados dado que foram os manuais mais utilizados pelos professores nesta época.

Vejamos agora as características de cada um dos manuais.

Manuais do 10º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: *Xeqmat, 10º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1992, Editorial O Livro: Lisboa

Localização da obra consultada: Biblioteca Pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual é composto por 327 páginas repartidas por cinco unidades. Apesar de não analisármos o programa para o 10º ano, uma vez que este não refere os problemas de optimização nem as derivadas, impõe-se neste momento examinar este tipo de manuais uma vez que apresentam problemas de optimização na unidade quatro, dedicada às funções, mas especificamente no estudo das funções quadráticas e funções polinomiais.

Como o programa não contempla especificamente os problemas de optimização nem a derivada, encontramos um número reduzido de problemas de optimização neste manual.

Este apenas apresenta um problema de optimização, que vem no final do capítulo dedicado às funções, como uma actividade para trabalho de grupo com relatório.

Autor: M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito

Título: *Matemática 10, 10º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1994, Porto Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Superior de Educação de Coimbra

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em dois volumes, contendo cada um dos volumes três capítulos. O segundo volume, onde encontramos os problemas de optimização, é composto por 272 páginas repartidas pelos seguintes capítulos: Geometria analítica I (Introdução ao método cartesiano), Funções I (Generalidades, função quadrática e função módulo) e Geometria analítica II (Vectores, rectas e paralelismo).

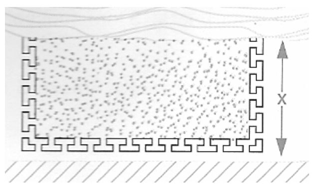
Os problemas de optimização constam no segundo capítulo deste volume, dedicado às funções. Cada capítulo está dividido em vários sub-capítulos, contendo no final, um conjunto de problemas resolvidos e um conjunto de problemas propostos. No final do capítulo é listado mais um conjunto de exercícios de revisão e actividades e no fim de cada volume as autoras apontam as soluções e um formulário. Cada tema vem acompanhado por um conjunto de exercícios resolvidos tendo nas margens exercícios de aplicação relacionados com o tema que se está a abordar.

Como no 10º ano ainda fora abordado o cálculo de máximos e mínimos, utilizando as derivadas, o manual expõe apenas dois problemas de optimização nos exercícios finais do capítulo das funções.

Observemos agora os problemas de optimização que encontramos nos manuais do 10º ano, desta reforma:

Problemas de Medida em Contexto Real

LG10.1. *Com 100 m de rede temos de vedar 3 lados de um terreno rectangular à beira de um rio.*



Exprime a área do terreno em função do lado x.

Estuda o domínio da função; esboça o gráfico.

Faz um estudo da função relativamente a zeros, monotonia, extremos, injectividade.

Conclui qual a área máxima que se pode vedar com os 100 m de rede.

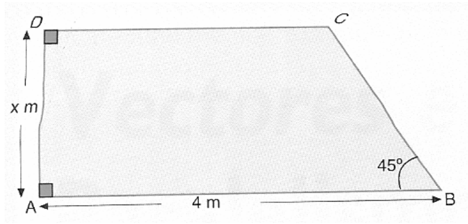
Ilustra o relatório desenhos à escala de vários rectângulos possíveis. (Lima e Gomes 10º, 1994, p. 259)

***NB10.1** A figura representa um jardim com a forma de um trapézio rectângulo.*

a. Escreva $\overline{DC}$ em função de x.

b. Mostre que a área do trapézio em função de x é dada pela fórmula:

$$A = 4x - \frac{x^2}{2}$$



c. Calcule a altura x do trapézio de modo que a área seja inferior a 6 m².

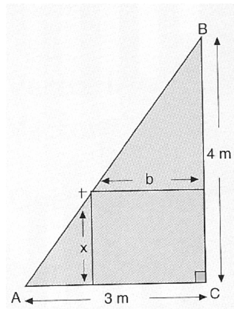
d. Determine a área máxima do trapézio. (Neves e Brito 10º, Vol. 2, 1994, p. 167)

***NB10.2.** Pretende-se construir uma estante para colocar numa parede triangular de umas águas-furtadas, como se indica na figura.*

a. Escreve b em função de x.

b. Mostre que a área da estante pode ser dada pela fórmula:

$$A = 3x - \frac{3}{4}x^2$$



c. Para que valores de x é máxima a área? (Neves e Brito 10º, 1994, p. 167)

Manuais do 11º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: *Xeqmat, 11º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1994, Editorial O Livro: Lisboa

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Superior de Educação de Coimbra

Caracterização e estrutura da obra: Este manual é constituído por um só volume composto por 368 páginas, repartidas por seis unidades, sendo a última dedicada aos limites e derivadas. É nesta unidade que identificámos os problemas de optimização. Veja-se como está constituída esta unidade:

- *Limite de uma função real de variável real*
- *Continuidade num ponto e num intervalo*
- *Derivada de uma função num ponto como limite da taxa de variação média: Interpretação geométrica, derivadas laterais, função derivada, teorema relativo à derivabilidade e continuidade (com demonstração), derivada da soma e do*

produto (com demonstração), do quociente e da potência de expoente racional (sem demonstração), segunda derivada, aplicação da 1ª e da 2ª derivadas ao estudo de gráficos, de máximos e mínimos relativos, de concavidades.

- *Assimptotas verticais e não verticais*

Na parte desta unidade dedicada à derivada de uma função são expostos os objectivos seguintes:

- *Encontrar, em situações problemáticas concretas, funções que permitam resolvê-las.*
- *Resolver problemas de "máximos e mínimos".*

Confirmámos então, que apesar de no desenvolvimento do tema não serem referidos os problemas de optimização, estes vêem-se, implicitamente, nos objectivos.

Achámos nesta parte quatro exemplos de problemas de optimização com a respectiva resolução. Nas margens do manual, ao longo da apresentação destes problemas, estão nove exercícios que são também problemas de optimização e, no final da unidade, os autores apresentam um conjunto de quarenta e quatro exercícios e actividades dos quais oito são problemas de optimização.

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo

Título: *Infinito 11, 11º Ano Volume 2*

Ano, editora e lugar de edição: 1994, Areal Editores: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Esta obra está dividida em dois volumes. O primeiro, com 170 páginas, é contempla o estudo das probabilidades I, funções II e trigonometria e o segundo, com 200 páginas, é dedicado à geometria analítica III, sucessões V e Funções III: Limites e derivadas.

É no sexto capítulo, que trata dos limites e derivadas das funções, que encontrámos os problemas de optimização.

Apreciemos qual a estrutura deste capítulo:

VI. Funções III: Limites e derivadas

1. *Limite de uma função real de variável real*
2. *Continuidade*
3. *Derivadas: Derivada de uma função num ponto, interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto, interpretação cinemática da derivada de uma função num ponto: velocidade, derivadas infinitas, derivabilidade e continuidade*
    3.1. *Função derivada: Função derivada de algumas funções*

3.2. Regras de derivação: Derivada da soma, derivada do produto, derivada de um quociente, derivada da potência de expoente natural, derivada de ordem superior

3.3. Aplicações da derivada

- *Sinal da derivada e sentido de variação*
- *Extremos relativos de uma função*
- ***Problemas de máximos e mínimos***

  Problemas de optimização
- *Estudo analítico de funções*

Aplicando

Soluções

Neste manual, vemos os problemas de optimização na parte "*Aplicações da derivada: problemas de máximos e mínimos. Problemas de optimização*". Encontramos também alguns problemas de optimização na parte "Aplicando" dedicada apenas aos exercícios.

Na parte destinada aos problemas de máximos e mínimos as autoras referem as etapas a seguir na resolução dos problemas:

- *Definir uma função que sirva de modelo matemático À situação a estudar (se possível com uma só variável)*
- *Estudar a variação dessa função determinando, em particular, os seus extremos*
- *Confrontar os resultados teóricos com o fenómeno real e com a situação concreta do problema.*

Logo a seguir são expõem cinco problemas resolvidos, dos quais quatro são problemas de optimização.

No final deste capítulo as autoras apresentam 67 exercícios seguidos da respectiva solução. Nestes exercícios há seis problemas de optimização enunciados como tal.

Autor: M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito

Título: *Matemática 11, º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1994, Porto Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Superior de Educação de Coimbra.

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em dois volumes, contendo cada um dos manuais três capítulos. O segundo manual contém 271 páginas e aborda os seguintes temas:

4. Geometria analítica III: Produto escalar. Perpendicularidade no plano

5. Sucessões

6. Funções III: Limites. Derivadas.

É no sexto ponto, consagrado aos limites, continuidade e derivadas que encontramos os problemas de optimização. Reparemos como está estruturado este capítulo:

1. Limites de funções

2. Limites e infinitos

3. Continuidade de uma função

4. Derivada de uma função

5. Função derivada. Regras de derivação

6. Aplicações das derivadas

6.1. Sentido de variação de uma função

6.2. Extremos relativos de uma função

6.3. Sentido da concavidade do gráfico de uma função

6.4. Representação gráfica de funções

6.5. Problemas de optimização.

Revisões e actividades

Soluções

Funções – Um pouco de história

Do exposto, deduz-se que os problemas de optimização surgem no último ponto a abordar dentro das aplicações das derivadas. As autoras começam por explicar que o estudo das derivadas permite determinar com rigor os máximos e mínimos de funções e que na vida real é importante determinar o custo mínimo, volume máximo, área máxima, etc. Posteriormente são indicados três exemplos de problemas de optimização, acompanhados nas margens de dois exercícios de aplicação. No final do ponto relativo às aplicações das derivadas existem doze problemas propostos, dos quais três são problemas de optimização. No final do capítulo as autoras mostram oito exercícios de cálculo e doze problemas e aplicações, sendo três desses problemas e aplicações problemas de optimização.

Examinemos agora quais os problemas de optimização encontrados nos manuais do 11º ano, desta reforma.

Problemas de Geometria Métrica

LG11.5. *De todos os triângulos rectângulos cujos catetos somam 50 cm, determina o que tem área máxima. (Lima e Gomes 11°, 1994, p. 317)*

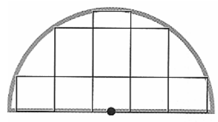
LG11.6. *De entre os rectângulos com 60 dm² de área, descobre as dimensões do que tem perímetro mínimo. (Lima e Gomes 11°, 1994, p. 317)*

LG11.7 *De entre os rectângulos com 80 m de perímetro, determina as dimensões do que têm área máxima. (Lima e Gomes 11°, 1994, p. 317)*

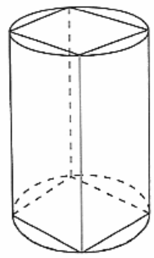
LG11.10. *Considera os vários paralelepípedos de base quadrada cujas dimensões somam 1 metro.*

Calcula a altura do que em maior volume. (Lima e Gomes 11°, 1994, p. 320)

LG11.11. *Dos rectângulos inscritos num semicírculo de raio 10 cm, determina a base do que tem maior área. (Lima e Gomes 11°, 1994, p. 320)*



LG11.13. *Um prisma quadrangular regular está inscrito num cilindro. A secção desse cilindro por um plano contendo o eixo tem 30 cm de perímetro.*



a. Exprime o volume do prisma em função do diâmetro x do cilindro.

b. Determina o domínio da função e o valor de x que torna o volume máximo. (Lima e Gomes 11°, 1994, p. 321)

LG11.14. *Determina as dimensões do rectângulo.*

a. *Com 100 cm² de área e cujo perímetro é o menor possível.*

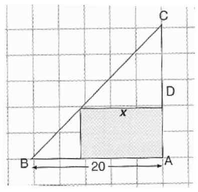
b. *De maior área que se pode contornar com 1200 m de rede. (Lima e Gomes 11°, 1994, p. 334)*

LG11.16. *Um trapézio tem três lados com 8 cm cada um.*

Determina o comprimento do 4° lado de forma que a área seja máxima.

Sugestão: Exprima a área em função de metade da diferença das bases. (Lima e Gomes 11°, 1994, p. 334)

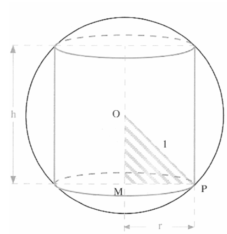
LG11.18. *Na figura o rectângulo em cor está inscrito no triângulo rectângulo isósceles cujos catetos medem 20 cm.*
Determina as dimensões do rectângulo de área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)



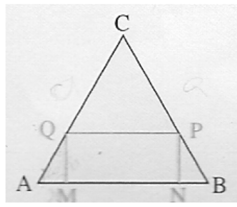
JAFB11.4. O maior cilindro inscrito numa esfera

Consideremos uma esfera de raio 1 dm e um cilindro de altura h e raio da base r inscrito na esfera (as suas duas bases são círculos da esfera).

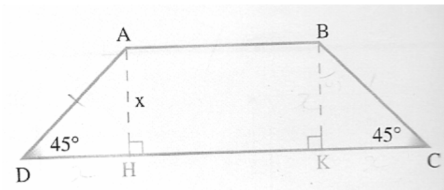
Qual o valor de h para o qual o volume do cilindro é máximo? E qual é o valor desse volume? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p.343)



JAFB11.8. *Considere o triângulo equilátero [ABC] de lado a.*
Inscreve-se neste triângulo um rectângulo [MNPQ].
Faça-se $\overline{AM} = x$
Para que valor de x a área do rectângulo é máxima? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 367)



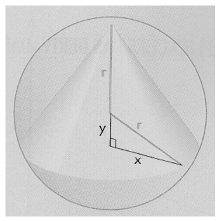
JAFB11.10. *[ABCD] é um trapézio isósceles de área* $5\sqrt{2}$ *cm²*
Os ângulos agudos medem 45º.
Seja x (em cm) a altura do trapézio e P(x) o seu perímetro (em cm).

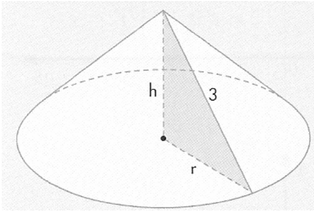


a. *Exprima* $\overline{DH}$ *e* $\overline{CK}$ *em função de x.*
b. *Exprima* $\overline{AD}$ *e* $\overline{BC}$ *em função de x.*
c. *Utilize a área do trapézio para exprimir* $\overline{AB}$ *em função de x.*
d. *Mostre que* $P(x) = 2\sqrt{2}x + \frac{10\sqrt{2}}{x}$
e. *Encontre o valor de x para o qual o perímetro do trapézio é mínimo.*

Qual é então a medida dos lados do trapézio? Interprete graficamente. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p.368)

NB11.3. *Determine o volume máximo de um cone inscrito numa esfera de raio 3 cm. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 225)*





NB11.8. *Como gerar um cone*

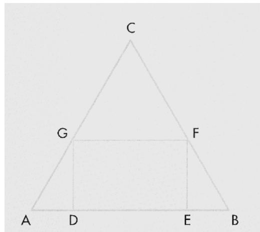
Um triângulo rectângulo de hipotenusa 3 cm é rodado em torno de h para gerar um cone de revolução de raio r.

Determine o raio, a altura e o volume do cone gerado deste modo e que tenha volume máximo. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 228)

NB11.11. *O triângulo [ABC] é equilátero de lado 10 cm.*

Construiu-se um rectângulo [DEFG] como se indica na figura.

Determine as dimensões do rectângulo de modo que este tenha área máxima. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 235)



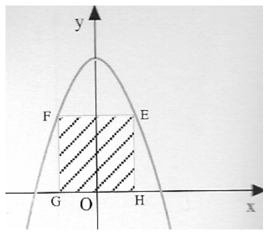
Problemas de Geometria Analítica

LG11.17. *São dados, num referencial o.n. os pontos A (0, 1), B (6, 1) e P (x, 0). Determina x de forma que* $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ *seja mínima. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)*

JAFB11.12. *Considere a parábola definida por*

$$y = -x^2 + 9$$

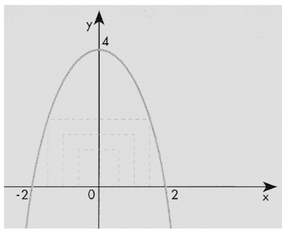
Supondo que a unidade adoptada é o cm, determine as dimensões do rectângulo [EFGH] de área máxima sabendo que E e F são pontos da parábola e G e H são pontos do eixo das abcissas. (Prova de exame E. S. Filipa de Vilhena, 1993) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 374)



NB11.9. *Um rectângulo tem base no eixo dos xx e os outros dois vértices pertencem à parábola de equação*

$$y = 4 - x^2$$

Qual a área máxima que o rectângulo pode ter? (Neves e Brito 11º, 1994, p. 235)



Problemas de Aritmética

LG11.8. *Calcula os números:*

a. *Cuja soma é 30 e cujo produto é máximo.*

b. *Cuja diferença é 20 e cujo produto é máximo. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 317)*

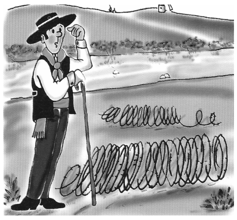
NB11.7. *A soma é 20*

A soma de dois números positivos é 20. Determine os números sabendo que:

a. *O seu produto é máximo*

b. *A soma dos seus quadrados é mínima. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 228)*

Problemas de Medida em Contexto Real

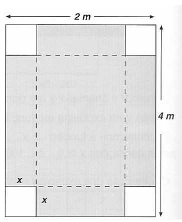


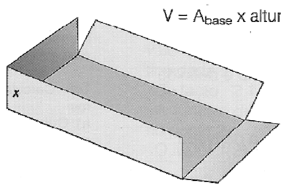
LG11.1. *A horta à beira rio*

O Sr. Joaquim pediu-nos ajuda:

"Tem 100 metros de rede para vedar um terreno rectangular à beira rio. Só quer vedar 3 lados que não dão para o rio. Mas quer que a área da horta fica a maior possível…" (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 317)

LG11.2. *Um pequeno contentor*

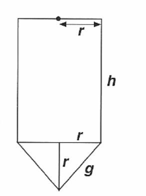




Suprimindo um quadrado em cada canto de uma chapa metálica rectangular, de 2 metros por 4 metros, vai construir-se um contentor (sem tampa).

Determinar o lado do quadrado a suprimir de modo que o volume do contentor seja o maior possível. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 318)

LG11.3. *Silos para cimento*

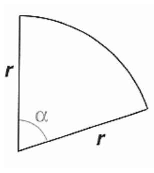


Silos para conter cimento têm a forma de um cilindro de altura h e raio r sobreposto a um cone de altura e raio iguais a r.

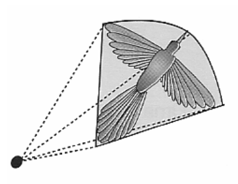
Para silos com volume total de 100 m^3 determinar r de modo que a área lateral seja o menor possível para minimizar o custo do silo. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 319)

LG11.9. *De um cartão quadrado com 1m^2 de área, tira-se um quadrado a cada canto para fazer um caixote (sem tampa).*

Determina qual deve ser o lado desses quadrados para que o volume do caixote seja o maior possível. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 318)



LG11.12. *Uma fábrica de jogos produz "papagaios" de tecido muito fino esticado numa armação de alumínio com a forma de um sector circular tendo 2 metros de perímetro total.*

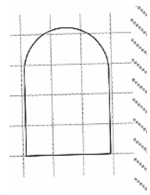


Determina, em radianos, o ângulo alfa do sector para que a resistência ao vento seja máxima (área máxima). (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 320)

LG11.15. *Um arame com 24 cm vai ser cortado em duas partes, uma para formar um quadrado e outra para definir um círculo.*
Em que ponto deve ser cortado o arame para que a soma das áreas do quadrado e do círculo seja mínima? (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)

LG11.19. *Uma janela com a forma de um rectângulo com um semicírculo em cima, tem de ter 4 metros de perímetro.*

Determina as dimensões da janela que correspondem a um vão máximo (área máxima). (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)

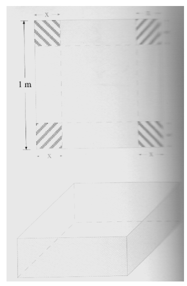


JAFB11.1. Economia no fabrico

Considere-se uma placa de cartão de forma quadrada com 1m de lado.

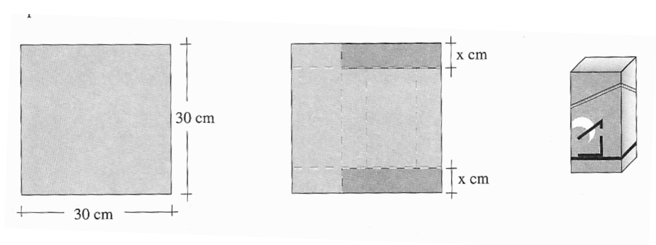
Corta-se em cada canto um quadrado de lado x, com o fim de fazer uma caixa paralelipipédica sem tampa.

Qual o valor de x que torna o volume da caixa máximo? E qual é, então, esse volume? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p.340)



JAFB11.2. Economia no fabrico

Uma empresa fabrica caixas em cartão cortando duas faixas da mesma largura numa folha quadrada.



A medida do lado da folha é 30 cm e designa-se por x a medida, em centímetros, da largura da faixa que se retira.

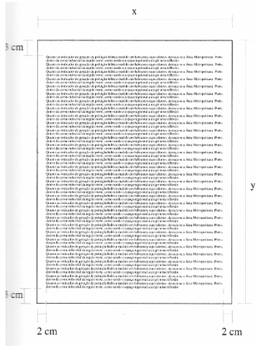
Determinemos o valor de x que torna o volume da caixa máximo e, seguidamente, calculemos esse volume. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 340)

JAFB11.3. Economia no fabrico

Um editor pretende conhecer as dimensões x e y (em centímetros) das folhas de um livro que pensa publicar, de modo a garantir que o consumo de papel seja mínimo e que sejam respeitadas as seguintes condições:

- Cada página deverá ter margens laterais de 2 cm e margens de topo e de fundo de 3 cm.

- A área disponível para impressão deve ser, em casa página, 600 cm^2. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11° V2, p. 341)

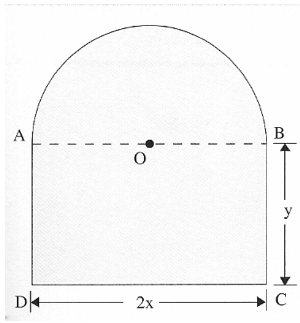


JAFB11.7. *Uma janela é formada por um rectângulo [ABCD] e por u m semicírculo de diâmetro [AB].*

Seja x o raio do semicírculo e y a distância $\overline{BC}$ expressa em metros.

O perímetro da janela é igual a 5 metros.

Pretende-se encontrar as dimensões da janela a fim de que a abertura tenha uma área máxima.



a. Exprima o perímetro da janela em função de x e de y.

b. Retire da expressão o valor de y em função de x.

c. Para que valores de x se tem y > 0?

d. Exprima a área da janela em função de x e de y.

e. Utilizando os resultados das questões anteriores, mostre que a área se pode escrever na forma

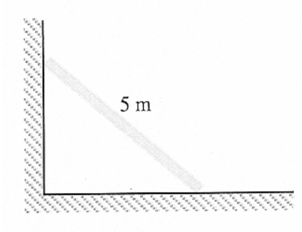
$$A(x) = 5x - \frac{4+\pi}{2}x^2$$

f. Deduza para que valores de x e de y a área da janela é máxima.

Encontre o valor exacto dessa área e em seguida o valor aproximado a menos de 10^{-2} (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11° V2, p. 367)

JAFB11.9. *Que dimensões, com aproximação a 0,1 mm, deve ter uma caixa de conservas cilíndrica, com a capacidade de 1l, para que no seu fabrico se gaste o mínimo de material? (A espessura do material de que é feita não é de considerar).*

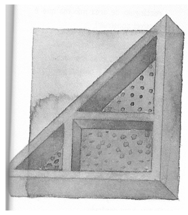
Compare a altura com o diâmetro da caixa. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11° V2, p. 368)



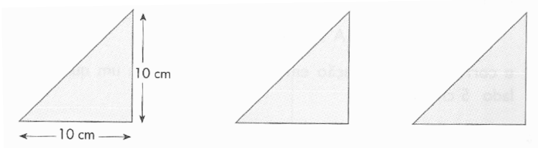
JAFB11.11. *Num canto de um terreno murado pretende-se delimitar com uma trave de madeira a maior área de terreno possível.*

Sabendo que a trave mede 5 metros, em que posição deverá ser colocada? (Prova de exame E. S. Filipa de Vilhena, 1993) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 373)

NB11.1. *O canteiro num jardim*



Num jardim com a forma de um triângulo isósceles queremos desenhar um canteiro como se indica na figura: um dos vértices do rectângulo pertence à hipotenusa e os outros aos catetos.

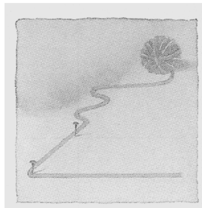


Um destes rectângulos terá área máxima. Qual deles é? (Neves e Brito 11º, 1994, p. 221)

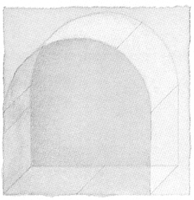
NB11.2. *O cilindro de latão*

Uma empresa fabrica cilindros em latão com 1m³ de volume.

Estudar as dimensões do cilindro de modo a gastar o mínimo latão possível na sua construção. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 222)



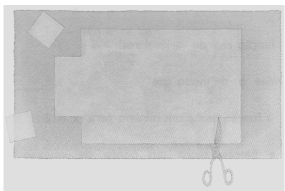
NB11.4. *Com um fio de 150 cm de comprimento, quais são as dimensões do rectângulo de área máxima que é possível construir? (Neves e Brito 11º, 1994, p. 222)*



NB11.5. *Com 714 m de rede pretende-se vedar um terreno, com a forma indicada em cima, constituído por um rectângulo [ABCD] e um semicírculo de diâmetro [DC].*

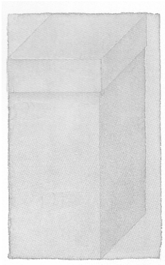
Determine as dimensões do rectângulo de modo a que a área seja máxima. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 223)

NB11.6. *A construção da caixa*



Para construir uma caixa vão ser cortados quatro cantos quadrados iguais a um quadrado de 12 cm de lado. Determine o lado de cada quadrado de modo que o volume da caixa obtida seja máxima. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 227)

__NB11.10.__ Uma caixa com a forma de um paralelepípedo de base quadrada de lado x cm, tem uma área total de 150 cm^2.



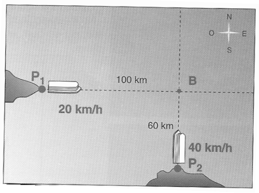
a. Mostre que o volume do paralelepípedo é dado pela fórmula:

$$V = \frac{75x - x^3}{2}$$

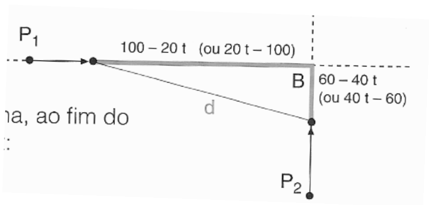
b. Determine as dimensões da caixa de modo que ela tenha volume máximo. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 235)

Problemas de Física

__LG11.4.__ Os "ferry-boats"



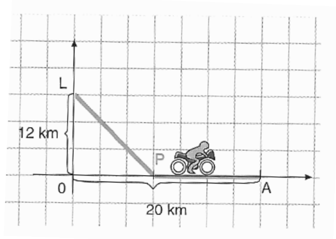
Todas as manhãs, à mesma hora, sai um barco do ponto P_1 para leste, a 20 km/h e outro do ponto P_2 para norte, a 40 km/h.



A bóia B, no cruzamento das rotas, dista 100 km de P_1 2 60 km de P_2.

Determina ao fim de quanto tempo a distância entre os barcos é mínima. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 321)

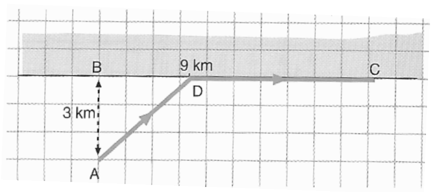
__LG11.20.__ Um ciclista está na localidade L a 12 km do ponto O mais próximo de uma estrada, rectilínea e alcatroada, e pretende ir à aldeia A que dista 20 km de O sobre essa estrada.



O ciclista desloca-se a 10 km/h na estrada alcatroada e a 8 km/h fora da estrada.

Determina o ponto P em que deve atingir a estrada alcatroada para fazer o percurso no menor tempo possível. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)

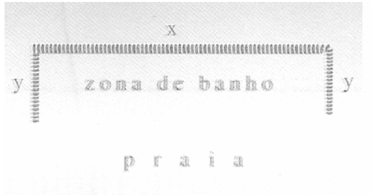
__LG11.21.__ Uma pessoa está num barco A a 3 km do ponto B da praia, mais próximo de A, e tem de ir ao outro ponto C da praia a 9 km de B.



Se o barco se desloca à velocidade de 6 km/h e o tripulante pode correr à velocidade de 10 km/h como deve este proceder para chegar a C no mais curto tempo possível? (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)

Problemas de Economia

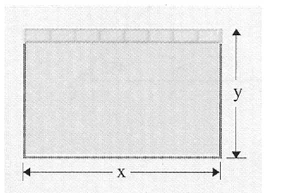
JAFB11.5. *Pretende-se vedar com uma fita de flutuadores uma zona rectangular com 200 m² de área, para o banho das crianças, como mostra a figura.*



Se cada metro de fita de flutuadores custar 2 000 $00, qual deverá ser o valor de x e de y para que o gasto na compra seja mínimo? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 367)

JAFB11.6. *Um agricultor dispõe de 20 000$00 para vedar parte de um terreno rectangular.*

A vedação deve ser feita do seguinte modo: um dos lados de tijolo e rede nos três lados restantes, conforme ilustra a figura.



Cada metro de rede custa 200$00 e cada metro de parede em tijolo fica por 600$00.

Qual é a área máxima que se consegue vedar? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 367)

Manuais do 12º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: *Xeqmat, 12º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1994, Editorial O Livro: Lisboa

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual é composto por um só volume, com 408 páginas, repartidas por seis unidades obrigatórias e pelas quatro unidades opcionais. A unidade 4 é dedicada às funções trigonométricas em IR e a 5 às funções exponencial e logarítmica. A parte relativa às funções trigonométricas inclui a derivada e também os problemas de optimização, mas a parte dedicada à função exponencial e logarítmica não inclui a derivada e, consequentemente, não inclui problemas de optimização. Observemos a estrutura que apresenta a unidade 4:

Unidade 4: Funções trigonométricas em IR

- *Seno, co-seno e tangente como funções reais de variável real*
- *Fórmulas trigonométricas. Equações*

- *Derivadas das funções trigonométricas*
  - *Limite de* $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *quando* $x \to 0$
  - *Derivada do seno*
  - *Derivada do co-seno e da tangente*
  - *Derivada de uma função composta*
- *Estudo analítico e gráficos de funções trigonométricas. Áreas sob gráficos.*
  - *Estudo analítico da função* $x \mapsto \operatorname{sen} x$
  - *Estudo analítico da função* $x \mapsto \cos x$
  - *Estudo analítico da função* $x \mapsto \operatorname{tg} x$
  - ***Estudo de outras funções trigonométricas. Problemas***
  - *Exercícios e actividades*
  - *Breve nota histórica*
  - *Soluções*

Resulta que existem alguns problemas de optimização na unidade 4, após a abordagem das derivadas das funções trigonométricas, mais especificamente, no ponto "Estudo de outras funções trigonométricas. Problemas". Nesta parte existem seis exemplos, mas nenhum destes é um problema de optimização. Nas margens desta parte, tal como ao longo do manual, são expostos alguns exercícios, sendo um deles um problema de optimização.

No final da unidade surgem mais 16 exercícios/actividades mas apenas um dos exercícios é um problema de optimização.

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo

Título: *Infinito 12, 12º Ano Volume 2*

Ano, editora e lugar de edição: 1995, Areal Editores: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em dois volumes, o primeiro tem 183 páginas repartidas por três capítulos:

- I – Análise combinatória e probabilidades
- II – Geometria analítica IV
- III – Funções IV, Áreas

O segundo volume tem 205 páginas repartidas por quatro capítulos:

- IV – Funções V: Funções trigonométricas em IR
- V – Função exponencial e logarítmica
- VI – Noções de grupo e de corpo
- VII – Corpo dos números complexos (capítulo de opção)

Encontramos os problemas de optimização no primeiro capítulo do segundo volume, dedicado às funções trigonométricas.

O capítulo dedicado às funções trigonométricas apresenta a estrutura seguinte:

IV: Funções V – Funções trigonométricas em IR

1. *Fórmulas da diferença, da soma e da duplicação*
2. *Seno, co-seno e tangente como funções reais de variável real*
   - *Estudo do* $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
   - *Derivabilidade das funções seno, co-seno e tangente*
   - *Derivada da função composta*
   - *Estudo da representação gráfica das funções seno, co-seno e tangente, recorrendo às respectivas derivadas*
   - *Estudo comparativo de funções*
   - ***Resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas***
     Um problema de optimização
3. *Primitivas do seno e do co-seno*

Aplicando

Este manual refere a abordagem dos problemas de optimização na parte em que se trata das funções trigonométricas. Há neste manual apenas três problemas de optimização. O primeiro referido como problema de optimização na parte final, dedicada à resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas. Os outros dois na parte dedicada aos exercícios. Nesta encontramos trinta e seis exercícios dos quais dois são problemas de optimização, fazendo o último, parte das questões saídas em provas de aferição.

Autor: M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito

Título: *Matemática 12, 12º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1995, Porto Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em dois volumes, sendo o segundo volume constituído por 218 páginas, repartidas por três capítulos:

- Funções V – Funções trigonométricas em IR
- Funções VI – Funções exponenciais e logarítmicas
- VI – Noções de grupo e corpo.

O capítulo quatro, dirigido às funções trigonométricas, apresenta uma parte relativa à derivada, mas não indica nenhum problema de optimização.

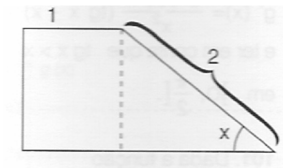
O capítulo cinco, dedicado às funções exponenciais e logarítmicas, também apresenta uma parte com a derivada mas não mostra nenhum problema de optimização.

Tal como é referido no índice do manual, no desenvolvimento do capítulo apenas aparece um problema de optimização. Na parte destinada aos exercícios de aplicação "*Aplicando*" inclui mais trinta e seis exercícios sendo apenas dois problemas de optimização.

Examinemos então os problemas de optimização que Identificámos nos manuais do 12º ano.

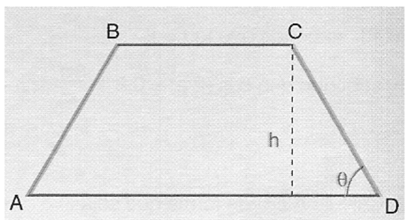
Problemas de Geometria Métrica

LG12.1.



a. *Exprime a área deste trapézio* $\left(\frac{B+b}{2}.h\right)$ *em função de x.*
b. *Determina a área máxima*
c. *Qual a taxa de variação instantânea da área quando x = 1 radiano? (Lima e Gomes 12º, 1994, p. 204)*

LG12.2. *A pedido de um cliente, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima, com a forma de um trapézio, em que* $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=2\,dm$.



Designando por θ *a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC.*

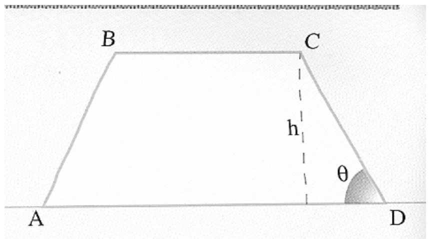
a. *Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior em função de* θ*.*
b. *Prove que a área A(*θ*) do trapézio é dada, em dm*^{2}*, por*

$$A(\theta)=4.sen\theta+2sen(2\theta)$$

c. *Determina o valor de* θ *para o qual a área do trapézio é máxima e calcula essa área.*
d. *Calcule* $\lim_{\theta\to 0}\frac{A(\theta)}{\theta}$

Aferição 94 Ep. Normal (Lima e Gomes 12º, 1994, p. 210)

JAFB12.3. *A pedido de um dos clientes, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima, com a forma de um trapézio, em que* $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2dm$.



Designando por θ *a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC:*

a. *Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior em função de* θ

b. *Prove que a área* $A(\theta)$ *do trapézio é dada, em* dm^2*, por*

$$A(\theta) = 4sen\theta + 2sen2\theta$$

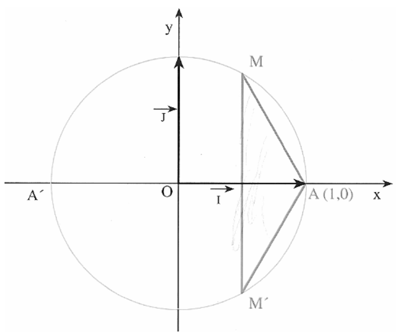
c. *Determine o valor de* θ *para o qual a área do trapézio é máxima e calcule essa área;*

d. *Calcule* $\lim_{\theta \to 0} \frac{A(\theta)}{\theta}$.

(Prova de Aferição, Época normal, 1994) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 60)

Problemas de Geometria Analítica

JAFB12.1. *Seja* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *um referencial o.n.*



Seja C o círculo de centro O e de raio 1, A, o ponto de coordenadas (1, 0) e A', o ponto de coordenadas (-1, 0). Seja M um ponto de C distinto de A e de A', de ordenada positiva e M' o seu simétrico em relação a AO.

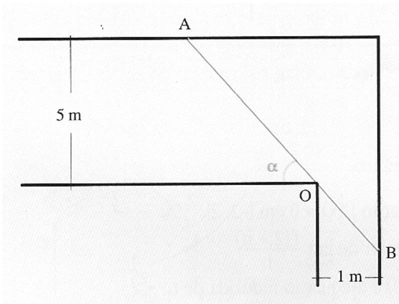
Pretende-se determinar a posição do ponto M, de modo que a área do triângulo [AMM'] seja máxima e conhecer a natureza do triângulo. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 48)

Problemas de Medida em Contexto Real

JAFB12.2. *Na figura está representado um corredor de um museu.*

Considere a recta que passa por O, sendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ *e que encontra as paredes em A e B.*

1. *Exprima* $\overline{OA}$ *em função de* α.
2. *Exprima* $\overline{OB}$ *em função de* α.
3. *a. Faça* $\overline{AB} = f(\alpha)$ *e mostre que* $f(\alpha) = \frac{5}{sen\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}$



b. Determine a função derivada de f em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *e deduza recorrendo à calculadora um valor aproximado* α_0 *de* α *para o qual f admite extremo.*

c. Calcule o valor de $\overline{AB}$ *para* $\alpha = \alpha_0$.

d. Pretende-se transportar naquele corredor um painel, em posição vertical. Quais as consequências práticas que se podem tirar do estudo feito nas alíneas anteriores? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 55)

C. Análise do período

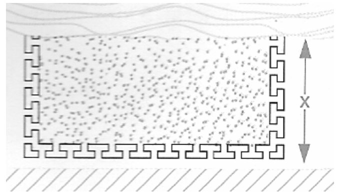
O primeiro aspecto a salientar neste período é o facto de detectarmos os problemas de optimização, não apenas num ano lectivo específico, mas sim nos três anos do Ensino Secundário.

Quando fizemos a análise dos programas concluimos que no 10º ano o programa não contempla o estudo da derivada. Então, como podemos justificar o facto de encontrar problemas de optimização neste ano?

Ora, dado que o programa contempla o estudo de funções, e em particular o estudo da função quadrática, tornou-se possível inserir os problemas de optimização como exercícios de aplicação da função quadrática, ou seja, antes do estudo da derivada.

Um outro ponto importante que surge com esta reforma é o facto de se começar a utilizar as calculadoras gráficas. Estas não são de uso obrigatório, apenas são de uso obrigatório as calculadoras científicas, no entanto, os professores, já as podem utilizar como material de apoio, na sala de aula. Alguns manuais mostram gráficos elaborados com a calculadora gráfica.

Apesar de a abordagem dos problemas de optimização ser feita nos três anos do Ensino Secundário, o número de problemas assinalados para este período não aumentou relativamente ao período anterior, pelo contrário, há menos um problema. A grande maioria dos problemas de optimização faz parte dos manuais do 11º ano (quarenta e sete). Os manuais do 10º ano apenas têm três problemas e os manuais do 12º ano apenas têm cinco. É ainda de referir que o livro de Lima e Gomes **(LG)**, do 11º ano é o que contém o maior número de problemas de optimização deste período (vinte e três problemas).



Na análise deste período iremos contemplar os três anos em conjunto referindo apenas pontualmente, quando se justificar, algumas características em separado.

Vejamos agora as características dos problemas deste período.

Confirmamos que o número de problemas sob a forma de exercício (quarenta e dois) é significativamente superior aos que surgem sobre a forma de exemplo resolvido (doze). Neste período há pela primeira vez um problema de optimização sob a forma de actividade de grupo, com relatório, e nenhum sob a forma de demonstração. Relativamente ao 10º ano, o livro de Lima e Gomes **(LG)** apenas apresenta um problema de optimização como actividade de grupo/relatório:

> *" **(LG10.1.)** Actividade (Trabalho de grupo com relatório):*
>
> *Com 100 m de rede temos de vedar 3 lados de um terreno rectangular à beira de um rio.*
>
> *Exprime a área do terreno em função do lado* x.
>
> *Estuda o domínio da função; esboça o gráfico.*
>
> *Faz um estudo da função relativamente a zeros, monotonia, extremos, injectividade.*
>
> *Conclui qual a área máxima que se pode vedar com os 100 m de rede.*
>
> *Ilustra o relatório desenhos à escala de vários rectângulos possíveis."*

O livro de Neves e Brito **(NB)**, para o 10º ano, indica dois problemas de optimização sob a forma de exercício, ou seja, sem um exemplo prévio. Nos manuais do 11º ano surgem para todos os autores, primeiramente, três ou quatro exemplos de problemas de optimização e só depois os exercícios. Por fim, nos manuais do 12º ano existe, no manual de Jorge e outros **(JAFB)** um problema sob a forma de exemplo e depois dois como exercício. No livro de Lima e Gomes os dois problemas encontram-se sob a forma de exercício.

Quanto ao contexto dos problemas observamos que os problemas geométricos predominam, sendo que de contexto real de medida detectamos vinte e três problemas e de geometria métrica dezanove. Neste período, pela primeira vez, há mais problemas em contexto real de medida do que de geometria métrica. Os outros contextos surgem em número reduzido: quatro problemas de aritmética (JAFB11.8.a, JAFB11.8.b, NB11.7.a, NB11.7.b), quatro de geometria analítica (JAFB11.12, LG11.17, NB11.9, JAFB12.1), três de física (LG11.4, LG11.20, LG11.21) e dois de Economia (JAFB11.5, JAFB11.6).

Quanto à função a optimizar, uma vez que predominam os problemas geométricos, na maioria dos problemas se pretende optimizar uma área (trinta e um): Área de um rectângulo dado o seu perímetro (LG10.1, LG11.7, LG11.14.b, LG11.1, NB11.4, JAFB11.6); área de um rectângulo inscrito noutra figura (NB10.2, LG11.11, LG11.18, JAFB11.8, NB11.11, NB11.1); área de um rectângulo com dois vértices sobre uma curva dada (JAFB11.12, NB11.9); área de um trapézio dadas as medidas de alguns lados (NB10.1, LG11.16, LG12.1, LG12.2, JAFB12.3); área de um triângulo dadas algumas medidas de lados (LG11.5); área de um sector circular dado o seu perímetro (LG11.12); área de um triângulo inscrito no círculo trigonométrico (JAFB12.1); soma da área de um quadrado com um círculo dada a soma dos seus perímetros (LG11.15); área de uma figura composta por um rectângulo e um semicírculo dado o perímetro (LG11.19, JAFB11.7, NB11.5); área de um rectângulo circunscrito a outro rectângulo dada a área do mais pequeno (JAFB11.3); área de um triângulo rectângulo dada a hipotenusa (JAFB11.11); área lateral de um sólido formado por um cilindro e um cone dado o seu volume (LG11.3); área total de um cilindro dado o seu volume (JAFB11.9, NB11.2). Em onze pretende-se optimizar o volume: Volume de um paralelepípedo, dadas as dimensões da folha para o construir (LG11.2, LG11.9, JAFB11.1, JAFB11.2, NB11.6, NB11.10); volume de um paralelepípedo dada a sua área total (NB11.10); volume de um prisma dado o perímetro de uma secção (LG11.13); volume de um cilindro/cone dado o raio da esfera que o circunscreve (JAFB11.4, NB11.3); volume de um cone dada a medida da geratriz (NB11.8). Os outros tipos aparecem em número reduzido. Em três pretende-se optimizar um perímetro: perímetro de um trapézio dada a sua área (JAFB11.10); perímetro de um rectângulo dada a sua área (LG11.6, LG11.14.a). Em três pretende-se optimizar uma distância: Distância entre dois objectos móveis dada a velocidade de cada um e a distância inicial (LG11.4); soma mínima dos quadrados das distâncias entre dois pontos fixo e um ponto móvel (LG11.17); distância entre dois pontos dado o ângulo que a recta que os une forma com um segmento (JAFB12.2). A optimização do produto entre dois números dada a sua soma ou diferença surge também três vezes (LG11.8.a, LG11.8.b, NB11.7.a); a optimização de tempo que se demora a percorrer uma distância repartida em duas partes em que o objecto se move a velocidades diferentes surge duas vezes

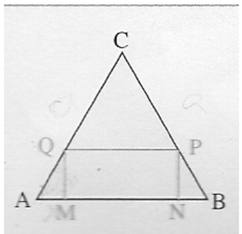
(LG11.20, LG11.21); a optimização de uma soma dos quadrados de dois números dada a sua soma surge apenas uma vez (NB11.7.b) e a optimização do custo de uma vedação dada a área e o custo do lado (JAFB11.5) surge também apenas uma vez.

Nestes problemas, em trinta e um a figura apresenta dados, em onze dos problemas geométricos, não encontramos nenhum tipo de figura (JAFB11.9, LG11.5, LG11.6, LG11.7, LG11.10, LG11.14.a, LG11.14.b, LG11.15, LG11.16, LG11.17, LG11.18, NB11.4) e em apenas nove a figura é simples (JAFB11.8, JAFB11.12, LG11.11, LG11.13, LG11.19, NB11.5, NB11.6, NB11.10, NB11.11). Verificamos que nos manuais do 10º ano e do 12º ano todos os problemas apresentam uma figura com dados; nos manuais do 11º ano verificamos que, a maioria dos problemas do livro de Jorge e outros e do livro de Neves e Brito apresentam uma figura com dados, mas no livro de Lima e Gomes cerca de metade dos problemas não têm qualquer tipo de figura. Examinemos o exemplo de um problema geométrico, que apesar de não ter qualquer figura, contém uma nota que irá auxiliar o aluno na resolução:

*“ **(LG11.16)** Um trapézio tem três lados com 8 cm cada um.*
Determina o comprimento do 4º lado de forma que a área seja máxima.
Sugestão: Exprima a área em função de metade da diferença das bases.”

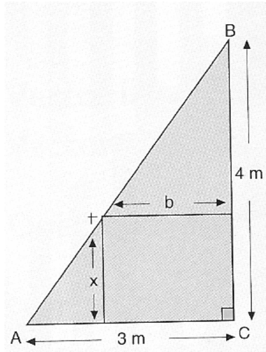
Tal como no período anterior, quase todos os problemas apresentam dados numéricos (cinquenta e três), sendo apenas um o problema com dados genéricos. Vejamos:

*“ **(JAFB11.8)** Considere o triângulo equilátero [ABC] de lado a.*
Inscreve-se neste triângulo um rectângulo [MNPQ].
Faça-se $\overline{AM} = x$
Para que valor de x a área do rectângulo é máxima?”



Em relação ao tipo de enunciado, surgem em número significativo (quarenta e três) os problemas em que o enunciado é simples e apenas doze problemas com a resolução encaminhada. Todos os problemas do 10º ano são de resolução encaminhada e, dos problemas do 12º ano, apenas um não apresenta a resolução encaminhada (JAFB12.1). Quanto aos manuais do 11º ano verificamos que, no manual de Jorge e outros, apenas dois problemas têm resolução encaminhada (JAFB11.7, JAFB11.10); no manual de Lima e Gomes também apenas dois problemas têm resolução encaminhada (LG11.13, LG11.16) e no manual de Neves e Brito apenas um problema tem resolução encaminhada (NB11.10). Indicámos a seguir alguns exemplos de problemas com resolução encaminhada:

*" **(NB10.2)** Pretende-se construir uma estante para colocar numa parede triangular de umas águas-furtadas, como se indica na figura.*



a. Escreve b em função de x.

b. Mostre que a área da estante pode ser dada pela fórmula:

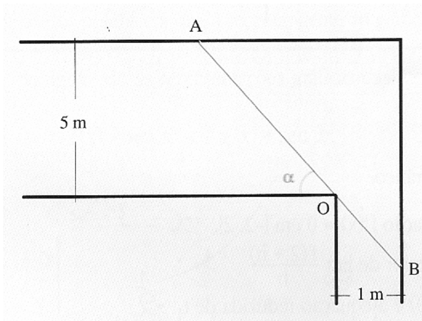
$$A = 3x - \frac{3}{4}x^2$$

c. Para que valores de x é máxima a área?!

*" **(LG11.16)** Um trapézio tem três lados com 8 cm cada um. Determina o comprimento do 4º lado de forma que a área seja máxima. Sugestão: Exprima a área em função de metade da diferença das bases."*

*" **(JAFB12.2)** Na figura está representado um corredor de um museu.*

Considere a recta que passa por O, sendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e que encontra as paredes em A e B.



1. *Exprima $\overline{OA}$ em função de α.*
2. *Exprima $\overline{OB}$ em função de α.*
3. *a. Faça $\overline{AB} = f(\alpha)$ e mostre que $f(\alpha) = \frac{5}{sen\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}$*

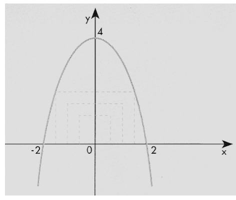
   b. Determine a função derivada de f em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e deduza recorrendo à calculadora um valor aproximado α_0 de α para o qual f admite extremo.

   c. Calcule o valor de $\overline{AB}$ para $\alpha = \alpha_0$.

   d. Pretende-se transportar naquele corredor um painel, em posição vertical. Quais as consequências práticas que se podem tirar do estudo feito nas alíneas anteriores?"

No primeiro exemplo, as duas alíneas que precedem a questão em que se pretende determinar a solução óptima ajudam o aluno a equacionar o problema. No segundo, apesar de não haver questões prévias, surge no final uma sugestão para chegar à função a optimizar em ordem a apenas uma variável. No último, também as questões prévias auxiliam o aluno a chegar à solução. Neste não é pedida explicitamente a solução óptima mas é pedido que se calcule o extremo e posteriormente a interpretação do valor.

A função auxiliar é implícita em trinta e oito dos problemas e apenas em dezassete surge explicitamente. Nos problemas do 10º ano e do 12º ano a função auxiliar é sempre implícita. Quanto aos manuais do 11º ano, no manual de Jorge e outros a função surge explicitamente apenas em três problemas (JAFB11.5, JAFB11.7, JAFB11.9); no manual de Lima e Gomes a função auxiliar surge explicitamente em nove problemas (LG11.3, LG11.6, LG11.7, LG11.8.a, LG11.8.b, LG11.9, LG11.14.a, LG11.14.b, LG11.19) e no manual de Neves e Brito a função auxiliar surge explicitamente em cinco problemas (NB11.2, NB11.5, NB11.7.a, NB11.7.b, NB11.10). A função auxiliar surge explicitamente em problemas geométricos em que, por exemplo, é dado o valor da área, perímetro ou volume de uma figura, ou em problemas aritméticos em que, por exemplo é dado o valor da soma ou produto entre dois números. A função auxiliar surge implicitamente em problemas em que é necessário aplicar o Teorema de Pitágoras, noção de distância, semelhança de figuras, equação da recta, funções trigonométricas, noção de velocidade, ou seja, problemas em que não é imediato, a partir dos dados, a forma de obter uma variável a partir da outra. Apresentamos agora um exemplo de um problema em que a função auxiliar surge implicitamente:



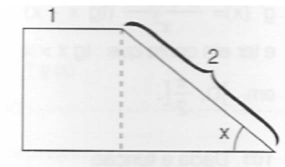
*“ **(NB11.9)** Um rectângulo tem base no eixo dos xx e os outros dois vértices pertencem à parábola de equação $y = 4 - x^2$.*

Qual a área máxima que o rectângulo pode ter?”

Neste, para determinar o valor da largura em função do comprimento do rectângulo, será necessário usar a equação da curva que nos fornece o valor do *y* em função do valor do *x*, ou seja, não é tão imediato como se fosse dado, por exemplo, o valor do perímetro do rectângulo.

Passemos agora às noções aplicadas na resolução dos problemas. Uma vez que predominam os problemas geométricos, também as noções mais aplicadas são as noções geométricas. Vemos que o Teorema de Pitágoras e a fórmula de cálculo do perímetro são as noções mais aplicadas, surgindo a primeira em onze problemas (JAFB11.4, JAFB11.8, JAFB11.10, JAFB11.11, LG11.5, LG11.6, LG11.11, LG11.13, LG11.16, NB11.3, NB11.8). Normalmente esta noção aplica-se em problemas em que temos triângulos rectângulos, ou figuras inscritas e a segunda surge em treze problemas (LG10.1, JAFB11.6, JAFB11.7, LG11.1, LG11.7, LG11.9, LG11.12, LG11.13, LG11.14.b, LG11.15, LG11.19, NB11.4, NB11.5), problemas em que é dado o perímetro de uma figura que nos auxilia a determinar a medida de um lado em função dos outros lados. As outras noções são aplicadas menos vezes, sendo que a fórmula da distância surge em seis problemas (NB10.1, JAFB11.1, JAFB11.2, JAFB11.3, LG11.17, NB11.6); a noção de soma também em seis problemas (LG11.2, LG11.8.a, LG11.8.b, LG11.10, NB11.17.a, NB11.17.b); a semelhança de figuras (NB10.2, JAFB11.8, LG11.18, NB11.1, NB11.11) e as funções trigonométricas (JAFB12.1, JAFB12.2, JAFB12.3, LG12.1, LG12.2) em cinco problemas; a fórmula da área (JAFB11.5, LG11.6, LG11.14.a, NB11.10) e a do volume (JAFB11.9, JAFB11.10, LG11.13, NB11.2) em quatro problemas e a as magnitudes físicas em três problemas (LG11.4, LG11.20, LG11.21). Em todos os problemas dos manuais do 12º ano se aplicam as fórmulas trigonométricas, ou seja, são problemas apenas relativos aos conteúdos leccionados no 12º ano. Eis um exemplo:

LG12.1.



a. *Exprime a área deste trapézio* $\left(\frac{B+b}{2}.h\right)$ *em função de x.*
b. *Determina a área máxima*
c. *Qual a taxa de variação instantânea da área quando x = 1 radiano? (Lima e Gomes 12º, 1994, p. 204)*

Neste problema, é necessário usar as fórmulas trigonométricas para calcular, em função de x, a medida da base maior do trapézio e a medida da altura.

Quanto à estratégia a utilizar na resolução dos problemas, a maioria dos problemas já surgiram nos manuais anteriores (trinta) e cinco são retirados de provas de exame (JAFB11.11, JAFB11.12, LG11.11, JAFB12.3, LG11.12). Assim sendo, apenas vinte problemas são novos neste período.

Relativamente às funções utilizadas, verificamos que em grande parte dos problemas a função utilizada para optimizar é polinomial (trinta e três problemas); as funções racionais surgem em dez problemas (JAFB11.3. JAFB11.5, JAFB11.9, JAFB11.10, LG11.3, LG11.6, LG11.12, LG11.14.a, NB11.2, NB11.10), isto é, em problemas em que se aplica a noção de área ou volume; as funções irracionais surgem em sete problemas (JAFB11.11, LG11.4, LG11.11, LG11.16, LG11.20, LG11.21, NB11.8), ou seja, em problemas em que se aplica o teorema de Pitágoras ou se pretende determinar uma distância e as trigonométricas em apenas cinco problemas (JAFB12.1, JAFB12.2, JAFB12.3, LG12.1, LG12.2), isto é, nos problemas em que se aplicam as fórmulas trigonométricas.

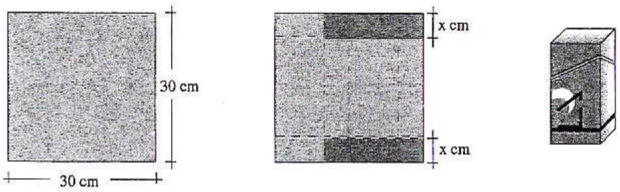
O esquema de cálculo utilizado, nos problemas com resolução, foi sempre o mesmo, cálculo dos zeros da função derivada seguido do estudo do sinal. Os problemas do 10º ano surgem como exercícios não apresentando a respectiva resolução, mas estes encontram-se após o estudo da função quadrática. Observemos a resolução do problema JAFB11.2:

Problema 2

recorde

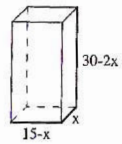
A act. 2 (pág. 51)

Uma empresa fabrica caixas em cartão cortando duas faixas da mesma largura numa folha quadrada.



A medida do lado da folha é 30 cm e designa-se por x a medida, em centímetros, da largura da faixa que se retira.

Determinemos o valor de x que torna o volume da caixa máximo e, seguidamente, calculemos esse volume.



Resolução

Designemos por V a função que nos dá o volume da caixa.

Vem

$V(x) = x(15 - x) \cdot (30 - 2x) =$

$= 2x^3 - 60x^2 + 450x$ e $0 \leq x \leq 15$

visto que as dimensões da caixa são, em centímetros, x, $15 - x$ e $30 - 2x$ e o volume de um paralelipípedo é dado pelo produto da área da base pela altura.

Teremos então que

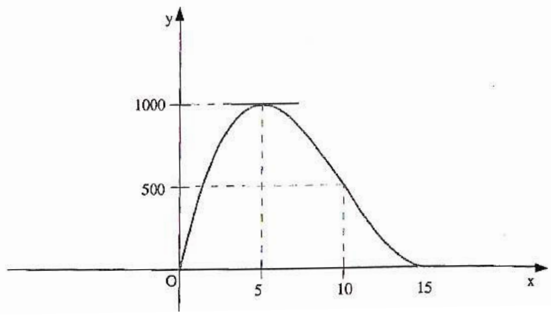
$V'(x) = 6x^2 - 120x + 450$

Os zeros de $V'(x)$ são 5 e 15 e o quadro de variação de V é:

x	0		5		15
V'(x)		+	0	−	
V	0	↗		↘	0

O volume será pois máximo para x = 5, e o valor do volume máximo é 1000 cm³.

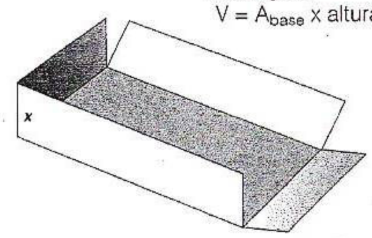
Para confirmarmos os resultados encontrados, representemos graficamente a função $x \mapsto V(x)$ no intervalo [0, 15].



Relativamente ao enunciado, este vem acompanhado de uma sequência de figuras que ilustram a construção da caixa e têm os dados representados. Relativamente à resolução, esta contém uma figura com dados na margem esquerda e a resolução é feita acompanhando os seguintes passos: equação do problema, cálculo da derivada, cálculo dos zeros da derivada e construção do quadro de monotonia e resposta ao problema. A seguir apresenta o gráfico obtido através da calculadora gráfica para confirmar o resultado.

Quanto aos gráficos, figuras ou esquemas auxiliares, todos os problemas que apresentam resolução, contêm o quadro de monotonia e três dos problemas que apresentam resolução possuem o gráfico da função (JAFB11.2, LG11.1, LG11.2). Reparemos no problema LG11.2 que apresenta quadro de monotonia e gráfico:

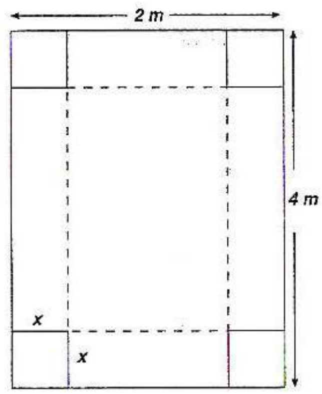
149. De um cartão quadrado com $1m^2$ de área, tira-se uma quadrado a cada canto para fazer um caixote (sem tampa).
Determina qual deve ser o lado desses quadrados para que o volume do caixote seja o maior possível.



Exemplo 2. Um pequeno contentor.

Suprimindo um quadrado em cada canto de uma chapa metálica rectangular, de 2 por 4 metros, vai construir-se um contentor (sem tampa).
Determinar o lado do quadrado a suprimir de modo que o **volume** *do contentor seja o maior possível.*

Resolução:
A – Função a maximizar:
V, volume dum paralelepípedo rectângulo.
$V = A_{base} \times altura$



B – Expressão do volume numa só variável:

Sendo x o lado do quadrado a suprimir, é também x a altura da caixa.
A base da caixa (ver figura) ficará com as dimensões $4 - 2x$ e $2 - 2x$
logo $A_{base} = (4 - 2x) \cdot (2 - 2x)$ e $V = (4 - 2x)(2 - 2x)x$

Obtemos a função $x \to V = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

cujo domínio é dado por $x > 0$ e $2 - 2x > 0$: $D = [0;1]$

C – Derivada e pesquisa de extremos relativos:

$V'(x) = 12x^2 - 24x + 8 = 4(3x^2 - 6x + 2)$

Zeros da derivada : $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3}$

A derivada anula-se para $x = 1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ou seja, $x \approx 0{,}42$ ou $x \approx 1{,}58$

Quadro de sinais da derivada:

x	0		$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
V'		+	0	−	
V		↗		↘	

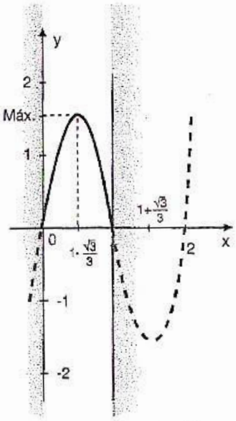
$m = f(0) = 0$ Máx.$= f\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 1{,}5396$ $m = f(1) = 0$

O valor 1,58 está fora do domínio desta função. (Ver gráfico da função à margem).

D – No domínio [0,1] esta função só tem um máximo relativo e absoluto, que é $V\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx V(0{,}42) = 1{,}5396$, em m^3.

O lado do quadrado a suprimir para obter este volume máximo é 0,42 m.

Restrição da função $x \to 4x^3 - 12x^2 + 8x$ ao intervalo [0,1]:



150. Uma pistola dispara uma bala verticalmente de baixo para cima, à velocidade de 98 m\s. Sabendo que a lei do movimento é

$e = -4{,}9t^2 + 98t$ (m;s)

Calcula a altura máxima atingida pela bala.

Na resolução deste problema vê-se que, também apresenta uma sequência de figuras que ilustram a construção do contentor. A resolução está dividida em 4 partes: A, B, C e D. Na primeira parte define-se a função a maximizar, na segunda expressa-se a função em ordem a uma só variável, na terceira calcula-se a derivada e os extremos relativos, construindo o quadro de monotonia e, por fim, apresenta-se a resposta ao problema. Do lado direito da resolução é apresentado o gráfico da função restrito ao domínio desta no contexto do problema.

Confirmamos então que, apesar de existir já um conjunto de meios auxiliares para esboço dos gráficos de funções, na resolução dos problemas de optimização, ainda não se nota um aumento significativo, então a calculadora é utilizada essencialmente para confirmação de resultados obtidos.

Por fim, o valor pedido surge explicitamente em trinta e oito problemas e implicitamente em apenas dezoito problemas. Todos os do 10º ano e os do manual de Lima e Gomes do 12º ano apresentam o valor pedido explicitamente. Os restantes apresentam os dois casos, sendo que, em todos os manuais o número de problemas em que o valor pedido surge explicitamente é sempre superior.

Assim, este período é caracterizado por problemas enunciados sob a forma de exercício, pela primeira vez encontramos mais problemas em contexto real de medida do que de geometria métrica mas, em contrapartida, na maioria dos problemas apenas se pretende optimizar uma área. Existe um elevado número de problemas com uma figura com dados e apenas um problema apresenta dados genéricos. Na maioria dos casos o enunciado é simples e a função surge explicitamente.

Quanto às noções aplicadas na resolução, dividem-se, essencialmente, entre o teorema de Pitágoras e a fórmula do perímetro. A maioria dos problemas já surgiu em manuais anteriores, aparecem essencialmente funções polinomiais e os extremos são calculados apenas através dos zeros e sinal da derivada apresentando estas resoluções o quadro de monotonia.

Os dados obtidos na análise dos problemas de optimização deste período estão sintetizados na tabela a seguir.

3.5. INTRODUÇÃO DO USO DA CALCULADORA GRÁFICA NOS PROGRAMAS OFICIAIS

3.5.1. O REAJUSTAMENTO DE MARÇAL GRILO (1997)

A. Análise do programa oficial

Como durante a aplicação experimental do programa anterior, respeitante à Lei de Bases do Sistema Educativo, surgiram dificuldades de concretização, mesmo contando com cargas horárias excepcionais, a generalização da sua aplicação em todas as escolas multiplicou essas dificuldades. Este facto deu-lhes uma visibilidade nacional que o quadro da experiência, pela sua própria natureza, não podia ter dado. Ao segundo ano da generalização, o volume dos problemas tornou clara a necessidade de proceder a ajustamentos desse programa.

Este ajustamento não veio constituir um novo programa. Procurando preservar os objectivos da renovação do ensino da Matemática este pretendeu estabelecer maior clareza e melhor organização dos conteúdos temáticos; explicitar a articulação entre metodologias, objectivos e conteúdos; reforçar a articulação vertical com o 3º ciclo do ensino básico e harmonizar no tempo, quando possível, algumas articulações interdisciplinares.

Dado que uma das principais dificuldades dos professores nas escolas e um dos maiores problemas residia na extensão do programa, o ajustamento deste teve em conta também a exclusão de itens de conteúdo que a experiência mostrou constituírem sobrecarga e impedimento para que aos alunos fosse dado acesso a temas fundamentais e fundadores. Foi também trocada a ordem em que eram dados alguns dos temas.

Assim, a 19 de Setembro de 1997, sendo a pasta da educação ocupada por Eduardo Carrega Marçal Grilo, foi publicada uma alteração à Lei de Bases do Sistema Educativo de 1986, cujos programas tinham entrado em vigor em 1993.

Com esta reformulação, cada um dos anos lectivos do Ensino Secundário passou a ser composto por três temas. No 10º ano abordava-se a Geometria, Funções e Estatística; no 11º eram estudados a Geometria, Funções e Sucessões e no 12º ano os três temas eram Probabilidades, Funções e Trigonometria e Números Complexos.

Esta modificação dos programas introduziu o uso das calculadoras gráficas no ensino Secundário. Foram inovadoras no estudo da geometria plana, das funções, das sucessões, da estatística e da análise combinatória.

Apesar de as derivadas apenas serem abordadas no 11º ano, também no 10º ano são abordados os problemas de optimização. Neste mesmo ano os problemas de optimização surgem no capítulo dedicado ao estudo de funções, em particular no estudo de funções quadráticas.

Eis então, a estrutura do programa relativo ao 10º ano de escolaridade:

Programas do Ensino secundário de 1997

10º Ano

2. Funções e Gráficos – Generalidades. Funções polinomiais. Função módulo.

- *Gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal*
- *Definição de função, gráfico e representação gráfica de uma função.*
- *Estudo intuitivo de propriedades das:*

  Funções quadráticas; referência à parábola

  Função módulo

  Funções definidas por 2 ou mais ramos

  Funções polinomiais (graus 3 e 4)
- *Equações e inequações do 2º grau; Inequações com módulos*
- *Decomposição de polinómios*

Nas indicações metodológicas deste programa podemos encontrar a seguinte informação:

> *"Para todos os tipos de funções devem ser dados exemplos a partir de questões concretas (tanto de outras áreas da matemática como os constantes em livros de Física, Química, Geografia, Economia, etc., em recortes de jornais). Particular importância deverá ser dada a situações problemáticas,* ***situações de modelação matemática*** *e a exemplos ligados com os trabalhos da Área-Escola e com a Geometria, devendo retomar-se alguns exemplos estudados no tema anterior. Os alunos devem reconhecer que o mesmo tipo de função pode constituir um modelo de diferentes tipos de situações problemáticas.*
>
> *Os alunos devem sempre traçar um número apreciável de funções tanto manualmente em papel quadriculado ou papel milimétrico como usando calculadora gráfica ou computador.*
>
> *No estudo das famílias de funções os alunos podem realizar pequenas investigações."*

Como se vê, há um interesse por parte dos seus autores em relacionar os temas matemáticos, neste caso o estudo de funções, com situações do contexto real, em particular na modelação matemática.

Apesar de a optimização não surgir explicitamente no referido programa, nos manuais relativos a esta reforma abordam este tipo de problemas.

Analisemos, pois o programa de Matemática para o 11º ano:

Programas do Ensino Secundário de 1997

11º Ano

2. Introdução ao Cálculo Diferencial I – Funções Racionais e com Radicais. Taxa de variação/Derivada

- *Estudo das propriedades das Funções racionais do tipo f(x) = a+b/(cx+d); referência à hipérbole.*
- *Aproximação experimental da noção de limite*
- *Operações com funções: soma, diferença, produto, quociente, composição.*
- *Noção de taxa de variação; interpretação geométrica e física.*
- ***Determinação da derivada em casos simples; aplicações***
- *Inversão de funções; funções com radicais quadráticos e cúbicos.*

(Matemática, Programas, 10º, 11º e 12º anos, 1997)

Refere-se no desenvolvimento dos temas, em relação ao nosso tema, o seguinte:
"**Resolução de problemas envolvendo derivadas num contexto de aplicações**."

Assim, apesar de o programa não contemplar o estudo dos problemas de optimização, explicitamente, faz referência a que se abordem aplicações da derivada.

Passemos seguidamente ao programa de Matemática para o 12º ano. Em relação ao Cálculo Diferencial, este ficou estruturado da seguinte forma:

Programas do Ensino Secundário de 1997

12º Ano

2. Introdução ao Cálculo Diferencial II

- *Função exponencial e função logarítmica de bases maiores que 1*
  Regras operatórias de exponenciais e logaritmos. Aplicações concretas.
- *Limite de uma função Heine; propriedades operatórias sobre limites; limites notáveis; indeterminações. Assímptotas.*
- *Continuidade*
  Teorema de Bolzano – Cauchy e aplicações numéricas
- *Funções deriváveis. Regras de derivação e derivadas de funções elementares. Segunda definição de número e segundas derivadas e concavidade*

- *Estudo de funções em casos simples*
- ***Problemas de optimização***

(Matemática, Programas, 10º, 11º e 12º anos, 1997)

Refere-se no desenvolvimento dos temas, em relação ao nosso tema, o seguinte:

> "Os **problemas de optimização** devem ser escolhidos de uma forma a que um aluno trabalhe de uma forma tão completa quanto possível a modelação. É uma boa oportunidade para discutir com os alunos o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual."

Tal como no programa anterior do 12º ano, também neste se contempla o estudo dos problemas de optimização. Notamos ainda que com o estudo destes tem como objectivo que o aluno identifique a importância do Cálculo Diferencial no mundo actual.

Este programa não faz nenhuma referência a manuais para o ensino.

B. Análise dos Manuais Escolares

Manuais do 10º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: *Xeqmat, 10º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1996, Editorial O Livro

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este apresenta uma estrutura semelhante ao manual dos mesmos autores apresentado no período anterior. É composto por 336 páginas repartidas pelas três unidades: Geometria, Funções e Estatística.

Os problemas de optimização surgem na unidade dedicada às funções. Este capítulo está assim estruturado:

- Funções e gráficos
- Função quadrática
- Função módulo
- Polinómios. Funções polinomiais
- Métodos Gráficos
- Nota histórica
- Soluções

Ao longo do capítulo, vão surgindo, nas margens, exercícios de aplicação e no final de cada sub-capítulo os autores apresentam um conjunto de exercícios de revisão.

Apesar de no respectivo ano lectivo, ainda não ter sido abordado o Cálculo Diferencial, é possível calcular máximos e mínimos, uma vez que o programa contempla o cálculo do vértice de uma parábola. É também possível calcular máximos e mínimos uma vez que os alunos utilizam já a calculadora gráfica e, portanto, apesar de não ser possível calcular máximos e mínimos de funções polinomiais, analiticamente, pode fazer-se o seu cálculo apenas graficamente.

Encontramos neste manual três problemas de optimização. O primeiro nos exercícios de revisão do primeiro sub-capítulo, o segundo nos exercícios acerca das inequações do 2º grau e o último nos exercícios de revisão das funções.

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo

Título: *Infinito 10, 10º Ano Volume 2*

Ano, editora e lugar de edição: 1997, Areal Editores: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em dois volumes. O primeiro, constituído por 180 páginas, é dedicado à Geometria no Plano e no Espaço. O segundo, constituído por 220 páginas, trata das Funções e Gráficos e da Estatística.

Os problemas de optimização estão no capítulo dedicado às funções e gráficos. Este capítulo contempla o estudo dos seguintes pontos:

- Noção de função; gráfico e representação gráfica de uma função
- Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos
- Função afim. Resolução de problemas
- Funções definidas por ramos. Aplicações
- Função quadrática. Resolução de problemas
- Funções polinomiais. Polinómios numa variável
- Operações com funções. Função soma, função diferença e função produto.
- Zeros de uma função polinomial.

Pela análise dos temas abordados pelo manual, nota-se uma preocupação em apresentar para cada tipo de função, problemas concretos e aplicações. Os problemas de optimização surgem na parte dedicada às funções quadráticas e na parte dedicada às funções polinomiais.

Autor: Maria Augusta F. Neves

Título: *Matemática, 10º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 2001, Porto Editora: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em três volumes. O primeiro trata a Geometria, o segundo de Funções e o último de Estatística. Da mesma autora foi também publicado um livro de exercícios, este também estava dividido em três volumes abordando cada um deles um do tema.

Os problemas de optimização encontram-se no volume dedicado às Funções. Este volume é composto por 224 páginas, repartidas por seis sub-temas:

- Funções e gráficos
- Transformações de gráficos de funções
- Função quadrática
- Parábola
- Função módulo
- Operações com polinómios. Decomposição de polinómios em factores.

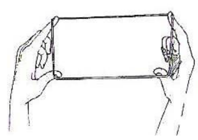
Cada um destes sub-temas apresenta no final uma síntese do que se tratou, um conjunto de problemas resolvidos e outro de problemas propostos. No final do livro há um conjunto de exercícios acerca de todos os assuntos abordados acerca de funções, de seguida as soluções de todos os exercícios e, por fim informação relativa ao uso das calculadoras gráficas no estudo das funções.

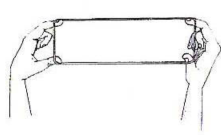
Vejamos, então, os problemas de optimização que identificámos ao longo deste manual.

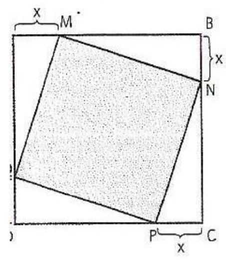
Problemas de Geometria Métrica

JAFB10.1. *Actividade 9 – Problema de Euclides*

De todos os rectângulos com o mesmo perímetro, qual o que tem área máxima? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 232)



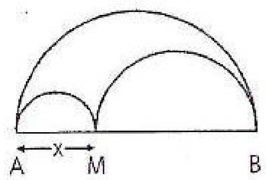




JAFB10.2. *Considere-se o quadrado [ABCD] tal que* $\overline{AB} = 6$*. Constrói-se o quadrado [MNPQ] inscrito em [ABCD] de modo que* $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ} = x$.

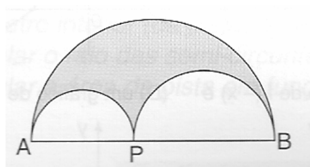
Pretende-se saber:

a. *Como varia a área A(x) de [MNPQ] com os valores de x.*
b. *Para que valores de x é mínima a área de [MNPQ] e qual o seu valor neste caso.*
c. *Quais os valores de x para os quais a área A(x) é igual a 20 unidades quadradas?*
d. *Para que valores de x é A(x) > 30? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 244)*



JAFB10.6. *Designando por A(x) a área do domínio limitado pelas três semicircunferências de diâmetro [AB], [AM] e [MB], onde* $\overline{AB} = 6$ *e* $\overline{AM} = x$*, sendo M um ponto de [AB].*

1. *Mostre que* $A(x) = \frac{\pi}{4}(6x - x^2)$
2. *Represente graficamente a função* $A : x \mapsto \frac{\pi}{4}(6x - x^2)$ *e determine x de modo que a área A seja máxima. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 313)*

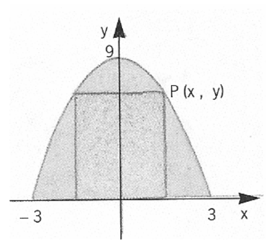


LG10.3. *Na figura estão um semicírculo de diâmetro fixo* $\overline{AB} = d$ *e dois outros semicírculos de diâmetros* $\overline{AP} = x$ *e* $\overline{PB}$*, variáveis, sendo P* $\in$ *[AB]*

a) Exprime em função de x a área colorida.

b) Que relação deverá existir entre d e x para que a área colorida seja máxima. (Lima e Gomes 10º, 1996, p. 173)

Problemas de Geometria Analítica



N10.5. *O rectângulo na parábola*

Observe a figura. A unidade é o centímetro.

a. Escreva uma equação que represente o arco da parábola.

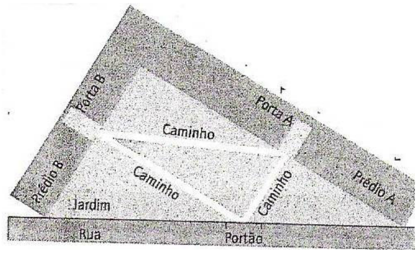
b. Escreva a área do rectângulo em função de x e determine:

i. A área máxima do rectângulo, com uma aproximação às centésimas;

ii. Entre que valores de x a área do rectângulo é superior a 2 cm^2*. (Neves 10º, 2001, p. 177)*

Problemas de Medida em Contexto Real

JAFB10.3. *O caminho mais curto*



As fachadas de dois prédios fazem entre si um ângulo recto.

O muro que os separa da rua limita um jardim triangular.

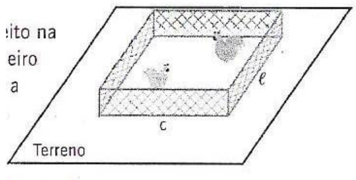
O jardim é atravessado por três caminhos que ligam entre si o portão de tal modo que:

1º Cada caminho do portão até às portas é perpendicular ao prédio.

2º O caminho que liga as duas portas é o mais curto possível.

Em que ponto do muro está o portão? Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, (p. 261)

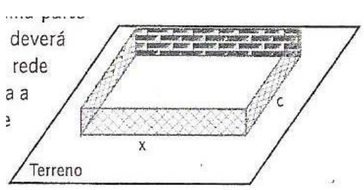
JAFB10.4. *Um agricultor comprou 6 metros de rede para fazer 1 galinheiro rectangular, como ilustra a figura.*



Para optimizar o empate de capital feito na compra da rede, pretende que o galinheiro tenha área máxima. Ajude o agricultor a resolver o problema seguindo os passos que a seguir se indicam:

1. *Exprima l em função de c.*
2. *Exprima a área A do galinheiro em função de c.*
3. *Determine o valor de c para o qual a área é máxima e o correspondente valor de l. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 312)*

JAFB10.5. *Dispõe-se de 20 000\$00 para vedar uma parte de um terreno rectangular. A vedação deverá ser feita em tijolo num dos lados e em rede os três lados restantes, conforme ilustra a figura ao lado. Cada metro de rede custa 200\$00 e cada metro de parede em tijolo, 600\$00. Qual a área máxima que se consegue vedar?*

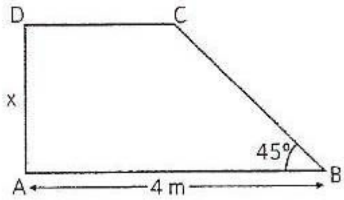


Tente resolver o problema seguindo os passos que a seguir se sugerem:

1. *Exprima c em função de x, recorrendo ao capital de que se dispões.*
2. *Prove que a área da parte do terreno a vedar em função de x é* $A(x) = 50x - 2x^2$.

Determine o valor de x para o qual a área A é máxima e o valor dessa área. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 312)

JAFB10.7. *A figura representa um jardim com a forma de um trapézio rectângulo.*



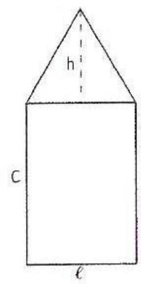
a. Escreva $\overline{DC}$ *em função de x.*

b. Mostre que a área do trapézio em função de x é dada pela expressão $A(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$

c. *Calcule a altura x do trapézio de modo que a área seja inferior a 6 m².*

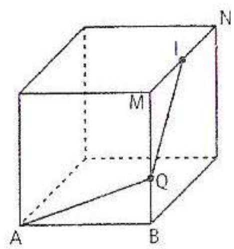
d. *Recorrendo à representação gráfica da função A, determine o valor de x para o qual é máxima a área do jardim e indique o seu valor. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 313)*

JAFB10.8. *As janelas de uma casa têm 6 metros de perímetro e a configuração da figura – um rectângulo encimado por um triângulo equilátero.*



1. *Exprima c e h em função de l.*
2. *Exprima a área A da janela em função de l e represente graficamente a função* $l \to A(L)$. *(Utilize valores aproximados Às décimas)*
3. *Determine c e l de modo que entre pela janela a maior quantidade de luz possível (isto é, a área seja máxima). (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 313)*

JAFB10.9. *O cubo da figura tem 2 cm de aresta. Uma formiga desloca-se de A para I, ponto médio da aresta [MN], passando sempre por um ponto (Q) da aresta [BM] e percorrendo segmentos rectilíneos. Designando* $\overline{BQ}$ *por x e por D(x) a distância percorrida pela formiga:*

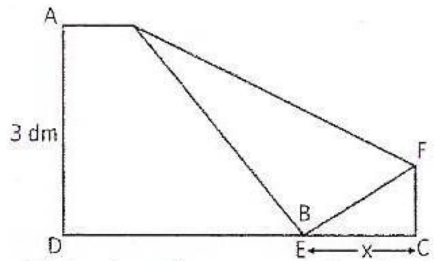


1. *Escreva uma expressão de D(x).*
2. *Entre que valores pode variar x?*
3. *Recorrendo a uma calculadora gráfica, represente a função D e apresente um valor aproximado de x a menos de 0, 01 para o qual a distância percorrida pela formiga seja mínima. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 315)*

JAFB10.10. *Considere uma folha rectangular de papel de 3 dm de largura.*

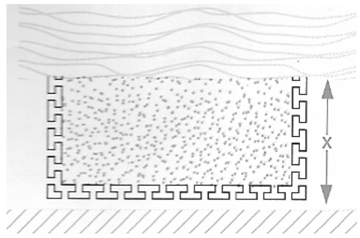
Dobra-se o canto B de modo que coincida com o ponto E do lado oposto.

Mostre que a área A(x) do triângulo rectângulo [ECF] é dada por $A(x) = 0{,}75x - \frac{1}{12}x^3$



Qual o seu valor máximo? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 323)

LG10.1. *Com 100 m de rede temos de vedar 3 lados de um terreno rectangular à beira de um rio.*



a. Exprime a área do terreno em função do lado x.

b. Estuda o domínio da função; esboça o gráfico.

c. Faz um estudo da função relativamente a zeros, monotonia, extremos, injectividade.

d. Conclui qual a área máxima que se pode vedar com os 100 m de rede.

e. Faz um relatório com desenhos à escala de vários rectângulos possíveis.

(Lima e Gomes 10º, 1996, p. 149)

LG10.2

a) Sendo 80 m o perímetro dum terreno rectangular, exprime a área A em função da altura h.

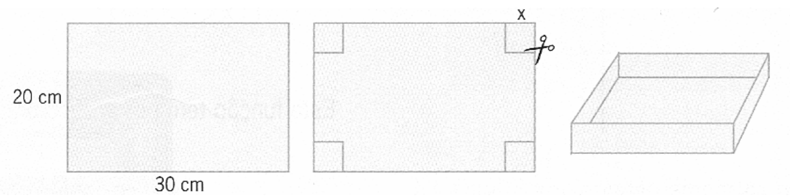
b) Esboça o gráfico da função h |–> A e calcula a área máxima que o terreno pode ter.

c) Calcula para que valores de h vem A > 200 m². (Lima e Gomes 10º, 1996, p. 159)

N10.1. Volume da caixa

Tem-se uma cartolina rectangular com 30 cm de comprimento e 20 cm de largura.

Pretende-se construir uma caixa sem tampa, cortando nos quatro cantos um quadrado de lado x.

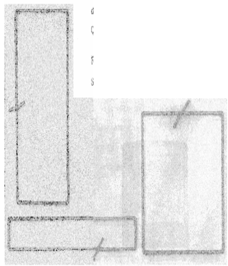


a. . Escreva a expressão do volume da caixa.

b. Qual é o domínio da função?

c. Use a calculadora gráfica para obter o gráfico da função que escreveu em 20.1.

d. Indique um valor aproximado de x para o qual o volume da caixa é máximo. (Utilize o TRACE da calculadora gráfica) (Neves 10º, 2001, p. 51)

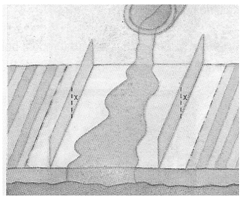


N10.2. *A importância do vértice*

Com cem metros de rede pretende-se vedar um terreno rectangular de modo a que este tenha o máximo de área.

Quais devem ser as dimensões do terreno? (Neves 10º, 2001, P. 90)

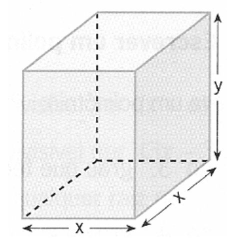
N10.3. *Tem-se uma "folha" de metal com 50 cm de largura.*



Pretende-se fazer uma peça para conduzir água de uma conduta de águas pluviais, como mostra a figura, dobrando de cada lado, na vertical, uma parte da folha com a mesma altura x.

Para que a quantidade de água transportada seja máxima, qual deve ser o valor de x? (Neves 10º, 2001, p. 100)

N10.4. A caixa do presente



Para embalar uma peça de louça de colecção a empresa "Vista contente" produziu uma caixa com a forma de um prisma quadrangular regular.

A caixa levará uma fita dourada cobrindo todas as arestas da caixa.

Para cada caixa são necessários 160 cm de fita dourada.

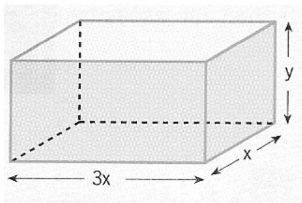
De acordo com a figura:

a. Determine o valor de x, em função de y;

b. Determine um valor aproximado, a menos de uma décima, para o volume máximo da caixa;

c. Se pretender um volume para a caixa de 2000 cm^3, qual deve ser o valor de x? (Neves 10º, 2001, p. 176)

N10.6. *A caixa fechada*



Uma caixa com a forma de um paralelepípedo tem a base rectangular cujo comprimento é o triplo da largura.

Mostre que:

a. Se a área da caixa é 168 cm^2, o volume v da caixa, em cm^3, é dado pela expressão:

$$V = 63x - \frac{9}{4}x^3$$

em que x é a medida, em cm, da largura da base da caixa.

b. Determine um valor aproximado para o qual o volume da caixa é máximo e indique o valor do volume para essa aproximação. (Neves 10º, 2001, p. 184)

Manuais do 11º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: *Xeqmat, 11º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1997, Editorial O Livro

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual apresenta uma estrutura semelhante ao manual dos mesmos autores apresentado no período anterior. É composto por 344 páginas repartidas por três capítulo: Trigonometria e Geometria, Funções e Derivadas e o último tema Sucessões.

Os problemas de optimização encontram-se na parte referente às Funções e Derivadas. Veja-se como está estruturada esta unidade.

- Funções racionais
- Funções definidas por troços
- Operações com funções
- Limite. Taxa de variação média. Derivada
- Inversão de uma função. Funções com radicais.

No final de cada sub-unidade surge uma revisão/síntese e a seguir um conjunto de exercícios de revisão. No final da unidade ainda surge mais um conjunto de exercícios de revisão geral do tema, separados por sub-temas.

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo

Título: *Infinito 11, 11º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 2001, Areal Editores: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Esta obra é composta por dois volumes., sendo o segundo composto por 318 páginas repartidas por dois capítulos: Cálculo Diferencial e Sucessões.

O capítulo dedicado ao cálculo diferencial apresenta os conteúdos seguintes:

- Funções racionais
- Operações com funções

- Função composta
- Resolução de problemas envolvendo as funções estudadas
- Taxa de variação de uma função. Derivada
- Função derivada. Funções derivadas de algumas funções
    - Função derivada
    - Funções derivadas de algumas funções
    - Sinal da derivada e sentido de variação
    - Extremos relativos de uma função
- Função inversa
- Funções com radicais quadráticos e cúbicos
- Determinação da equação reduzida da elipse recorrendo às propriedades focais
- Aplicando

Os problemas de optimização estão na parte dedicada às aplicações dos extremos relativos.

Autor: Maria Augusta F. Neves

Título: *Matemática 11º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 2001, Porto Editora: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual tem uma estrutura semelhante ao manual do 10º ano. Tem em três volumes: Geometria, Funções e Sucessões. Da mesma autora foi também publicado um livro de exercícios, este também com três volumes, sendo cada um deles dedicado a cada um dos temas referidos.

Os problemas de optimização fazem parte do segundo volume, respeitante às Funções. Este manual é composto por 208 páginas divididas por cinco sub-temas:

- Funções Racionais
- Funções Irracionais
- Operações com funções. Resolução de problemas envolvendo funções
- Taxa média de variação e taxa de variação de uma função. Cálculo da derivada de algumas funções
- A derivada e os extremos de uma função. Problemas de optimização.

Problemas de Geometria Métrica

LG11.5. *De todos os triângulos rectângulos cujos catetos somam 50 cm, determina o que tem área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 201)*

LG11.6. *De entre os rectângulos com 60 dm² de área, descobre as dimensões do que tem perímetro mínimo. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 201)*

LG11.7. *De entre os rectângulos com 80 m de perímetro, determina as dimensões do que têm área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 201)*

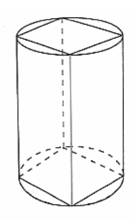
LG11.10. *Considera os vários paralelepípedos de base quadrada cujas dimensões somam 1 metro.*

Calcula a altura do que em maior volume. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 204)

LG11.12. *Um prisma quadrangular regular está inscrito num cilindro. A secção desse cilindro por um plano contendo o eixo tem 30 cm de perímetro.*

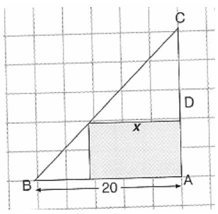
a. Exprime o volume do prisma em função do diâmetro x do cilindro.

b. Determina o domínio da função e o valor de x que torna o volume máximo. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 205)

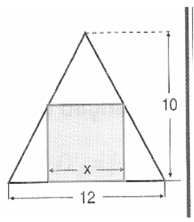


LG11.13. *Na figura um rectângulo em cor está inscrito no triângulo rectângulo isósceles cujos catetos medem 20 cm.*

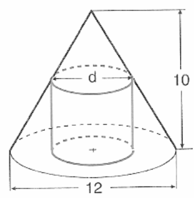
Determina as dimensões do rectângulo de área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 205)



LG11.14. *Quais são as dimensões do rectângulo de área máxima que se pode inscrever, como indica a figura, num triângulo isósceles com 12 cm de base e 10 cm de altura? (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)*



LG11.15 *Calcula o diâmetro do cilindro de revolução, de volume máximo, que se pode inscrever, como indica a figura junta, num cone de revolução com 12 m de diâmetro da base e 10 m de altura. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)*



LG11.17. *Determina a altura do cone de revolução com 30 cm de geratriz cujo volume é máximo. (Lima e Gomes 11°, 1997, p. 209)*

LG11.18. *Um triângulo equilátero [ABC] tem 6 m de perímetro. Sendo M um ponto de [BC] determina a sua posição de forma que o produto das distâncias de M às rectas AB e AC seja máximo.*
Sugestão: Recorre à Trigonometria (sen 60°). (Lima e Gomes 11°, 1997, p. 209)

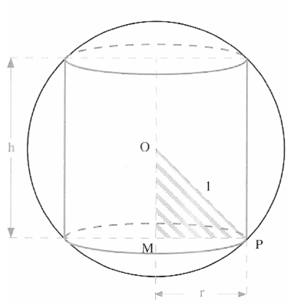
LG11.25. *Um trapézio tem três lados com 8 cm cada um. Determina o comprimento do 4° lado de forma que a área seja máxima.*
Sugestão: Exprima a área em função de metade da diferença das bases. (Lima e Gomes 11°, 1997, p. 232)

JAFB11.3. *O maior cilindro inscrito numa esfera.*

Consideremos uma esfera de raio 1 dm e um cilindro de altura h e raio da base r inscrito na esfera (as suas duas bases são círculos da esfera).

Qual o valor de h para o qual o volume do cilindro é máximo?

E qual é o valor desse volume? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11° V2, p. 134)



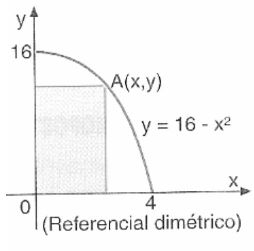
N11.5. *Determine o volume máximo de um cone inscrito numa esfera de raio 3 cm. (Neves 11°, 2001, p. 137)*

Problemas de Geometria Analítica

LG11.20. *Um rectângulo de área A não nula tem dois lados sobre os eixos coordenados sendo a origem um dos vértices. O vértice oposto é ponto da parábola de equação* $y = 16 - x^2$.

a) Exprime a área do rectângulo em função de x indicando o domínio de A(X).

b) Para que valores de x a área do rectângulo é máxima? (Lima e Gomes 11°, 1997, p. 209)



LG11.21. *A figura representa uma elipse na qual se inscreveu um rectângulo [MNPQ].*

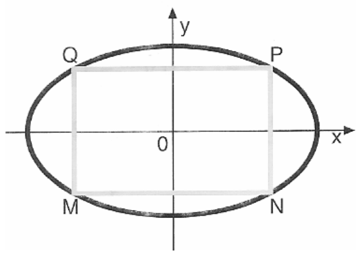
A elipse tem centro na origem O do referencial, distância focal 6 (cm) e eixo maior sobre o eixo das abcissas, com 10 cm de comprimento.

a) Escreve uma equação cartesiana da elipse.

b) Sendo (x, y) as coordenadas do ponto P da elipse prova que a área do rectângulo representado se pode exprimir em função de x do seguinte modo

c) Determina o valor de x para o qual é máxima a área do rectângulo e calcula essa área.

Sugestão: na área é máxima quando $25x^2 - x^4$ *o for.*



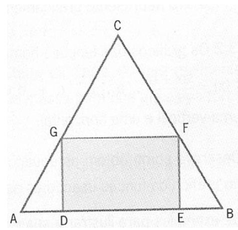
Aferição, 94 – 1ª Chamada – Época Especial. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 224)

N11.12. *O rectângulo de área máxima*

O triângulo [ABC] é equilátero de lado 10 cm.

Construiu-se um rectângulo [DEFG] como se indica na figura.

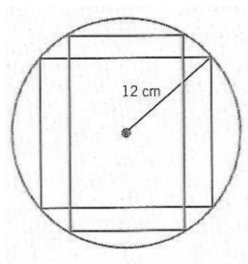
Determine as dimensões do rectângulo de modo que este tenha área máxima. (Neves 11º, 2001, p. 143)



N11.15. *O rectângulo no círculo*

Num círculo de raio 12 cm inscreveu-se um rectângulo.

Quais as dimensões do rectângulo de modo que a área deste seja máxima? (Neves 11º, 2001, p. 157)



Problemas de Aritmética

LG11.8. *Calcula os números:*

a. Cuja soma é 30 e cujo produto é máximo.

b. Cuja diferença é 20 e cujo produto é máximo. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 201)

N11.6. *A soma é 20*

A soma de dois números positivos é 20. Determine os números sabendo que:

a. O seu produto é máximo

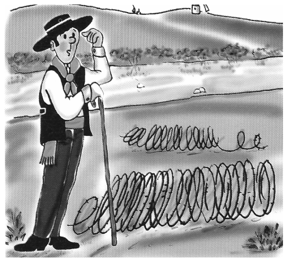
b. A soma dos seus quadrados é mínima. (Neves 11º, 2001, p. 141)

Problemas de Medida em Contexto Real

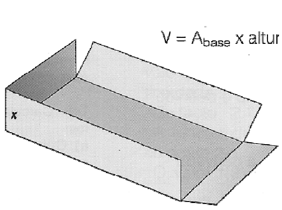
LG11.1. *A horta à beira rio*

O Sr. Joaquim pediu-nos ajuda:

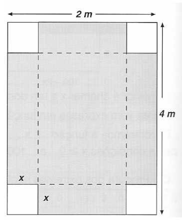
"Tem 100 metros de rede para vedar um terreno rectangular à beira rio. Só quer vedar 3 lados que não dão para o rio. Mas quer que a área da horta fica a maior possível…" (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 201)



LG11.2. *Um pequeno contentor – volume máximo*



Suprimindo um quadrado em cada canto de uma chapa metálica rectangular, de 2 metros por 4 metros, vai construir-se um contentor (sem tampa).

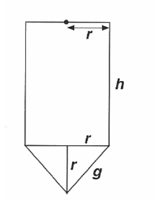


Determinar o lado do quadrado a suprimir de modo que o volume do contentor seja o maior possível. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 202)

LG11.3. *Silos para cimento – área mínima*

Silos para conter cimento têm a forma de um cilindro de altura h e raio r sobreposto a um cone de altura e raio iguais a r.

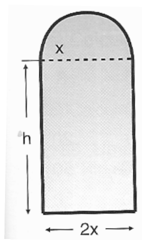
Para silos com volume total de 100 m³ determinar r de modo que a área lateral seja o menor possível para minimizar o custo do silo. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 203)



LG11.4. *Janela com vão máximo.*

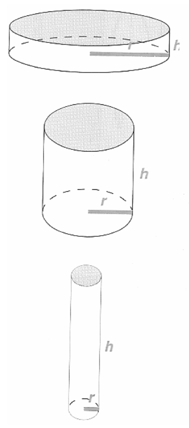
Um edifício vai ter janelas com a forma dum semicírculo sobreposto a um rectângulo.

O perímetro da janela não pode exceder 4 metros. Determina o formato óptimo da janela para obter o vão máximo (área máxima). (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 205)



LG11.9. *De um cartão quadrado com 1m² de área, tira-se um quadrado a cada canto para fazer um caixote (sem tampa).*

Determina qual deve ser o lado desses quadrados para que o volume do caixote seja o maior possível. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 202)



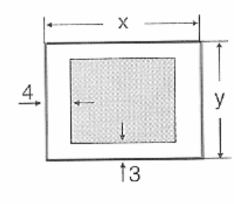
LG11.11. *Pensa em vários gasómetros cilíndricos com capacidade de 2 m^3. Repara que podem ter formas muito diferentes.*

a. Prova que a área total é dada, em função do raio r, por

$$A = 2\pi r^2 + \frac{4}{r},\ r > 0.$$

b. Estuda a monotonia da função r |–> A recorrendo à derivada.

c. O custo do gasómetro será mínimo quando a área A for mínima. Que valor deve ter o raio para obter o custo mínimo? (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 204)



LG11.19. *Um editor decidiu que as páginas dum livro a editar deveriam ter margens de 3 cm em cima e em baixo e de 4 cm de cada lado e que a área da página seria de 432 cm^2.*

Determina as dimensões da página para que a área impressa seja a maior possível. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)

LG11.22. *Determina as dimensões do rectângulo.*

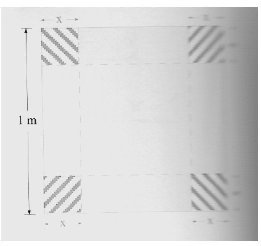
a. *Com 100 cm^2 de área e cujo perímetro é o menor possível.*

b. *De maior área que se pode contornar com 1200 m de rede. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 231)*

LG11.24. *Um arame com 24 cm vai ser cortado em duas partes, uma para formar um quadrado e outra para definir um círculo.*

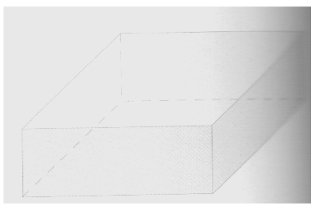
Em que ponto deve ser cortado o arame para que a soma das áreas do quadrado e do círculo seja mínima? (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 231)

JAFB11.1. *Economia no fabrico.*



Considere-se uma placa de cartão de forma quadrada com 1m de lado.

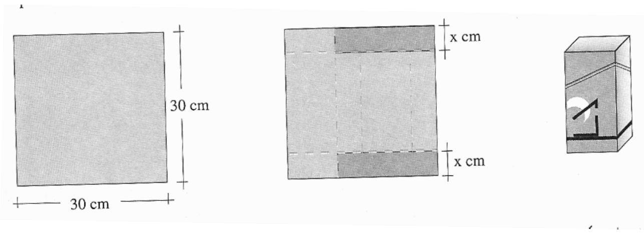
Corta-se em cada canto um quadrado de lado x, com o fim de fazer uma caixa paralelipipédica sem tampa.



Qual o valor de x que torna o volume da caixa máximo? E qual é, então, esse volume? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 133)

JAFB11.2. *Economia no fabrico.*

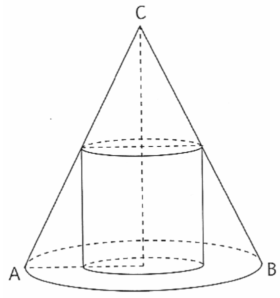
Uma empresa fabrica caixas em cartão cortando duas faixas da mesma largura numa folha quadrada.



A medida do lado da folha é 30 cm e designa-se por x a medida, em centímetros, da largura da faixa que se retira.

Determinemos o valor de x que torna o volume da caixa máximo e, seguidamente, calculemos esse volume. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 133)

JAFB11.4. *Num circo, uma lâmpada emite um cone de luz de altura 16m e raio da base 8m. Para um trabalho dos trapezistas, é preciso saber que espaço é utilizado dentro desse cone de luz. Chegou-se à conclusão que interessaria o espaço limitado pelo cilindro interior ao cone de volume máximo.*



Conhecer a altura e o raio da base desse cilindro é essencial para o trabalho dos trapezistas. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 165)

JAFB11.5. *Um aquário aberto em cima, de forma paralelepipédica, de 45 cm de altura, deve ter um volume de 170 litros.*

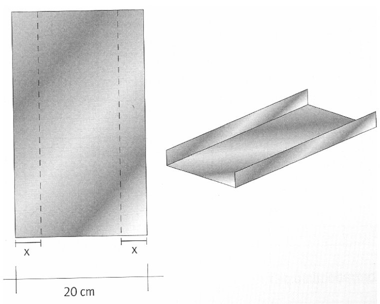
Sejam x e y o comprimento e a largura da base, respectivamente.

a. Exprima y como função de x.

b. Exprima, em função de x, a área total de vidro necessária.

c. Determine para que valor de x essa área é mínima. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 173)

JAFB11.6. *Uma folha rectangular de metal com 20 cm de largura vai ser dobrada para se fabricarem caleiras, como mostra a figura:*

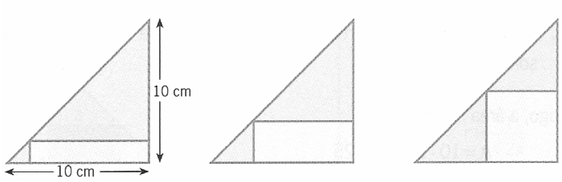


Por onde devem ser feitas as dobragens para que a caleira transporte a maior quantidade possível d água? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 183)

N11.1. *O canteiro num jardim*

Num jardim com a forma de um triângulo isósceles queremos desenhar um canteiro como se indica na figura: um dos vértices do rectângulo pertence à hipotenusa e os outros aos catetos.

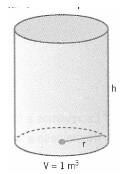
Um destes rectângulos terá área máxima. Qual deles é? (Neves 11º, 2001, p. 131)



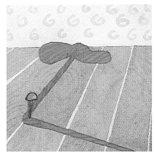
N11.2. *O cilindro de latão*

Uma empresa fabrica cilindros em latão com 1m^3 de volume.

Estudar as dimensões do cilindro de modo a gastar o mínimo latão possível na sua construção. (Neves 11º, 2001, p. 132)

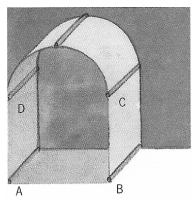


N11.3. *Com um fio de 150 cm de comprimento, quais as dimensões do rectângulo de área máxima que é possível construir? (Neves 11º, 2001, p. 132)*



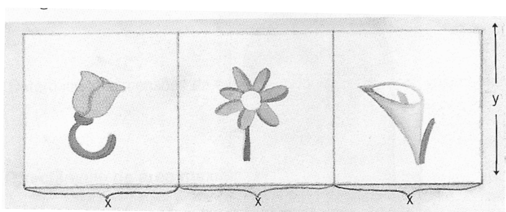
N11.4. *Com 714 m de rede pretende-se vedar um terreno, com a forma indicada em cima, constituído por um rectângulo [ABCD] e um semicírculo de diâmetro [DC].*

Determine as dimensões do rectângulo de modo a que a área seja máxima. (Neves 11º, 2001, p. 133)



N11.7. *O problema do jardineiro*

Um jardineiro pretende criar três canteiros rectangulares vedados como se indica na figura.



Ele tem 300 metros de rede.

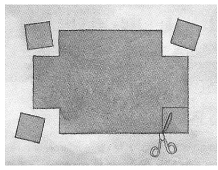
a. De acordo com os dados da figura, mostre que a área dos canteiros em função de x é dada por:

$$A(x) = 450x - 9x^2$$

b. Determine x e y de modo que a área seja máxima. Qual o valor máximo dessa área? (Neves 11º, 2001, p. 141)

N11.8. *A construção da caixa*

Para construir uma caixa vão ser cortados quatro cantos quadrados iguais a um quadrado de 12 cm de lado. Determine o

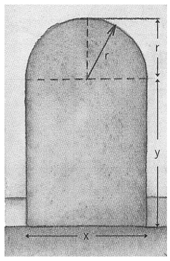


lado de cada quadrado de modo que o volume da caixa obtida seja máximo. (Neves 11º, 2001, p. 142)

N11.9. *A porta*

Uma porta será constituída por um rectângulo por um semicírculo, como se ilustra na figura.

Sabendo que o perímetro da porta será 18, determine a área máxima da porta. (Neves 11º, 2001, p. 142)



N11.10. *O rectângulo com vértices na parábola*

Um rectângulo tem base no eixo dos xx e os outros dois vértices pertencem à parábola de equação $y = 4 - x^2$.

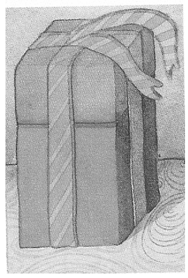
Qual a área máxima que o rectângulo pode ter? (Neves 11º, 2001, p. 143)

N11.11. *Volume máximo*

Uma caixa com a forma de um paralelepípedo de base quadrada de lado x cm, tem uma área total de 150 cm^2.

a. Mostre que o volume do paralelepípedo é dado pela fórmula:

$$V = \frac{75x - x^3}{2}$$



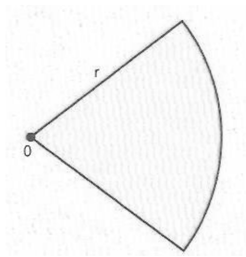
b. Determine as dimensões da caixa de modo que ela tenha volume máximo. (Neves 11º, 2001, p. 143)

N11.14. *O sector circular*

Um canteiro de um jardim terá a forma de um sector circular de raio r.

O perímetro do canteiro terá de ser 20 metros.

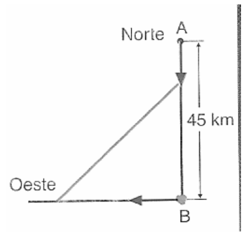
Determine r de modo que a área do canteiro seja máxima. (Neves 11º, 2001, p. 157)



Problemas de Física

LG11.16 *Em dado momento o barco A está a 45 km a norte do barco B.*

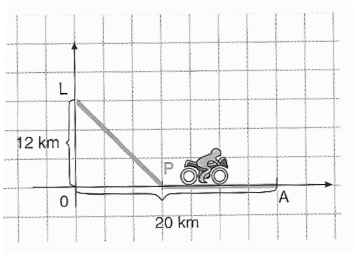
O barco A dirige-se para Sul à velocidade de 9 km/h e o barco B vai para Oeste à velocidade de 12 km/h.



No seu movimento qual a distância mínima que separa os barcos?

Sugestão: Estuda a função f: t |–> d²(t) visto que d mínima equivale a d² mínima. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)

LG11.23. *Um ciclista está na localidade L a 12 km do ponto O mais próximo de uma estrada, rectilínea e alcatroada, e pretende ir à aldeia A que dista 20 km de O sobre essa estrada.*



O ciclista desloca-se a 10 km/h na estrada alcatroada e a 8 km/h fora da estrada.

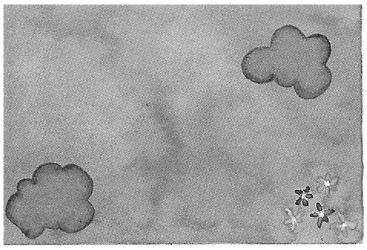
Determina o ponto P em que deve atingir a estrada alcatroada para fazer o percurso no menor tempo possível. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 231)

Nota: $\left(\sqrt{f}\right) = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Problemas de Economia

N11.13. O custo da vedação

A Beatriz queria ter um jardim com a forma de um rectângulo. Ela entendeu que não queria mais do que 200 m² de terreno pois não teria tempo de cuidar dele devidamente.



Suponha que x representa o comprimento e y a largura do jardim.

a. Escreva y em função de x.

b. Escreva o perímetro P em função de x.

c. Se a Beatriz pretende vedar o jardim com rede que custe 9 euros (1 804$00) o metro, qual é a função custo para a vedação?

d. Represente graficamente a função custo e determine gráfica e algebricamente o custo mínimo da vedação em função de x. (Neves 11º, 2001, p. 156)

Manuais do 12º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: *Xeqmat, 12º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1997, Editorial O Livro

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está estruturado de modo muito semelhante ao manual editado para a reforma anterior. É composto por 392 páginas, num só volume, repartidas por três temas: Probabilidades e combinatória, Introdução ao Cálculo Diferencial II e, por fim, Trigonometria e Números Complexos.

Encontramos os problemas de optimização em dois capítulos: no do Cálculo Diferencial e no da trigonometria.

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo

Título: *Infinito 12, 12º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 2002, Areal Editores: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Esta obra tem uma estrutura muito semelhante à obra dos mesmos autores analisada no período anterior, também está dividia em três partes, sendo a primeira dedicada às probabilidades e combinatória, a segunda ao cálculo diferencial e a última à trigonometria e números complexos.

Os problemas de optimização constam na segunda e na terceira parte. Os capítulos estão assim estruturados:

1. Introdução ao cálculo diferencial II
    - Função exponencial de base superior a um
    - Função logarítmica de base a (a > 1). Logaritmo de um número
    - Limite de uma função segundo Heine
    - Continuidade
    - Teorema de Bolzano-Cauchy
    - Assimptotas
    - Funções deriváveis
    - Derivada de uma função exponencial
        - Derivada da função logarítmica
        - Teorema da derivada da função composta
        - Primeira derivada e sentido de variação
        - Extremos relativos de uma função
        - Segundas derivadas e concavidades
        - Estudo analítico de funções
        - Problemas de máximos e mínimos
        - Problemas de optimização

2. Trigonometria e números complexos
    - Função seno, co-seno e tangente
        - Função seno
        - Função co-seno
        - Estudo intuitivo de $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$
        - Derivabilidade das funções seno e co-seno
        - Função tangente
        - Derivabilidade da função tangente
        - Aplicações
        - Resolução de problemas

Os problemas de optimização encontram-se no segundo volume, na parte dedicada aos problemas de optimização. Nesta parte as autoras começam por explicar as etapas a seguir na resolução deste tipo de problemas:

- Definir uma função que sirva de modelo matemático à situação a estudar (se possível com uma só variável);
- Estudar a variação dessa função determinando, em particular, os seus extremos;
- Confrontar os resultados teóricos com o fenómeno real e a situação concreta do problema.

De seguida mostra um conjunto de problemas resolvidos e no final do capítulo, na parte dos exercícios, aparece mais um conjunto de problemas de optimização.

No terceiro volume os problemas de optimização surgem na parte referente às aplicações da derivada e no final do capítulo, na parte destinada aos exercícios.

Autor: Maria Augusta F. Neves

Título: *Matemática 12º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 2002, Porto Editora: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Também esta obra tem uma estrutura semelhante à dos manuais da mesma autora analisados anteriormente. Este manual está dividido em três volumes, o primeiro trata as Probabilidades, o segundo as Funções e o último a trigonometria.

Encontramos os problemas de optimização no segundo e no terceiro volume. O segundo volume é composto por 256 páginas repartidas pelos vários sub-temas:

- Funções exponenciais e logarítmicas
- Limites
- Continuidade de uma função
- Derivadas
- Aplicações das derivadas
    - Funções estritamente crescentes e funções estritamente decrescentes
    - Extremos de uma função
    - Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função
    - Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função
    - Extremos relativos e primeira derivada de uma função
    - Teste da segunda derivada
    - Estudo de funções
    - **Problemas de optimização**
    - O que estudou no tema
    - Problemas resolvidos
    - Problemas propostos

O terceiro volume é composto por 176 páginas repartidas pelos vários sub-temas:

- Radiano. Razões trigonométricas
- Fórmulas trigonométricas
- Funções trigonométricas. Equações trigonométricas
- Derivada das funções trigonométricas
    - Estudo intuitivo do $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x}$
    - Derivada de funções trigonométricas
    - O que estudou no tema
    - Problemas resolvidos
    - Problemas propostos
- Introdução aos números complexos
- Representação trigonométrica de um complexo. Operações
- Domínios planos e condições em variável complexa

Da mesma autora foi também publicado um livro de exercícios, também dividido em três volumes, sendo cada um deles dedicado a cada um daqueles temas.

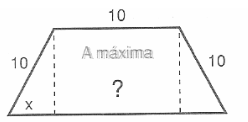
Os problemas de optimização existem nos dois manuais. No segundo surgem explicitamente na parte das aplicações da derivada. No terceiro surgem, não de forma explícita, na parte relativa às derivadas de funções trigonométricas.

Observemos então, os problemas de optimização presentes nas obras.

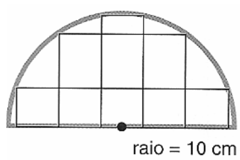
Problemas de Geometria Métrica

LG12.5. *De ente os rectângulos com 1 m² de área, qual é o que tem perímetro mínimo? (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 233)*

LG12.6. *Um trapézio tem 3 lados com 10 m cada um, Qual deve ser o comprimento do 4º lado para que a área seja a maior possível? (Fazer base maior = 10 + 2x.) (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 233)*

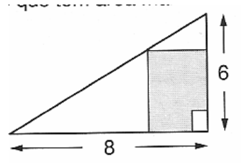


LG12.7. *Dos rectângulos inscritos num semicírculo de raio 10 cm, determina a base do que tem maior área. (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 233)*



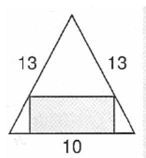
LG12.8. *De entre os rectângulos que se podem inscrever neste triângulo rectângulo, determina as dimensões do que tem área máxima.*

(um dos ângulos do rectângulo coincide com o ângulo recto do triângulo.) (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 235)



LG12.12. *Num triângulo isósceles de lados 10, 13, 13, inscreve-se um rectângulo como a figura indica (base contida na base do triângulo).*

Determina as dimensões do rectângulo de modo que a sua área seja máxima. (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 247)



JAFB12.1. *[DABC] é uma pirâmide tal que [ABC] é um triângulo em A. O ponto D pertence à recta perpendicular a ABC no ponto B.*

Os triângulos [DBA] e [DBC] são rectângulos em B.

$\overline{AB} = 9$ *(em centímetros).*

$\overline{AC} = 12$ *(em centímetros).*

$\overline{BD} = 16$ *(em centímetros).*

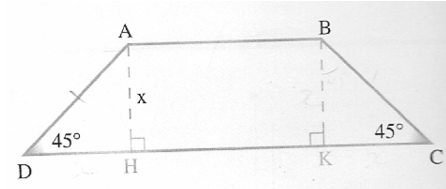
Designe-se por M um ponto do segmento [AB] e $\overline{AM} = a$.

Por M trace-se um plano perpendicular a [AB]. Designe-se por N a sua intersecção com [BC], por P a sai intersecção com [CD] e Q a sua intersecção com [AD].

*Exprima em função de **a** a área do quadrilátero [MNPQ] e averigúe quando é máxima esta área. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 179)*

JAFB12.9. *[ABCD] é um trapézio isósceles de área* $5\sqrt{2}$ *cm²*

Os ângulos agudos medem 45º.



Seja x (em cm) a altura do trapézio e P(x) o seu perímetro (em cm).

a. Exprima $\overline{DH}$ *e* $\overline{CK}$ *em função de x.*

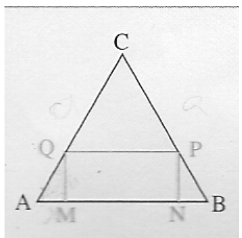
b. Exprima $\overline{AD}$ *e* $\overline{BC}$ *em função de x.*

c. Utilize a área do trapézio para exprimir $\overline{AB}$ *em função de x.*

d. Mostre que $P(x) = 2\sqrt{2}x + \dfrac{10\sqrt{2}}{x}$

e. Encontre o valor de x para o qual o perímetro do trapézio é mínimo. Qual é então a medida dos lados do trapézio? Interprete graficamente. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 216)

JAFB12.11. *Considere o triângulo equilátero [ABC] de lado a.*

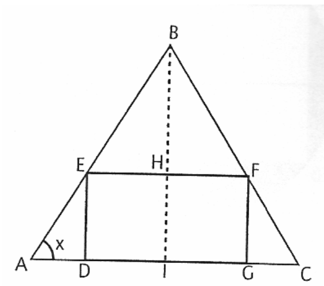


Inscreve-se neste triângulo um rectângulo [MNPQ].

Faça-se $\overline{AM} = x$

Para que valor de x a área do rectângulo é máxima? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 217)

JAFB12.17. *Na figura*



- *O triângulo [ABC] é isósceles (* $\overline{AB} = \overline{BC}$ *)*
- *[DEFG] é um rectângulo*

  $\overline{DG} = 2$

  $\overline{DE} = 1$
- *x designa a amplitude do ângulo BAC*

a. Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada, em função de x, por

$$f(x) = 2 + tg\,x + \frac{1}{tg\,x}\ \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

(Nota: pode ser-lhe útil reparar que BÊF = BÂC)

b. Mostre que $f'(x) = \dfrac{-\cos(2x)}{sen^2 x . \cos^2 x}$ *(f' designa a derivada de f).*

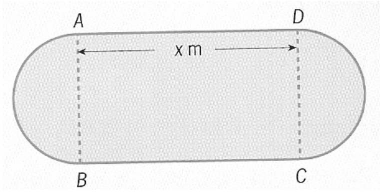
c. Determine o valor de x para o qual a área do triângulo [ABC] é mínima.

Obs: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\,\beta\, sen\,\alpha$ $\qquad$ $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$

(Exame Nacional, 2ª fase, 1998) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p.127)

N12.8. *O perímetro mínimo*

A figura representa uma superfície constituída por um rectângulo [ABCD] e dois semicírculos de diâmetros [AB] e [CD].



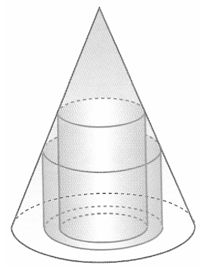
A área do rectângulo é 200 m² e $\overline{AD} = x$ *m.*

a. Mostre que o perímetro P m da figura é dado por:

$$P = \frac{200\pi}{x} + 2x$$

b. Determine o perímetro mínimo que a figura pode ter. (Neves, 12º V2, p. 231)

N12.5. *Observe a figura:*

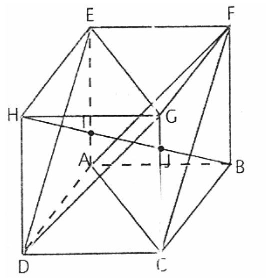


Os cilindros e o cone têm a base assente no mesmo plano e as respectivas alturas estão contidas na mesma recta.

O cone tem de altura 60 cm e raio da base 10 cm.

Determine o volume máximo do cilindro que se pode inscrever no cone. (Neves, 12º V2, p. 217)

Problemas de Geometria Analítica



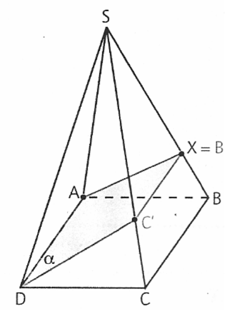
JAFB12.3. *Consideremos o cubo de aresta 1 unidade.*

Considere o referencial $(A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$ *e considere o plano de equação*

$$x - y + z = a \quad a \in [-1, 2]$$

Determine a de modo que a secção do plano com o cubo tenha área máxima.

Quais são os vértices do polígono secção correspondente à área máxima? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 209)



JAFB12.4. *Considere a pirâmide [SABCD] de base quadrada [ABCD], em que SA é perpendicular à base [ABCD], tal que* $\overline{AB} = 3$ *e* $\overline{SA} = 3\sqrt{3}$ *(em centímetros).*

O plano α *contém AD, intersecta [SB] em B' e [SC] em C'.*

a. Designando por x o comprimento $\overline{SX}$*, mostre que*

$$\overline{AB'}^2 + \overline{B'C'}^2 + \overline{C'D}^2 = \frac{5}{2}x^2 - 21x + 63$$

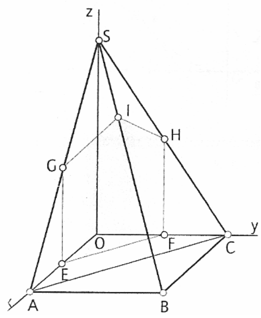
b. Faça y = $\overline{AB'}^2 + \overline{B'C'}^2 + \overline{C'D}^2$ *, estude a função*

$$f: x \rightarrow y$$

e interprete o significado dos extremos relacionando-os com a secção correspondente. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 210)

JAFB12.5. *Seja* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *um referencial o.n. e A, B, C, S definidos por*

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i}\ ; \overrightarrow{OC} = \vec{j}\ ; \overrightarrow{AB} = \vec{j}\ ; \overrightarrow{OS} = \vec{k}$$



Seja a um número real do intervalo]0, 1[.

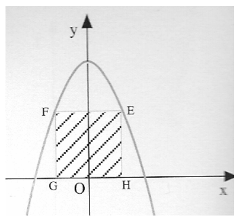
Pretende-se determinar a área máxima da secção definida pela intersecção do plano de equação x + y = a com a pirâmide [SOABC].

1. *Designemos por E, F, H, I e G os pontos de intersecção do plano com as arestas da pirâmide. Prove que [GEFH] é um rectângulo.*
2. *Determine as coordenadas de I e calcule a área do triângulo [GHI].*
3. *Seja f a função, área da secção, definida em]0, 1[por* $f(a) = a\sqrt{2}\,\dfrac{(4-3a)}{4}$.

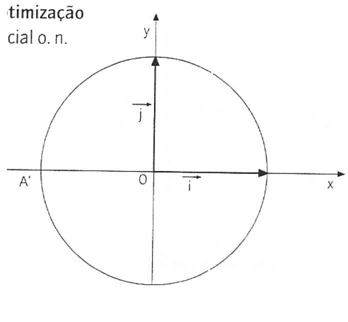
   Estude a variação de f. Para que valor de a é esta área máxima?
4. *Mostre que o plano que determina a área máxima é paralelo a AC e OS e passa pelo baricentro do triângulo [OAC]. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 210)*

JAFB12.7. *Considere a parábola definida por*

$$y = -x^2 + 9.$$



Supondo que a unidade adoptada é o cm, determine as dimensões do rectângulo [EFGH] de área máxima sabendo que E e F são pontos da parábola e G e H são pontos do eixo das abcissas. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 215)

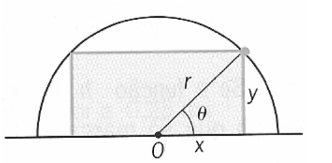


JAFB12.12. *Seja* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *um referencial o.n.*

Seja C o círculo de centro O e de raio 1, A, o ponto de coordenadas (1, 0) e A', o ponto de coordenadas (-1, 0). Seja M um ponto de C distinto de A e de A', de ordenada positiva e M' o seu simétrico em relação a AO.

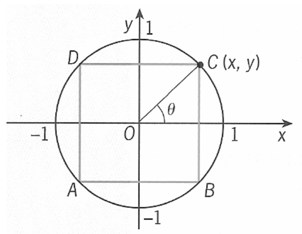
Pretende-se determinar a posição do ponto M, de modo que a área do triângulo [AMM'] seja máxima e conhecer a natureza do triângulo. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p.59)

N12.16. *O rectângulo no semicírculo: Observe a figura ao lado.*



De acordo com os dados na figura, mostre que o rectângulo inscrito num semicírculo de raio r tem área máxima se $x = y = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ *(Neves, 12º V3, p.110)*

N12.17. *O rectângulo no circulo*



Com centro na origem do referencial representou-se uma circunferência de raio 1 e um rectângulo.

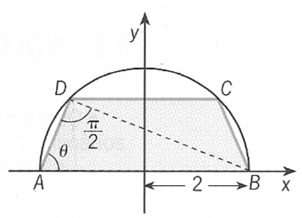
a. Escreva uma equação para a circunferência.

b. Escreva a área A do rectângulo [ABCD] em função de θ.

c. Qual é a área máxima do rectângulo [ABCD]? (Neves, 12º V3, p.111)

N12.18. *O trapézio no semicírculo*

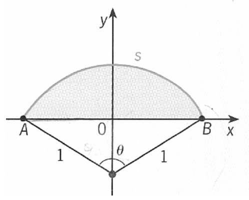
Observe a figura.



Num semicírculo de raio 2 inscreveu-se um trapézio [ABCD] isósceles e de base maior igual ao diâmetro.

Qual é a área máxima do trapézio [ABCD] (com aproximação às décimas)? (Neves, 12º V3, p.111)

N12.19. *A área máxima*

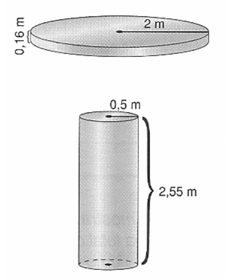


Na figura está representado um arco circular de comprimento s e raio 1.

Os pontos A e B, que limitam o arco, pertencem ao eixo das abcissas.

Mostre que A é máxima quando θ = π. (Neves, 12º V3, p.111)

Problemas de Medida em Contexto Real



LG12.1. *Gasómetros de volume constante – preço mínimo.*

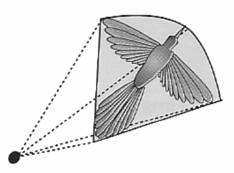
Função radical fraccionária

O custo de fabrico dum gasómetro cilíndrico com volume de 2 m^3 será mínimo quando a área total for mínima, porque se usa assim menos material, e essa área depende do raio das bases.

Qual é então o raio óptimo para que o custo seja mínimo? (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 231)

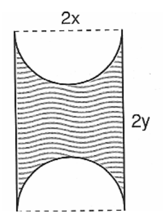
LG12.3. *"Papagaio" com área máxima.*

Função racional fraccionária



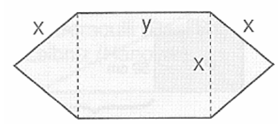
Uma fábrica de artigos de desporto produz "papagaios" de tecido muito fino esticado numa armação de alumínio com a forma de um sector circular e tendo 2 m de perímetro total.

Determina, em radianos, a amplitude do sector para que a resistência ao vento seja máxima (área máxima). (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 235)



LG12.9. *Vai construir-se um lago com a forma indicada na figura – um rectângulo ao qual se suprimem dois semicírculos. Para contornar o lago (a zona com água) dispõe-se de 100 m de gradeamento.*

Quais as dimensões do rectângulo inicial para que a área com água seja máxima? (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 235)



LG12.10. *A Direcção dum banco encomendou uma mesa com a forma desta figura.*

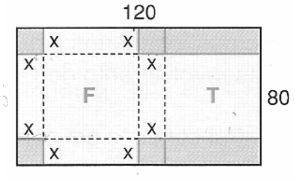
(Um rectângulo e dois triângulos equiláteros)

O perímetro da mesa tem de ter 10 m para dar lugar aos 10 membros da Direcção, mas a área tem de ser a maior possível.

Tendo em conta o perímetro, o fabricante resolveu tomar y = 3m e x = 1m, mas foi uma opção errada e teve de fazer outra mesa. Porquê?

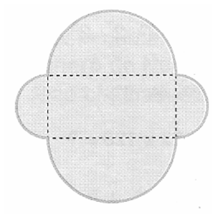
Quais são os valores correctos com aproximação ao cm?

Se x e y (metros) tivessem de ser números inteiros, a solução do fabricante teria sido aceite? (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 236)



LG12.11. *Num rectângulo de cartão fazem-se os cortes indicados a vermelho e dobra-se pelo ponteado de*

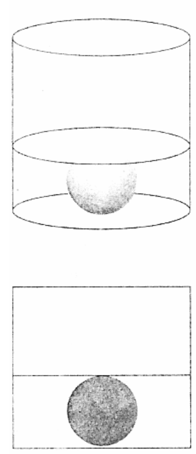
modo a obter uma caixa com tampa. Os rectângulos F (fundo) e T (tampa) são iguais. Calcula x de modo que o volume da caixa seja máximo. (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 247)



LG12.13. *Com um gradeamento de 100 m de comprimento contorna-se um jardim com a forma indicada (um rectângulo e 4 semicírculos):*

Determina as dimensões do rectângulo de modo que a área do jardim seja o maior possível (Designa por 2x e 2y as dimensões do rectângulo.) (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 247)

JAFB12.2. *Num cilindro de 30 cm de altura e em que a base é um círculo de 10 cm de raio, coloca-se uma esfera de raio r, em centímetros.*



A esfera está coberta de água como mostram as figuras.

a. O raio da esfera é 8 cm. Qual é, em centímetros cúbicos, o volume de água necessário para cobrir?

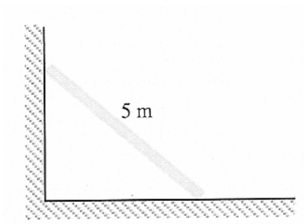
b. Exprima, em função de r, o volume de água V (r) necessário para cobrir uma esfera de raio r.

c. Qual é o domínio da função V?

d. Estude V' (r) e o sentido de variação de V.

e. Qual é o raio da esfera correspondente a um volume máximo?

f. Haverá esferas de raios diferentes que necessitem da mesma quantidade de água para serem cobertas? Analise o gráfico de y = V (r) e tire conclusões. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 207)

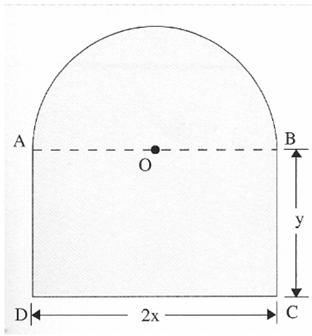


JAFB12.6. *Num canto de um terreno murado pretende-se delimitar com uma trave de madeira a maior área de terreno possível.*

Sabendo que a trave mede 5 metros, em que posição deverá ser colocada? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 214)

JAFB12.8. *Que dimensões, com aproximação a 0,1 mm, deve ter uma caixa de conservas cilíndrica, com a capacidade de 1l, para que no seu fabrico se gaste o mínimo de material? (A espessura do material de que é feita não é de considerar).*

Compare a altura com o diâmetro da caixa. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p.216)



JAFB12.10. *Uma janela é formada por um rectângulo [ABCD] e por u m semicírculo de diâmetro [AB].*

Seja x o raio do semicírculo e y a distância $\overline{BC}$ *expressa em metros.*

O perímetro da janela é igual a 5 metros.

Pretende-se encontrar as dimensões da janela a fim de que a abertura tenha uma área máxima.

a. Exprima o perímetro da janela em função de x e de y.

b. Retire da expressão o valor de y em função de x.

c. Para que valores de x se tem y > 0?

d. Exprima a área da janela em função de x e de y.

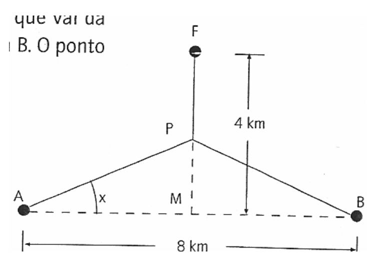
e. Utilizando os resultados das questões anteriores, mostre que a área se pode escrever na forma

$$A(x) = 5x - \frac{4+\pi}{2}x^2$$

f. Deduza para que valores de x e de y a área da janela é máxima.

Encontre o valor exacto dessa área e em seguida o valor aproximado a menos de 10^{-2}

(Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 216)



JAFB12.13. *Duas povoações, A e B, distanciadas 8 km uma da outra, estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em F.*

Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura ao lado. A canalização é formada por três canos: um que vai da fonte F até ao ponto P, e dois que partem de P, um para A e outro para B. O ponto P está a igual distância de A e de B.

Tem-se ainda que:

- O ponto M, ponto médio de [AB], dista 4 km de F;

- x é a amplitude do ângulo PAM $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

a. Tomando para unidade o quilómetro, mostre que o comprimento total da canalização é dado por

$$g(x) = 4 + \frac{8 - 4\,sen\,x}{\cos x}$$

(Sugestão: comece por mostrar que $\overline{PA} = \frac{4}{\cos x}$ *e que* $\overline{FP} = 4 - 4\,tg\,x$ *)*

b. Calcule g(0) e interprete o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

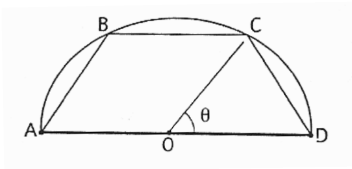
c. Determine o valor de x para o qual o comprimento da canalização é mínimo.

(Exame Nacional 1ª Chamada, 1998) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p. 115)

JAFB12.14. *A secção de um túnel é um semicírculo com 1 hm de raio.*

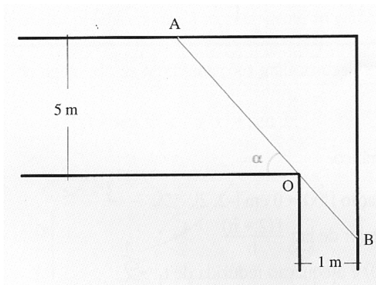
No interior do túnel há uma estrutura com a forma de um trapézio, como mostra a figura.

Qual é o valor de θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ *que torna máxima a área da secção da estrutura trapezoidal? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p.117)*



JAFB12.15. *Na figura está representado um corredor de um museu.*

Considere a recta que passa por O, sendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ *e que encontra as paredes em A e B.*



1. *Exprima* $\overline{OA}$ *em função de* α.
2. *Exprima* $\overline{OB}$ *em função de* α.
3. *a. Faça* $\overline{AB} = f(\alpha)$ *e mostre que* $f(\alpha) = \dfrac{5}{sen\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha}$

   b. Determine a função derivada de f em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *e deduza recorrendo à calculadora um valor aproximado* α_0 *de* α *para o qual f admite extremo.*

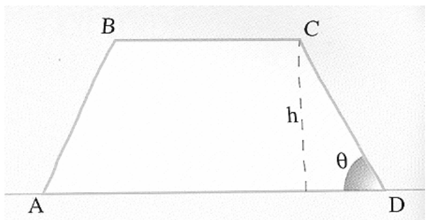
   c. Calcule o valor de $\overline{AB}$ *para* $\alpha = \alpha_0$.

   d. Pretende-se transportar naquele corredor um painel, em posição vertical.

   Quais as consequências práticas que se podem tirar do estudo feito nas alíneas anteriores? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p. 118)

JAFB12.16. *A pedido de um dos clientes, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima, com a forma de um trapézio, em que* $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2dm$.

Designando por θ *a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC,*



1. *Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior em função de* θ;

2. *Prove que a área A(θ) do trapézio é dada, em dm², por*

$$A(\theta) = 4sen\theta + 2sen2\theta$$

3. *Determine o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima e calcule essa área;*

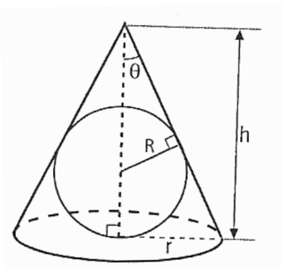
4. *Calcule* $\lim_{\theta \to 0} \frac{A(\theta)}{\theta}$.

(Prova de Aferição, Época normal, 1994) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p. 122)

Obs: sen (α+β) = sen α cos β + sen β cos α

sen (2 α) = 2 sen α cos α

JAFB12.18. *Um desenhador de peças de arte decorativas projecta pôr no mercado esferas de cobre dentro de cones de cristal transparentes.*

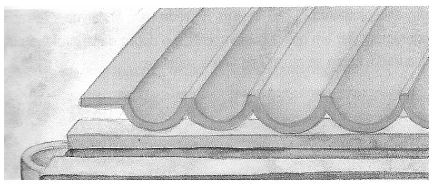


Cada esfera tem raio R e será comercializada num cone com dase de raio r e altura h (ver figura).

Muitos cones poderão ser fabricados tendo diferentes ângulos θ.

1. *Exprima o volume V de cada cone em função do ângulo θ.*
2. *Que valor deve ser escolhido para θ de modo que o cone a ser fabricado tenha volume mínimo? (Esta escolha minimiza a quantidade de cristal a gastar e dá o máximo destaque à esfera introduzida.) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p.13)*

N12.1. *A caleira de capacidade máxima*

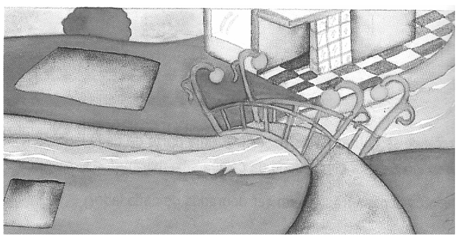


Uma folha rectangular de metal com 28 m de largura vai ser utilizada para construir uma caleira.

Pretende-se dobrar na perpendicular uma parte de cada lado da folha, de modo a que a capacidade da caleira seja máxima.

Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado? (Neves, 12º V2, p. 215)

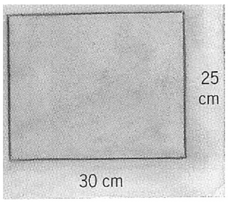
N12.2. *As vedações*

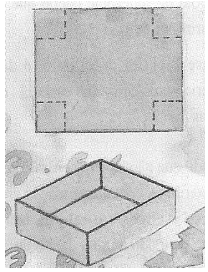


Um agricultor tem 1680 metros de rede para vedar dois terrenos: um rectangular em que o comprimento é o dobro da largura e o outro quadrado, como mostra a figura seguinte.

Determine as dimensões dos terrenos de *modo a maximizar a área dos dois espaços. (Neves, 12º V2, p. 216)*

N12.3. *Uma caixa aberta com a base rectangular vai ser construída de uma folha de cartolina com 25 cm por 30 cm.*





Na folha serão cortados quatro cantos com a forma de um quadrado.

Determine, com aproximação às centésimas, as dimensões dos cantos a cortar de modo a obter-se uma caixa de volume máximo. (Neves, 12º V2, p. 215)

N12.7.*Um depósito de água aberto tem a forma de um prisma rectangular com duas faces laterais quadradas.*

A área total do depósito (Sem tampa) é de 54 m^2.

Seja x a altura do tanque:

a. *Mostre que o volume, V m*^{3}*, do tanque é dado por:*

$$V = 18x - \frac{2}{3}x^3$$

b. *Determine s de modo a que o volume seja máximo. (Neves, 12º V2, p. 222)*

N12.9. *O tanque de superfície mínima*

Um tanque com a forma de um cilindro, aberto na parte superior, tem de altura 4 metros e raio r m.

O volume do tanque é 1 m^3.

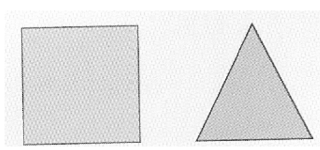
a. Mostre que $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$

b. Sendo S a sua área total interior, mostre que, em m^2, $S = \dfrac{2}{r} + \pi r^2$.

c. Determine o valor de r de modo que a área da superfície interior, S, seja a menor possível. (Neves, 12º V2, p. 231)

N12.10. *O triângulo e o quadrado*

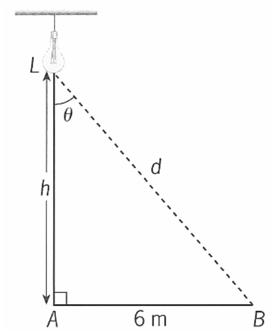
Com um arame de 20 m de comprimento fez-se um quadrado e um triângulo equilátero.



Pretende-se minimizar as áreas das duas figuras.

Escreva uma curta composição onde explique como deveria ser partido o arame. (Neves, 12º V2, p. 231)

N12.11. *Maximizar a iluminação.*



Observe a figura.

No ponto L está uma lâmpada, situada à distância h do solo.

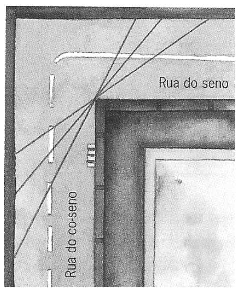
O ponto B, no solo, dista 6 m do ponto A.

Sabe-se que a intensidade i da iluminação no ponto B é dada por $i(\theta) = k \times \dfrac{\cos\theta}{d^2}$ *(i é directamente proporcional ao* $\cos\theta$ *e inversamente proporcional ao quadrado da distância, d, da lâmpada ao ponto B.)*

Calcule a que distância deve estar a lâmpada do solo de modo a que seja máxima a iluminação no ponto B.

Na figura $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ *(Neves, 12º V3, p.97)*

N12.12. *O comprimento do autocarro.*



Duas ruas formam um ângulo de 90º.

Um autocarro circula numa das ruas e pretende ir para a outra rua.

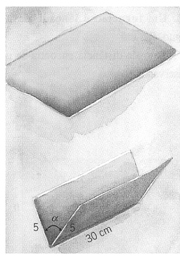
Uma das ruas tem 4 m de largura e a outra tem 6 m.

Será que o autocarro dá a volta?

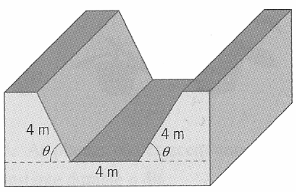
Na resolução do problema não considere a largura do autocarro.

Efectue os cálculos necessários e use as derivadas e a calculadora gráfica na sua resolução. (Neves, 12º V3, p.98)

N12.13. *Com uma folha de metal de 30 cm de comprimento e 10 cm de largura fez-se uma caleira como se mostra na figura.*



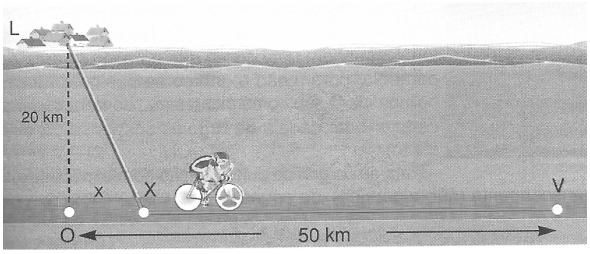
Determine α *de modo a maximizar a quantidade de água que a caleira pode comportar. (Neves, 12º V3, p.95)*



N12.14. *A secção de um canal de drenagem tem a forma de um trapézio, como se mostra na figura;*

De acordo com os dados da figura, calcule a amplitude de θ *de modo a que o caudal da água que o canal possa suportar seja máximo. (Neves, 12º V3, p.100)*

Problemas de Física

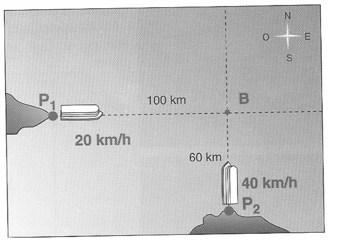


LG12.2. *O trajecto mais rápido pode não ser o mais curto.*

Função com radicais

Um ciclista mora na localidade L que dista 20 km da estrada alcatroada; O é o ponto da estrada mais próximo de L.

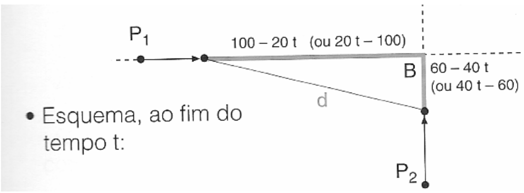
Diariamente tem de se deslocar à vila V, a 50 km de O. Na estrada desloca-se a 25 km/h, mas ao atravessar o campo só consegue andar a 15 km/h. Determina o ponto X onde deve entrar na estrada de modo a fazer o percurso no menor tempo possível. Supõe que os dois trajectos a cores são rectilíneos. (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 233)



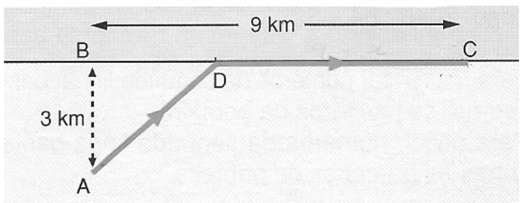
LG12.4. *Os "ferry-boats" com rotas cruzadas*

Função com radicais

Todas as manhãs, à mesma hora, sai um barco do ponto P_1 para leste, a 20 km/h e outro do ponto P_2 para norte, a 40 km/h. A bóia B, no cruzamento das rotas, dista 100 km de P_1 e 60 km de P_2.

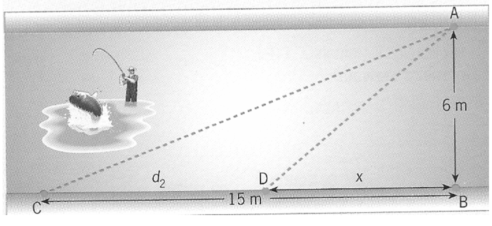


Determina ao fim de quanto tempo a distância entre os barcos é mínima. (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 236)



LG12.14 *Uma pessoa está num barco A a 3 km do ponto B da praia, mais próximo de A, e tem de ir ao outro ponto C da praia a 9 km de B.*

Se o barco se desloca à velocidade de 6 km/h e o tripulante pode correr à velocidade de 10 km/h como deve este proceder para chegar a C no mais curto tempo possível? (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 247)



N12.6. *Um rio tem 6 metros de largura.*

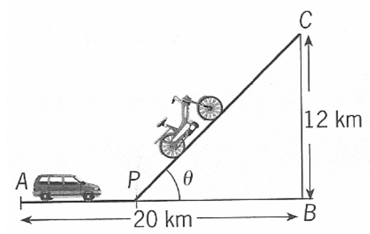
Um pescador encontra-se no local A, numa margem do rio, e pretende ir para C, na outra margem, demorando o menor tempo possível.

A distância de C ao local B, oposto a A, é de 15 m.

A velocidade do pescador na água é de 20 km/h e em terra é de 60 km/h.

Como deve proceder o pescador? (Neves, 12º V2, p. 220)

N12.15. *Minimizar o tempo: Observe a figura.*



Para ir de A a C o Vítor terá de usar dois meios de transporte: Carro de A a um ponto P de [AB] e de bicicleta de P a C.

De carro a velocidade média é de 60 km/h e de bicicleta é de 10 km/h.

O Vítor quer minimizar o tempo necessário para ir de A a C.

Quantos km deve o Vítor andar de carro? (Neves, 12º V3, p.110)

Problemas de Economia

N12.4. *Uma fábrica de frascos destinados a produtos de conserva pretende o seguinte:*

- *Construir uma embalagem cilíndrica com a capacidade de 48 π cm^3;*
- *A base inferior do cilindro é do mesmo material da superfície lateral que custa 2 euros por m^2;*
- *A base superior do cilindro é de um material mais raro, que custa 3 euros por m^2.*

Supondo que não haverá perdas de material determine, com aproximação às centésimas, a altura e o raio da base do cilindro de modo a minimizar o custo do material gasto. (Neves, 12º V2, p. 216)

C. Análise do período

Começando pela análise do programa oficial, constatamos que os problemas de optimização fazem parte do programa de 11º e de 12º ano. Estes estão inseridos no capítulo sobre Cálculo Diferencial. Também no 10º ano os problemas de optimização são abordados, mas no capítulo destinado às Funções e Gráficos. No 10º ano os problemas são abordados num contexto de problemas de máximos e mínimos; no 11º ano como aplicação das derivadas e no 12º são referidos como problemas de optimização. Nesta reforma o uso da calculadora gráfica já se torna obrigatório e os programas não fazem qualquer referência aos manuais escolares a utilizar.

O primeiro aspecto a salientar para este período é o facto de o número de problemas de optimização encontrados ser significativamente superior ao número de problemas encontrados nos períodos anteriores. Neste período encontrámos cerca de cento e dezanove problemas, enquanto que no período anterior foram apenas cinquenta e cinco, ou seja, temos neste período mais do dobro do que no período anterior. Acrescentamos também que, como os manuais analisados neste período são dos mesmos autores dos manuais do período anterior, muitos dos problemas encontrados neste período são os mesmos que tinham sido publicados no manual da reforma anterior. Assim, destes cento e dezanove problemas, cinquenta e um surgiram já nos manuais do período anterior. Apenas quatro problemas do período anterior não estão presentes nos manuais deste período.

O aumento mais significativo foi no número de problemas do 12º ano que passou de cinco referentes ao período anterior para cinquenta e um neste período. Este aumento está relacionado com o facto de, neste período, encontrámos problemas de vários tipos enquanto que no período anterior apenas contemplavam problemas relacionados com Trigonometria. Também os problemas dos manuais do 10º ano sofreram um aumento significativo, pois passaram de três no período anterior para dezanove neste período. Quanto ao 11º ano, o aumento foi irrelevante, uma vez que passámos de quarenta e sete problemas para quarenta e nove problemas neste período. O número de problemas encontrados distribui-se de forma muito semelhante pelos três autores. Nos manuais de Brito e outros **(JAFB)** existem trinta e quatro problemas; nos manuais de Lima e Gomes **(LG)** quarenta e quatro problemas e nos manuais de Neves **(N)** quarenta e um problemas.

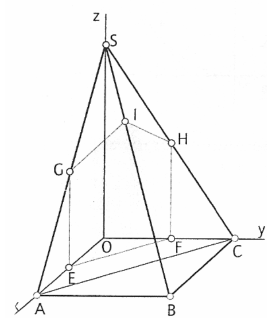
Outro aspecto a salientar é o facto de, neste período, o uso das calculadoras gráficas pelos alunos ser obrigatório. Por esse motivo, é possível, por parte dos alunos, resolver os problemas de optimização, graficamente, sem que seja necessário o auxílio da derivada para o cálculo dos extremos. Por isso, a forma de resolução dos problemas de optimização sofre algumas alterações relativamente aos períodos anteriores.

Olhemos agora para as características dos problemas.

Relativamente ao tipo de problema constatámos que a maioria dos problemas surge sob a forma de exercício (oitenta e oito); vinte e quatro sob a forma de exemplo (JAFB10.2, N10.2, N10.3, JAFB11.1, JAFB11.2, JAFB11.3, JAFB11.4, LG11.1, LG11.2, LG11.3, LG11.4, N11.1, N11.2, N11.5, JAFB12.1, JAFB12.12, LG12.1, LG12.2, LG12.3, LG12.4, N12.1, N12.2, N12.11, N12.12); três sob a forma de relatório (JAFB10.1, LG10.1, N12.10); dois sob a forma de exemplo resolvido (N12.6, N12.7) e dois sob a forma de demonstração (JAFB12.5, N12.16). Os manuais do 11º e do 12º ano mostram, primeiro, alguns exemplos ou exercícios resolvidos e, posteriormente, os outros exercícios. Nos manuais do 10º ano isso não acontece, uma vez que o manual de Jorge e outros assim como o manual de Lima e Gomes apresentam o primeiro problema de optimização sob a forma de relatório e o manual de Neves expõe o primeiro problema de optimização sob a forma de exercício. É ainda de referir que, relativamente aos manuais do 10º ano, em que surgem os primeiros problemas de optimização, o manual de Jorge e outros apenas apresenta um exemplo (JAFB10.2), o manual de Lima e Gomes não tem nenhum exemplo ou exercício resolvido e o manual de Neves tem dois exemplos. Examinemos um dos problemas que surge sob a forma de demonstração:

" ***(JAFB12.5)*** *Seja* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *um referencial o.n. e A, B, C, S definidos por*

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i}\,; \overrightarrow{OC} = \vec{j}\,; \overrightarrow{AB} = \vec{j}\,; \overrightarrow{OS} = \vec{k}$$



Seja a um número real do intervalo]0, 1[.

Pretende-se determinar a área máxima da secção definida pela intersecção do plano de equação x + y = a com a pirâmide [SOABC].

1. *Designemos por E, F, H, I e G os pontos de intersecção do plano com as arestas da pirâmide.*

   Prove que [GEFH] é um rectângulo.
2. *Determine as coordenadas de I e calcule a área do triângulo [GHI].*
3. *Seja f a função, área da secção, definida em]0, 1[por* $f(a) = a\sqrt{2}\,\dfrac{(4-3a)}{4}$.

   Estude a variação de f. Para que valor de a é esta área máxima?
4. *Mostre que o plano que determina a área máxima é paralelo a AC e OS e passa pelo baricentro do triângulo [OAC]."*

Infere-se que na última alínea deste problema é pedido para mostrar que a área é máxima quando o plano é paralelo a duas rectas e passa num determinado ponto.

Relativamente ao contexto em que os problemas se enquadram verifica-se que a maioria dos problemas são Geométricos/de Medida, sendo cinquenta e seis de Contexto Real de Medida, trinta e cinco de Geometria Métrica e quinze são de Geometria Analítica. Detectámos depois sete problemas de Física (LG11.16, LG11.23, LG12.2, LG12.4, LG12.14, N12.6, N12.15), quatro de Aritmética (LG11.8.a, LG11.8.b, N11.6.a. N11.6.b) e dois de Economia (N11.13, N12.4). Observámos ainda que os manuais de Jorge e outros não têm problemas de Física, Aritmética ou Economia, indicando apenas problemas Geométricos. No entanto e apesar de este manual apresentar apenas problemas Geométricos, estes são muito diversificados. Referimos ainda que apenas o manual de Neves nos mostra problemas de Economia.

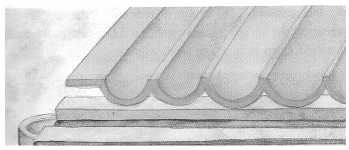
Passando agora para o que se pretende optimizar, vemos que na maioria dos problemas se pretende optimizar uma área (setenta); em vinte e três um volume; em dez uma distância; em cinco um perímetro; em cinco o tempo; em três o produto; em dois o custo e num a soma.

Quanto aos esquemas ou figuras auxiliares, vemos que na maioria dos problemas há uma figura com dados (setenta e um); em vinte e cinco uma figura simples e em vinte e três problemas não encontramos esquemas ou figuras auxiliares. Examinemos a seguir um exemplo de cada um destes problemas:

*“ **(JAFB12.8)** Que dimensões, com aproximação a 0,1 mm, deve ter uma caixa de conservas cilíndrica, com a capacidade de 1l, para que no seu fabrico se gaste o mínimo de material? (A espessura do material de que é feita não é de considerar).*

Compare a altura com o diâmetro da caixa.”

*“ **(N12.1)** A caleira de capacidade máxima*

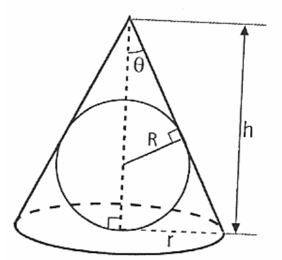


Uma folha rectangular de metal com 28 m de largura vai ser utilizada para construir uma caleira.

Pretende-se dobrar na perpendicular uma parte de cada lado da folha, de modo a que a capacidade da caleira seja máxima.

Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado?”

*“ **(JAFB12.18)** Um desenhador de peças de arte decorativas projecta pôr no mercado esferas de cobre dentro de cones de cristal transparentes.*



Cada esfera tem raio R e será comercializada num cone com dase de raio r e altura h (ver figura).

Muitos cones poderão ser fabricados tendo diferentes ângulos θ.

1. *Exprima o volume V de cada cone em função do ângulo θ.*
2. *Que valor deve ser escolhido para θ de modo que o cone a ser fabricado tenha volume mínimo? (Esta escolha minimiza a quantidade de cristal a gastar e dá o máximo destaque à esfera introduzida.)”*

Nestes problemas as figuras dão um apoio importante, auxiliando no raciocínio da resolução do problema. No primeiro problema não é dado qualquer apoio, no segundo é apresentada a ilustração da figura e no último, para além da ilustração encontramos alguns dados na figura.

Passando agora para o tipo de dados do enunciado, reparamos que a maioria dos problemas apresenta dados numéricos (cento e catorze), sendo apenas cinco os problemas com dados genéricos (JAFB10.3, LG10.3, JAFB12.11, JAFB12.18, N12.6). Portanto, os manuais do 11º ano não contêm problemas com dados genéricos e tanto os manuais de Lima e Gomes, como os manuais de Neves, apenas referem um problema com dados genéricos.

Em relação ao enunciado, apuramos que oitenta problemas apresentam um enunciado simples e apenas trinta e nove uma resolução encaminhada. Nos problemas dos manuais do 10º ano apenas três problemas apresentam um enunciado simples (JAFB10.3, N10.2 e N10.3). Nos problemas dos manuais do 11º ano apenas cinco apresentam uma resolução encaminhada (LG11.12, LG11.20, LG11.21, N11.7, N11.9). Por fim, nos manuais do 12º ano o número de problemas com enunciado simples é ligeiramente superior ao número de problemas com resolução encaminhada. Analisemos o exemplo a seguir:

*" **(N12.9)** O tanque de superfície mínima*

Um tanque com a forma de um cilindro, aberto na parte superior, tem de altura 4 metros e raio r m.

O volume do tanque é 1 m³.

a. Mostre que $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$

b. Sendo S a sua área total interior, mostre que, em m², $S = \dfrac{2}{r} + \pi r^2$

c. Determine o valor de r de modo que a área da superfície interior, S, seja a menor possível."

Vemos, neste problema, que as duas alíneas que precedem a questão de optimização são muito importantes na medida em que, a primeira auxilia na determinação de uma das variáveis em função da outra variável e a segunda alínea auxilia na determinação da função que posteriormente se pretende optimizar.

Indo agora para a função auxiliar, esta surge implicitamente na maioria dos problemas (oitenta e cinco) e surge explicitamente em apenas trinta e quatro. A função auxiliar aparece explicitamente em problemas geométricos em que, por exemplo, é dado o valor da área, perímetro ou volume de uma figura, ou em problemas aritméticos em que, por exemplo, é dado o valor da soma ou produto entre dois números. Surge implicitamente em problemas em que é necessário aplicar o Teorema de Pitágoras, noção de distância, semelhança de figuras, expressão de uma função, funções trigonométricas, noção de velocidade, ou seja, problemas em que não é imediato, a partir dos dados, a forma de obter uma variável a partir da outra.

Tratemos agora das noções aplicadas na resolução dos problemas. Uma vez que predominam os problemas geométricos, também as noções mais aplicadas são as geométricas. A fórmula de cálculo do perímetro é a noção mais aplicada, surgindo em vinte e oito problemas. Normalmente esta noção aplica-se em problemas em que é dado o perímetro de uma figura que nos auxilia a determinar a medida de um lado em função dos outros lados. O Teorema de Pitágoras aplica-se em vinte problemas, normalmente naqueles em que temos triângulos rectângulos, ou figuras inscritas. A fórmula da distância surge em vinte problemas e as funções trigonométricas surgem em dezassete problemas. As outras noções encontram-se em número mais reduzido; a semelhança de figuras surge em onze problemas; a fórmula da área surge em oito; a fórmula do volume surge em nove e a as magnitudes físicas em sete. Também a noção de soma surge em sete problemas e, por fim, a noção de função surge em três (função quadrática e equação da elipse). É de salientar que o número de problemas em que se utilizam as fórmulas trigonométricas sofreu um grande aumento. Os problemas dos manuais do 10º ano apenas aplicam quatro noções: Teorema de Pitágoras, noção de distância, fórmula do perímetro e formula da área. Existem oito problemas em que é utilizada mais do que uma noção, como por exemplo o Teorema de Pitágoras e a semelhança de figuras.

Quanto à estratégia para a resolução, apenas encontramos um problema histórico (JAFB10.1) e seis que saíram em exame (JAFB10.6, LG10.3, JAFB12.7, JAFB12.13, JAFB12.16, JAFB12.17). Dos restantes, a maioria já saiu em manuais anteriores (setenta e nove) e trinta e três surgem neste manual pela primeira vez.

As funções utilizadas são maioritariamente as polinomiais (setenta e três problemas). As restantes ocorrem em número semelhante: dezassete são trigonométricas, dezasseis são racionais e treze são irracionais. Nos manuais do 10º ano apenas encontramos um problema com uma função irracional (JAFB10.9), sendo todos os restantes com funções polinomiais e nos manuais do 11º ano apenas existe um em que se aplicam as funções trigonométricas (LG11.18).

Com respeito ao esquema de cálculo, utilizado nos vinte e seis problemas que apresentam resolução, verificamos que na maioria dos casos (quinze problemas) o extremo é determinado a partir do sinal da derivada e em quatro é calculado o vértice da parábola (JAFB10.2, N10.2, N10.3, JAFB12.1). Em três faz-se o cálculo apenas dos zeros da derivada (JAFB11.4, N12.11, N12.12), em três o estudo do sinal da segunda derivada

(N12.1, N12.2, N12.7), em cinco utiliza-se a calculadora gráfica (JAFB10.1, JAFB11.4, N12.1, N12.7, N12.12) e num problema a resolução é feita de outra forma (JAFB10.1), sendo neste caso, algebricamente e geometricamente. Existem cinco problemas que apresentam mais do que uma resolução (JAFB10.1, JAFB11.4, N12.1, N12.7, N12.12).

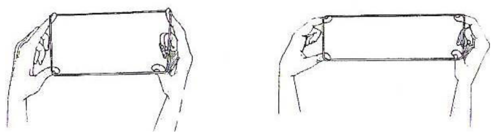
Olhando para a resolução dos problemas do 10º ano, verificámos que em quase todos se faz apenas o cálculo do vértice da parábola, não se utilizando ainda as potencialidades da calculadora gráfica para calcular os extremos. Apenas na resolução do problema JAFB10.1 não se faz o cálculo do vértice da parábola. Nos problemas do 11º ano apenas num se faz apenas o cálculo dos zeros da derivada e nos restantes calculam-se os zeros da derivada e faz-se o estudo do seu sinal. Por fim, nos problemas dos manuais do 12º ano, reparámos que estes apresentam uma maior diversidade de processos de resolução, sendo que os problemas em que indicam o estudo do sinal da segunda derivada e os problemas em que se utiliza a calculadora gráfica, para calcular os extremos, apenas surgem neste ano.

Em relação aos gráficos, figuras ou esquemas auxiliares não existem problemas que não apresentem um destes auxiliares. Na maioria dos problemas é encontrámos o quadro de monotonia (quinze problemas); em treze o gráfico da função e só num a figura (JAFB11.4). Verificamos ainda que em todos os problemas em que o extremo é calculado, fazendo o estudo do sinal da derivada, é apresentado o quadro de monotonia.

Apreciemos alguns exemplos de resoluções apresentadas nos manuais e de auxiliares à resolução:

*“ **(JAFB10.1)** Problema de Euclides*

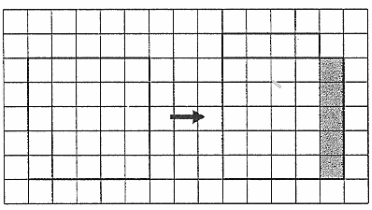
De todos os rectângulos com o mesmo perímetro, qual o que tem área máxima?



I. Geometricamente

A observação de diversos rectângulos, todos eles com o mesmo perímetro, sugere-nos que o quadrado é o que tem a maior área.

A demonstração geométrica é muito simples e sugestiva:



Partindo de um quadrado, constrói-se um rectângulo, que tem uma dimensão um pouco maior e a outra, outro tanto menor do que o lado do quadrado.

A barra roxa é maior que a barra azul, logo a área do quadrado inicial é maior do que a do rectângulo.

II. Algebricamente

Se considerarmos um quadrado com 10 cm de lado e diminuirmos sucessivamente uma unidade a um dos lados acrescentando-a ao outro, obtemos áreas progressivamente menores:

$10 \times 10 = 100$
$11 \times 9 = 99$ .... $(10 + 1)(10 - 1) = 99$
$12 \times 8 = 96$ .... $(10 + 2)(10 - 2) = 96$
$13 \times 7 = 91$ .... $(10 + 3)(10 - 3) = 91$
$14 \times 6 = 84$ .... $(10 + 4)(10 - 4) = 84$
$15 \times 5 = 75$ .... $(10 + 5)(10 - 5) = 75$

Constata-se que "10 + *" vezes "10 − *" é menor que 10×10 e que, quanto maior for *, menor é o valor do produto.

O enunciado algébrico correspondente ao resultado estabelecido geometricamente por Euclides é, então, o seguinte:

Se $p + q$ for constante, então $p \times q$ é máximo quando $p = q$.

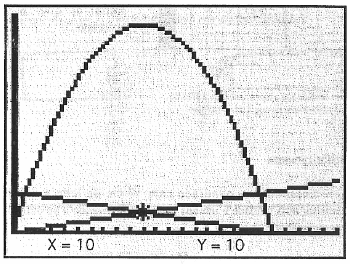
Todos os rectângulos acima considerados têm o mesmo perímetro (40 cm); o de maior área é precisamente o quadrado com 10 cm de lado.

III. Recorrendo à calculadora gráfica

Consideremos ainda a família dos rectângulos cujo comprimento e largura somam 20 unidades.
Se considerarmos que a largura vale **x**, então o comprimento é igual a **20 − x**.

Introduzindo na calculadora as funções
$y_1 = x$
$y_2 = 20 - x$
$y_3 = y_1 \times y_2$

obtemos, depois de definir adequadamente o rectângulo de visualização os seguintes gráficos:

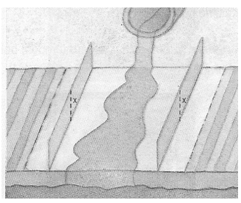


A linha curva – uma **parábola** – corresponde à representação gráfica da função definida por **y = x(20 − x)** ou seja, a função que representa a área do rectângulo de largura **x** e comprimento **20 − x**.

A leitura das coordenadas do **vértice** da parábola – ponto correspondente ao valor máximo da função – conduz-nos a:
$x = 10$ e $y = 100$ (este último é o valor da área máxima).

Verificámos que este problema apresenta uma resolução interessante uma vez que é feita de três formas diferentes: Geometricamente, algebricamente e utilizando a calculadora gráfica.

*" **(N10.3)** Tem-se uma "folha" de metal com 50 cm de largura.*



Pretende-se fazer uma peça para conduzir água de uma conduta de águas pluviais, como mostra a figura, dobrando de cada lado, na vertical, uma parte da folha com a mesma altura x.

Para que a quantidade de água transportada seja máxima, qual deve ser o valor de x?

Para que a quantidade de água transportada seja máxima deve-se considerar máxima a secção feita por um plano perpendicular à base.

$A = (50 - 2x) \cdot x$

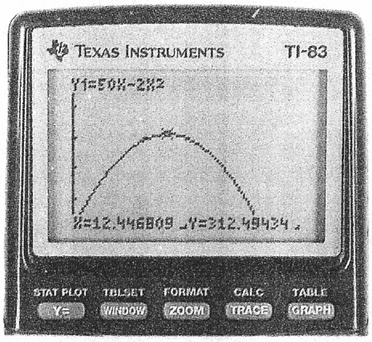
$A = 50x - 2x^2$

$A = -2x^2 + 50x$

$A = -2\left(x^2 + 25x + \frac{625}{4}\right) + \frac{625}{2}$

$A = -2\left(x + \frac{25}{2}\right)^2 + \frac{625}{2}$

O vértice da parábola é $\left(\frac{25}{2}, \frac{625}{2}\right)$.



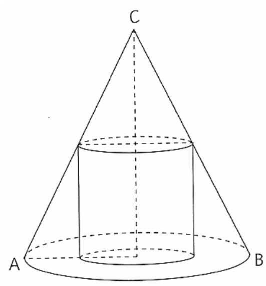
A área máxima consegue-se para $x = 12{,}5$ cm e é $312{,}5$ cm^2.

Confirme-se os cálculos usando uma calculadora gráfica.

Na resolução deste problema a autora determina o vértice da parábola, concluindo, de imediato, que esse é o valor para o qual a área é máxima.

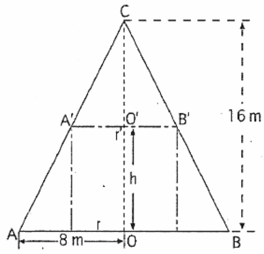
“ ***(JAFB11.4)*** *Num circo, uma lâmpada emite um cone de luz de altura 16m e raio da base 8m. Para um trabalho dos trapezistas, é preciso saber que espaço é utilizado dentro desse cone de luz. Chegou-se à conclusão que interessaria o espaço limitado pelo cilindro interior ao cone de volume máximo.*

Conhecer a altura e o raio da base desse cilindro é essencial para o trabalho dos trapezistas.



Conhecer a altura e o raio da base desse cilindro é essencial para o trabalho dos trapezistas.

Analisemos o que ficou registado da resolução do Tiago e da Rita.
R – *Por onde começar?*
T – Colocando os dados: 16 m de altura, 8 m de raio da base do cone e as incógnitas, h e r, na figura.
R – Observando a figura, parece que basta raciocinar num esboço dum corte plano, pois o que está em jogo são as alturas e os raios dos dois sólidos.

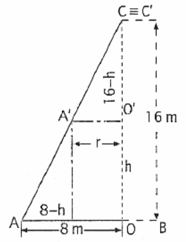


Esbocemos e usemos variáveis.

T – h, altura do cilindro, e **r**, raio da base do cilindro, estão relacionados com a altura do cone e o seu raio por meio de uma relação de semelhança entre o triângulo A'O'C' e AOC, dado que são triângulos de lados respectivamente paralelos, isto é, de ângulos respectivamente iguais. Então:

$\frac{r}{8} = \frac{16-h}{16}$, donde podemos exprimir r em função de **h** (altura)

$$r = \frac{8\,(16-h)}{16} = \frac{16-h}{2} \qquad (1)$$



R – Mas há uma condição para o volume: é a de ele ser máximo.

O volume é a área da base (πr^2) vezes a altura (h), então $V = \pi\left(\frac{16-h}{2}\right)^2 . h$
V é uma função de h

T – Para sabermos para que valor de h é máximo…

Vou já meter na calculadora $y_1 = \left(\frac{16-x}{2}\right)^2 . x$ e depois pesquiso com o TRACE ou a TABLE .

R – Está bem, mas não pensas no rectângulo de visualização?

T – Vamos lá ver qual é o que convém.

O raio só pode variar de 0 a 8 m e h (altura) só pode variar de 0 a 16.
Então, para o eixo das abcissas, temos que ver pelo menos o domínio, que é]0, 16[(vê como pode variar a altura).

R – E, para o eixo das ordenadas, o mínimo volume que nos interessa é zero, e o máximo é, quando muito, o volume do cone, que toma o valor de um terço da área da base vezes a altura.

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 64 \times 16 \simeq 1072$$

… um bom rectângulo de visualização pode ser [–1, 20] × [–1, 1000]

T – Já meti a função $y_1 = \pi\left(\frac{16-x}{2}\right)^2 . x$

Também já teclei GRAPH e depois TRACE

Para h, ou seja x = 5,32, vem V, isto é $y_1 = 476{,}5$

Com um ZOOM IN obtenho $h \simeq 5{,}42$ e $V \simeq 475{,}2$

Com dois ZOOM IN obtenho $h \simeq 5{,}32$ e $V \simeq 476{,}54$

Com três ZOOM IN obtenho $h \simeq 5{,}33$ e $V \simeq 476{,}59$

A altura é de 533 cm, a menos de 1 cm, e o volume é 476,6, a menos de uma décima de m^3.

R – Mas acho que podemos experimentar o processo analítico.
Eu acho que se quero alguma coisa com variação, como o máximo de uma função, penso na derivada. A derivada não é quem "traduz" a variação duma função?
T – Espera, tens razão, e se quero o máximo, quero um extremo, e se há derivada aí, ela é zero!
R – Há derivada porque a função é polinomial!
T – É?
R – Olha, desenvolvendo o quadrado de

$$y = \pi\left(\frac{(16-x)}{2}\right)^2 . x \quad \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}(256 - 32\,x + x^2)\,x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}(256\,x - 32\,x^2 + x^3)$$

Vês? É uma função de 3.° grau e, queres ver?...

T – Agora também já vejo: $V = 256\,\frac{\pi}{4}\,h - 32\,\frac{\pi}{4}\,h^2 + \frac{\pi}{4}\,h^3$

E então a derivada é

$$V' = \frac{\pi}{4}(256 - 64\,h + 3\,h^2)$$

E agora, igualando a zero e resolvendo

$h = \frac{64 \pm \sqrt{4096 - 4 \times 3 \times 256}}{6}$, obtemos $h = \frac{16}{3} \vee h = 16.$

R – Mas obtivemos dois valores!
T – Pois, mas temos que ver o domínio!
R – Tens razão, 16 não pertence ao domínio, pois um cilindro com essa altura no interior do cone de 16 m de altura *não teria raio*, isto é, não existe! $\frac{16}{3}$ é o valor exacto e a aproximação às décimas é 5,3 m, obtido pela calculadora.
T – Voltemos a ler, para saber o que fazer.
R – Acho que só falta responder ao problema, não é?

T – Falta calcular o raio da base.

Calculando **r** em (1) vem:

$$r = \frac{16 - \frac{16}{3}}{2} = \frac{16}{3} \simeq 5{,}3$$

T e R – E agora a resposta: *O espaço que interessa ao trapezista é o interior dum cilindro cuja altura é 5,3 m e a base tem de raio 5,3 m.*

Arranje um parceiro, relembre as sugestões dadas sobre a resolução de problemas e discuta com ele o texto proposto pelo Tiago e pela Rita.

Esta é, sem dúvida, uma resolução interessante, uma vez que as autoras apresentam a forma de resolução do problema feita por dois alunos, explicando cada passo, detalhadamente. Essa resolução é feita de duas formas: primeiro recorrendo à calculadora gráfica e depois calculando os zeros da derivada.

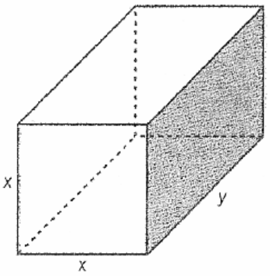
*" **(N12.7)** Um depósito de água aberto tem a forma de um prisma rectangular com duas faces laterais quadradas. A área total do depósito (Sem tampa) é de 54 m².*

Seja x a altura do tanque:

c. *Mostre que o volume, V m³, do tanque é dado por:*

$$V = 18x - \frac{2}{3}x^3$$

d. *Determine s de modo a que o volume seja máximo.*



$A_t = 3xy + 2x^2$

$54 = 3xy + 2x^2 \iff y = \dfrac{54 - 2x^2}{3x}$

$V = x^2\, y$

$V = x^2 \left(\dfrac{54 - 2x^2}{3x}\right)$; $V = 18x - \dfrac{2}{3} x^3$

O volume é dado, em m^3 , por:

$V = 18x - \dfrac{2}{3} x^3$

$V(x) = 18x - \dfrac{2}{3} x^3$; $V'(x) = 18 - 2x^2$

$V'(x) = 0 \iff 18 - 2x^2 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = -3 \vee x = 3$.

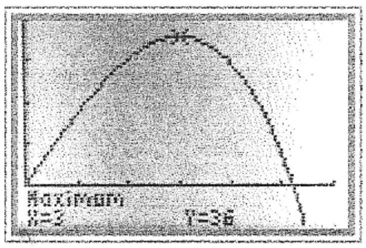
A solução $x = -3$ não serve o problema.

Considere-se: $x = 3$; $v''(x) = -4x$

$v''(18) = -4 \times 3 < 0$

O volume é máximo quando $x = 3$ m .

Confirme-se com a calculadora gráfica:



Nesta resolução a autora calcula os zeros da derivada e o sinal destes na segunda derivada.

Observámos então que em três das resoluções se detecta a preocupação por parte dos autores, de fazer a confirmação dos resultados obtidos, através da calculadora gráfica.

Por fim, quanto ao valor pedido, verificamos que este ocorre, na maioria das vezes, de forma explícita (oitenta e um problemas), surgindo de forma implícita em trinta e cinco. Nos problemas do 10º ano apenas em três o valor pedido aparece de forma implícita.

Assim sendo, fica este período caracterizado por problemas enunciados sob a forma de exercício. Há essencialmente problemas geométricos, em contexto real de medida, pretendendo-se optimizar, em grande parte dos casos, uma área. Existe um decréscimo de problemas com figuras com dados. O enunciado é simples, na maioria dos problemas e com a função auxiliar a surgir implicitamente. Quanto às noções utilizadas, verificamos que as mais aplicadas são o teorema de Pitágoras, a noção de distância e a fórmula do perímetro. Grande parte dos problemas já tinha surgido em manuais anteriores e a função polinomial é a mais utilizada.

Em relação ao esquema de cálculo dos extremos, tal como no período anterior, na maioria dos casos, são calculados os zeros da derivada e é feito o estudo do sinal, através do quadro de monotonia. No entanto, um grande número de resoluções apresenta o gráfico obtido através da calculadora gráfica.

Os dados obtidos na análise dos problemas de optimização deste período estão sintetizados na tabela a seguir.

3.5.2. A REFORMA DE SANTOS SILVA (2001)

A. Análise do programa oficial

Em 22 de Fevereiro de 2001, sendo a pasta da educação ocupada por Augusto Ernesto Santos Silva, é homologado o novo programa para a disciplina de Matemática. A realização destes novos programas foi coordenada pelo Professor Doutor Jaime Carvalho e Silva, professor do Departamento de Matemática, da Universidade de Coimbra.

A disciplina fica, com esta reforma, dividida em três disciplinas: Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS). A primeira faz parte do currículo dos Cursos Gerais de Ciências Naturais, de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socio-económicas; a segunda para os Cursos Tecnológicos[21] e para o Curso De Artes e a terceira para Curso Geral de Ciências Sociais e Humanas Curso Tecnológico de Ordenamento do Território.

A aplicação destes novos programas iniciou-se no ano lectivo de 2003/2004 para a Matemática A, no 10º ano, com uma carga horária semanal de 3 aulas de 90 minutos, e no ano lectivo seguinte para a Matemática B e para a MACS.

Iremos apenas analisar o programa da Matemática A, uma vez que é o que "substitui" a matemática leccionada até então.

MATEMÁTICA A

Cursos Gerais de Ciências Naturais, de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socio-económicas

10º Ano

II – Função, gráfico (gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal) e representação gráfica.

- Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos. Tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para as seguintes classes de funções:
    - Funções quadráticas;
    - Função módulo;

[21] Construção Civil, Electrotecnia/Electrónica, Informática, Mecânica, Química e Controlo Ambiental, Ambiente e Conservação da Natureza, Desporto, Administração, Técnicas Comerciais e Serviços Jurídicos.

E recorrendo a:

a. Análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções dessas classes (considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez);

b. Transformações simples de funções: dada a função, esboçar o gráfico das funções definidas por $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = af(x)$, $y = f(ax)$, $y = |f(x)|$, com a positivo ou negativo, descrevendo o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.

(*) Referência breve à parábola, a algumas das suas principais propriedades e à sua importância histórica.

- Resolução de problemas envolvendo funções polinomiais (com particular incidência nos graus 2, 3 e 4).
- Possibilidade de decomposição de um polinómio em factores (informação).

Decomposição de um polinómio em factores em casos simples, por divisão dos polinómios e recorrendo à regra de Ruffini. Justificação desta regra.

(*) Estudo elementar de polinómios interpoladores.

Na parte dedicada Às indicações metodológicas encontramos a informação seguinte:

"Na resolução de problemas deve ser dada ênfase especial à Modelação Matemática (por exemplo, usando dados concretos recolhidos por calculadoras gráficas ou computadores acoplados a sensores adequados). Deve ser dada ênfase especial à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos, nomeadamente quando forem usadas inequações. A resolução numérica ou gráfica deve ser sempre confrontada com conhecimentos teóricos. Deve ser usada a resolução analítica sempre que a natureza do problema o aconselhar, por exemplo quando for conveniente decompor o polinómio em factores. O estudo analítico dos polinómios deve ser suscitado pela resolução de problemas e aí integrado. A resolução analítica de problemas deve ser sempre acompanhada da verificação numérica ou gráfica."

Tal como no programa anterior, relativo ao 10º ano, também neste programa os problemas de optimização não surgem explicitamente, mas sim implicitamente no estudo das funções.

Quanto à Matemática A, o programa de 11º ano contemplava o estudo de três temas: Geometria no Plano e no Espaço, Funções Racionais, Taxa de Variação e Sucessões reais.

É de referir que o tema Geometria no Plano e no Espaço inclui, agora, na parte final, um novo ponto dedicado à programação linear. O programa anterior já fazia referência ao tema, mas só nesta reforma os conteúdos a abordar ficam bem definidos.

Examinemos como ficou estruturado o novo programa de Matemática A, em relação ao tema Cálculo Diferencial:

MATEMÁTICA A

Cursos Gerais de Ciências Naturais, de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socio-económicas

11º Ano

Tema II – Introdução ao Cálculo Diferencial I. Funções racionais e com radicais. Taxa de Variação e Derivada

- Resolução de problemas envolvendo funções ou taxa de variação
- Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando a calculadora gráfica, para a seguinte classe de funções:

$$f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$$

Neste estudo enfatiza-se a analiso dos efeitos das mudanças dos parâmetros nos gráficos das funções de uma mesma classe.

- Conceito intuitivo de limite, de $+\infty$ e $-\infty$
- Noção de **taxa média de variação**; cálculo da taxa média de variação. Noção de taxa de variação; obtenção da taxa de variação (valor para que tende a t.m.v. quando a amplitude do intervalo tende para zero) em casos simples.
- Interpretação geométrica da taxa de variação; definição de derivada (recorrendo à noção intuitiva de limite).
- Determinação da derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais do 2º e 3º grau, função racional do 1º grau, função módulo.
- Constatação, por argumentos geométricos, de que:
  i. Se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo;
  ii. Se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto.

(*) Referência à hipérbole; informação das suas principais propriedades e da sua importância histórica.

- Funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos).
- Soma, diferença, produto, quociente e composição de funções no contexto do estudo de funções racionais, envolvendo polinómios do 2º e 3º grau.
- Inversa de uma função. Funções com radicais quadráticos ou cúbicos.

Operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente fraccionário. Simplificações de expressões com radicais (não incluindo a racionalização).

O ponto que refere a determinação da derivada em casos simples refere as seguintes indicações metodológicas:

Podem ser postos alguns problemas simples que envolvam derivadas no contexto de aplicações.

Verificamos então que, apesar de o programa não referir o estudo dos problemas de optimização, refere que se ponham problemas de aplicação das derivadas.

A respeito da Matemática A, o programa de 12º ano contemplava o estudo de três temas: Probabilidades e Combinatória, Introdução ao Cálculo Diferencial II e por fim Trigonometria e Números Complexos.

Vejamos como ficou estruturado o novo programa de Matemática A, no tema Cálculo Diferencial II:

MATEMÁTICA A

Cursos Gerais de Ciências Naturais, de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socio-económicas

12º Ano

- Funções exponenciais e logarítmicas
- Teoria de limites
- Cálculo Diferencial

- Funções deriváveis. Regras de derivação (demonstração da regra da soma e do produto; informação das restantes regras). Derivadas de funções elementares (informação baseada em intuição numérica e gráfica). Segunda definição de número e. Teorema da derivada da função composta (informação).
- Segundas derivadas e concavidade (informação baseada em intuição geométrica)
- Estudo de funções em casos simples.
- Integração do estudo do Cálculo Diferencial num contexto histórico.
- **Problemas de optimização**

- Funções seno co-seno e tangente
  - Estudo intuitivo com base no círculo trigonométrico, tanto a partir de um gráfico particular, como usando a calculadora gráfica ou computador.
  - Estudo intuitivo de

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x}$$

  - Derivadas do seno, co-seno e tangente
  - Utilização de funções trigonométricas na modelação de situações reais.

Em relação ao ponto que refere os problemas de optimização surgem as seguintes indicações metodológicas:

> Os **problemas de optimização** devem ser escolhidos de modo que o estudante trabalhe de uma forma tão completa quanto possível a modelação. É uma boa oportunidade para discutir com os estudantes o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual.

Assim, o programa de Matemática A para o 12º ano, contempla, tal como na reforma anterior, o estudo dos problemas de optimização no capítulo dedicado ao Cálculo Diferencial, pretendendo-se deste modo que o aluno fique com a noção da aplicabilidade do conceito de derivada no mundo actual.

Apurámos, então, que este programa, em relação às funções e ao cálculo diferencial, não sofreu alterações. O objectivo desta reforma era essencialmente o de criar a Matemática B e a Matemática Aplicada às Ciências Sociais, sendo que a Matemática A corresponde, essencialmente, à Matemática da reforma anterior.

Este programa não faz nenhuma referência a manuais para o ensino.

Foi esta a última reforma legislada até ao momento em que terminou esta parte da nossa investigação.

B. Análise dos Manuais Escolares

Desta forma, também os manuais escolares relativos à Matemática A (até agora Matemática) não sofreram alterações e nem os manuais da autoria de Maria Neves, da Porto Editora, nem os de Ana Jorge e outras, da Areal Editores, apresentam estrutura e conteúdos idênticos aos analisados, anteriormente, dos mesmos autores.

Por sua vez o manual de Yolanda Lima, Francelino Gomes e Cristina Viegas sofreu algumas alterações. A primeira a referir é relativamente aos autores do manual, pois a autora Yolanda Lima apenas faz parte do manual do 10º e a autora Cristina Viegas apenas do manual a partir desta reforma, sendo co-autora dos manuais para os três anos lectivos. Quanto à estrutura, verificamos que o manual passou a estar dividido em três volumes, sendo cada um destes, dedicado a cada um dos três temas.

A alteração mais relevante, relativamente à estrutura, prende-se com o facto de o manual apresentar agora um conjunto de testes ao longo dos capítulos. Cada um dos testes está dividido em duas partes, uma parte com cinco questões de escolha múltipla e outra parte com cinco questões de resposta aberta. As questões não são só do tema que se está a abordar, mas inclui também questões de temas anteriores.

Deste modo, o manual deixa de ter um papel apenas de material de apoio para o aluno na aula, mas tem também como objectivo fazer uma preparação do aluno, ao longo do ano, para o exame nacional que se realiza no final do 12º ano.

Uma vez que os problemas de optimização, que os manuais escolares contêm, não sofreram alteração em relação aos problemas encontrados nos mesmos manuais, no período anterior, julgámos que não se justifica apresentar de novo os problemas, bem como a sua análise.

CONCLUSÃO

A. Análise do programa oficial

Após a análise das reformas curriculares sofridas pela disciplina de Matemática ao longo do século XX e XXI, verificámos que estas foram sofrendo grandes alterações. Estas foram consequência da situação política do país e também das correntes pedagógicas vividas a nível Internacional.

Assim, através da análise realizada a cada uma das reformas curriculares, podemos atestar que as aplicações da derivada não foram abordadas em todas as reformas curriculares e não pertenciam sempre ao mesmo ano lectivo. A primeira referência encontrada à abordagem da derivada foi na reforma de 1905, onde esta era estudada na 7ªclasse (actual 11º ano), no capítulo da Álgebra, mas esta reforma não contempla o estudo das aplicações da derivada.

A primeira referência nos programas oficiais, ao estudo de aplicações da derivada, deu-se na reforma de 1918. Nesta foi criado um capítulo consagrado ao Cálculo Infinitesimal, na 6ª classe (Actual 10º ano), onde se abordava não só o estudo da derivada, mas também as aplicações desta. A reforma seguinte, de 1919, era muito semelhante à anterior, mas a classe em que se fazia o estudo da derivada e suas aplicações passa da 6ª classe para a 7ª classe.

A partir da reforma seguinte, de 1926, as aplicações da derivada foram suprimidas do programa, voltando apenas a fazer parte deste, a partir da reforma de 1947. Nesta, a derivada era abordada na 7ª classe (actual 11º ano). Estava inserida no capítulo dedicado à Álgebra e fazia referência ao estudo de aplicações da derivada à Física. Na reforma posterior, de 1954, a derivada passa para o ano lectivo anterior, ou seja para a 6ª classe (Actual 10º ano), continua a estar inserida no capítulo dedicado à Álgebra e pretende-se apenas que se abordem aplicações desta, não se especifica o tipo de aplicações.

A reforma de 1963, marca a introdução das Matemáticas Modernas em Portugal. A partir desta a derivada deixa de pertencer ao capítulo dedicado à Álgebra, passando a fazer parte do capítulo da Análise ou do Cálculo Diferencial. Assim, esta reforma aborda a derivada no 7º ano (actual 11º ano), no capítulo respeitante ao Cálculo Diferencial. Este programa refere, pela primeira vez, o estudo dos máximos e mínimos.

A esta seguiu-se a reforma de 1973. Nesta, a derivada continua a fazer parte do 5º ano (correspondente ao 7º na reforma anterior), incluída no capítulo dedicado à Análise Infinitesimal. Também esta refere o estudo das aplicações das derivadas, mas agora, pela primeira vez, a problemas concretos. Esta reforma marca o fim do período ditatorial em Portugal, que se deu a 25 de Abril de 1974.

A primeira alteração nos programas, efectuada após o fim do regime Ditatorial, foi feita ainda no mesmo ano, mas apenas o programa da Matemática Clássica sofreu alterações, sendo semelhante ao anterior, embora menos extenso. Este programa era seguido por algumas turmas onde ainda não se leccionavam as matemáticas modernas. Nele a derivada estava presente no 1º ano do Curso Complementar (equivalente ao 11º ano actual). Pertencia ao capítulo do Cálculo e este mencionava que se estudassem aplicações da derivada a problemas de máximos e mínimos.

Em 1979 e em 1980 são publicados novos programas para o 11º e 12º ano, respectivamente. Nestes, a derivada é estudada no 11º e no 12º ano. No 11º ano está enquadrada no capítulo dedicado às derivadas, sendo o último ponto deste capítulo dedicado às aplicações das derivadas. No 12º ano esta está na parte dedicada à Análise, no capítulo dedicado à derivada. Este apenas pretende introduzir mais regras do cálculo diferencial, não referindo o estudo de aplicações.

Uma vez que este programa era muito extenso, foi publicado, em 1983, um novo programa, menos extenso, para a disciplina de Matemática do 12º ano. O tema em estudo não sofreu nenhuma alteração em relação ao anterior.

Também em 1988 o programa veio a sofrer mais um encurtamento. Sendo suprimido o seguinte ponto: *A noção de diferencial de uma função num ponto; interpretação geométrica; regra de diferenciação* onde se referia a resolução de questões aplicando o conceito de derivada.

Como consequência da Lei de Bases do Sistema Educativo, publicada em 1986, os programas sofreram uma nova alteração. Em 1991 foram publicados os novos programas para aplicação em regime de experiência pedagógica. Nestes novos programas a derivada continua a ser abordada no 11º ano, no sub – capítulo dedicado às derivadas. Este refere a aplicação da derivada ao estudo de máximos e mínimos, mencionando como um dos objectivos a resolução de problemas de máximos e mínimos e apresentando nas indicações metodológicas o estudo, pela primeira vez, de problemas de optimização. Também o programa do 12º ano contempla o estudo da derivada e refere nas indicações metodológicas o estudo de funções irracionais ligadas a problemas de optimização.

Em 1997 fez-se um ajustamento a este programa, introduzindo-se então o uso obrigatório das calculadoras gráficas no Ensino Secundário. Neste programa a derivada continua a ser introduzida no 11° ano, no capítulo dedicado ao Cálculo Diferencial. Expõe nos seus conteúdos o estudo de aplicações da derivada e aponta no desenvolvimento dos temas a resolução de problemas de aplicação, envolvendo derivadas. O programa do 12º ano também aborda a derivada no capítulo dedicado ao Cálculo Diferencial, fazendo menção, explicitamente, nos conteúdos programáticos, o estudo de problemas de optimização.

Por fim, em 2001 foi homologado o novo programa para a Matemática A. Este programa também contempla, no 11° ano, no sub – capítulo da derivada o estudo de problemas de aplicação simples que envolvam derivada. No 12º ano o programa faz também referência, no final do estudo do Cálculo Diferencial, o estudo dos problemas de optimização.

As principais características de cada uma das reformas curriculares, em relação aos problemas de optimização, foram catalogadas na tabela que apresentamos na página seguinte.

Características / **Reforma**		**1905**	**1917**	**1918**	**1919**	**1926**	**1927**	**1929**	**1930**	**1931**	**1934**	**1936**	**1947**	**1954**	**1963**	**1973**	**1974**	**1979**	**1983**	**1991**		**1997**		**2001**	
Ano em que aborda a derivada	Não aborda											X													
	4º					X	X																		
	4ª/6º/10º			X				X	X	X	X			X			X								
	5ª/7º/11º	X	X		X								X		X	X		X		X		X		X	
	12º																		X		X		X		X
Capítulo em que se insere a derivada	Álgebra	X	X			X	X	X	X	X	X		X	X											
	Cálculo Infinitesimal			X	X											X	X								
	Cálculo Diferencial														X							X	X	X	X
	Derivada																	X	X	X	X				
Forma de abordar os P. O.	Não Aborda	X	X			X	X	X	X	X	X														
	Aplicação da derivada			X	X									X		X		X	X			X		X	
	Problema de max. e mín.														X		X			X					
	Problema de optimização																			X	X		X		X
	Aplicação à Física												X									X		X	
Máquina de calcular utilizada	Não utiliza	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X								
	Calculadora Simples																								
	Calculadora Científica																	X	X	X	X				
	Calculadora Gráfica																					X	X	X	X
Manuais Escolares	Faz sugestão	X	X			X	X				X														
	Não faz sugestão			X	X															X	X	X	X	X	X
	Manual único												X												

B. Análise dos manuais

À medida que os programas oficiais foram sofrendo alterações, em relação ao estudo dos problemas de optimização, também os manuais escolares foram sendo reajustados, relativamente aos problemas de optimização. Façamos agora a análise às alterações sofridas pelos manuais quanto às características dos problemas de optimização. Os dados apresentados nas tabelas a seguir estão sob a forma de percentagem. Apenas indicámos os dados a partir do período 3.2 uma vez que no período 3.1 não encontramos problemas de optimização nos manuais.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Tipo Problema (T)	TEP	11	37	21	22	20
	TER	6	30	16	0	2
	TEX	78	33	61	76	74
	TDM	6	0	2	0	2
	TR	0	0	0	2	3

Deste modo, e em relação ao tipo de problema, no período 3.2 a maioria surgiu sob a forma de exercício e não encontrámos problemas em que se pretendesse fazer um relatório. No período 3.3.2 observámos que os exemplos, exercícios resolvidos e exercícios surgem de uma forma muito equilibrada mas, em contrapartida, não encontramos nenhum problema sob a forma de demonstração ou relatório. No período seguinte, período 3.3.3 verificamos que a distribuição já não é tão equilibrada, sendo o número de problemas sob a forma de exercício, maior do que os restantes e também este não tem exercícios sob a forma de relatório. No período 3.4, a percentagem de problemas sob a forma de exemplo e sob a forma de exercício é muito equilibrada. Figuram pela primeira vez exercícios em que se pretende que os alunos elaborem um relatório e não encontramos exercícios resolvidos ou demonstrações. Por fim, no período 3.5, a distribuição é idêntica à do período anterior, com a excepção de terem surgido novamente exercícios resolvidos e demonstrações.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Contexto do Problema (C)	CGM	56	58	43	35	29
	CGA	0	2	9	7	13
	CAR	22	12	7	7	3
	CRM	22	21	30	42	47
	CRF	0	5	7	5	6
	CRE	0	2	4	4	2

Quanto ao contexto dos problemas, no período 3.2., a maioria dos problemas são de Geometria Métrica e os restantes distribuem-se de forma igual entre Aritméticos e de contexto real de medida e não há problemas de Geometria Analítica, Física ou Economia. No período 3.3.2, a percentagem de problemas de Geometria Métrica e de contexto real de medida é muito semelhante à anterior. No entanto, diminuem os problemas Aritméticos e surgem, em número reduzido, problemas de Geometria Analítica, Física e Economia. No período 3.3.3 o número de problemas de Geometria Métrica começa a diminuir, aumentando o número de problemas de contexto real de medida e de Geometria Analítica. Os problemas de Física ou Economia sofrem um ligeiro aumento e os Aritméticos diminuem. O período 3.4 é muito semelhante ao anterior, com excepção dos problemas de Geometria Métrica que continuam a diminuir e os de contexto real de medida que continuam a aumentar. Por fim, no período 3.5, vemos, que tal como nos três períodos anteriores, os problemas de Geometria Métrica continuam a diminuir e que os de Contexto Real de Medida continuam a aumentar. Também os problemas de Geometria Analítica sofrem um aumento, os de Física sofrem um ligeiro aumento e os de Aritmética e Economia diminuem.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Função a optimizar (O)	**OD**	0	9	11	5	8
	OA	61	40	45	56	59
	OPE	6	7	9	5	4
	OV	11	28	23	20	19
	OPR	11	9	2	5	3
	OS	11	5	5	2	1
	OT	0	0	2	4	4
	OC	0	2	4	2	2

Analisemos agora as funções a optimizar que surgiram ao longo dos períodos. Verificamos que em todos os períodos a função que mais se optimiza é a área e a seguir o volume. Todas as outras surgem em número reduzido. Apurámos ainda que no período 3.2 não existem problemas em que se pretende optimizar uma distância, tempo ou custo e no período 3.3.2 ainda não encontrámos problemas em que se pretenda optimizar um custo. O período mais equilibrado é o 3.2 em que a percentagem de problemas em que se pretende optimizar um volume, produto ou soma é a mesma. Nos outros períodos aumentou a percentagem de problemas em que se optimiza um volume, mas os outros diminuem.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Esq./ Fig. auxiliares (F)	FSE	100	79	68	27	19
	FFS	0	5	5	16	21
	FFD	0	16	27	56	60

Relativamente aos esquemas ou figuras auxiliares que encontramos no enunciado dos problemas confirmamos que no período 3.2. nenhum dos enunciados vem acompanhado de qualquer tipo de esquema ou figura auxiliar. O número de problemas sem qualquer tipo de esquema ou figura auxiliar foi diminuindo, em cada um dos períodos seguintes e a partir do período 3.4 o número de problemas, que possuíam figuras com dados, passa a ser superior ao número de problemas sem auxiliares. Também o número de problemas com figuras simples foi aumentando.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Tipo de dados (D)	DN	61	49	86	98	96
	DG	39	51	14	2	4

Em relação ao tipo de dados, com excepção do período 3.3.2, em todos os restantes, o número de problemas com dados numéricos era superior ao número de problemas com dados genéricos. É ainda de referir que a percentagem de problemas com dados numéricos é significativamente superior à percentagem de problemas com dados genéricos nos três últimos períodos.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Tipo de en. (EN)	ENS	78	91	82	78	67
	ENE	22	9	18	22	33

No que diz respeito ao enunciado, em todas as reformas surgem mais problemas com enunciado simples do que com resolução encaminhada. No entanto, a partir da reforma 3.3.2, o número de problemas com enunciado encaminhado foi aumentando enquanto que o número de problemas com enunciado simples foi diminuindo.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Func./ Eq. auxiliar (A)	AE	67	37	43	31	29
	AI	33	63	57	69	71

Passando agora para a função/equação auxiliar, apenas no primeiro período existem mais problemas em que a função auxiliar aparece de forma explícita do que de forma implícita. Nos restantes períodos existem mais problemas em que a função auxiliar surge de forma implícita do que de forma Explícita. No entanto, com excepção do período 3.3.2, o número de problemas em que a função auxiliar surge de forma explícita vai diminuindo e o número de problemas em que a função auxiliar surge de forma implícita vai aumentando.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Noções aplicadas (N)	NTP	22	28	21	20	17
	ND	6	2	16	11	17
	NSF	0	5	9	9	9
	NPE	22	14	18	24	24
	NAR	6	28	18	7	7
	NVO	22	5	9	7	8
	NSO	17	12	5	11	6
	NPR	6	7	4	0	0
	NF	0	0	2	4	3
	NFT	0	0	0	9	14
	NMF	0	2	7	5	6

Quanto às noções aplicadas na resolução dos problemas, verificamos que o período que apresenta menor número de noções aplicadas é o período 3.2, uma vez que não existem problemas em que se utilize a semelhança de figuras, a noção de função ou função trigonométrica nem as magnitudes físicas. A semelhança de figuras e as magnitudes físicas surgem a partir do período 3.3.2, a noção de função a partir do período 3.3.3 e as funções trigonométricas a partir do período 3.4. A partir do período 3.4 deixam de existir problemas em que se utilize a noção de produto. Em todos os períodos as noções mais utilizadas são o Teorema de Pitágoras e a fórmula do perímetro. Uma vez que a maioria dos problemas de cada um dos períodos são problemas relacionados com geometria, em todos os períodos surgem mais problemas em que se aplicam as noções geométricas.

Variáveis	Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Estratégia (E)	EH	22	12	5	0	1
	EE	17	9	11	9	5
	EM	0	28	43	55	66
	EN	61	51	41	36	28

Sobre a estratégia aplicada na resolução dos problemas, no primeiro período, uma vez que não existiam manuais anteriores com problemas de optimização, a maioria dos problemas surgiam pela primeira vez, dos restantes, alguns tinham sido já identificados nos livros históricos analisados e outros faziam parte dos enunciados dos exames. Nos períodos seguintes, a percentagem de problemas novos foi diminuindo e a percentagem de problemas que apareceram em manuais anteriores foi aumentando. Também a percentagem de problemas que tinham presentes nos livros históricos e que tinham saído em exame, foi diminuindo. A partir do período 3.3.3 vê-se que a percentagem de problemas que já tinha figurado nos manuais anteriores ultrapassa a percentagem dos problemas que aparecem pela primeira vez.

Variáveis	**Período**	**3.2**	**3.3.2**	**3.3.3**	**3.4**	**3.5**
Funções Utilizadas (f)	**fp**	56	56	45	60	61
	fr	28	19	32	18	13
	fir	17	26	23	13	11
	ft	0	0	0	9	14

As funções utilizadas, para cálculo dos extremos, são, em todos os períodos, na maioria dos problemas funções polinomiais, surgindo as funções racionais e as funções irracionais em percentagem mais reduzida. Com excepção do período 3.3.2, todos os outros possuem uma percentagem ligeiramente superior de funções racionais do que de funções irracionais. Só a partir do período 3.4 se identificam problemas em que se obtem uma função trigonométrica e o período 3.5 possui uma percentagem superior à do período anterior. O período em que as percentagens são mais equilibradas é o período 3.3.3 mas, de qualquer forma, há mais funções polinomiais.

Variáveis	**Período**	**3.2**	**3.3.2**	**3.3.3**	**3.4**	**3.5**
Esquema de cálculo (e)	**ez**	0	30	9	0	10
	ezs	100	67	68	100	50
	ezss	0	4	23	0	10
	ev	0	0	0	0	13
	ecg	0	0	0	0	17
	eo	0	0	0	0	3

Acerca do esquema utilizado para calcular os zeros observamos que nos quatro primeiros períodos o processo de resolução é muito semelhante, uma vez que em todos eles se utilizam os zeros da derivada: No período 3.2 e no período 3.4 em todos os problemas se determinam os zeros da derivada e se faz, de seguida, o estudo do sinal da função derivada. No período 3.3.2 na maioria dos problemas calculam-se os zeros da derivada e faz-se, de seguida, o estudo do sinal da função derivada, noutros problemas apenas se calculam os zeros da derivada e num número reduzido de problemas calcula-se os zeros da derivada e faz-se o teste do sinal da segunda derivada. No período 3.3.3, na maioria dos problemas calculam-se os zeros da derivada e faz-se, de seguida, o estudo do sinal da função derivada, noutros problemas determina-se os zeros da derivada e faz-se o teste do sinal da segunda derivada e, num número reduzido de problemas, apenas se calculam os zeros da derivada.

O período que tem uma maior diversidade de formas de resolução é o último período, marcado pela utilização da calculadora gráfica pelos alunos. Existem neste período alguns problemas que apresentam mais do que uma resolução. Deste modo, neste período, metade dos problemas mostram o cálculo dos zeros da derivada e o estudo do sinal da função derivada; noutros calcula-se os zeros da derivada e faz-se o teste do sinal da segunda derivada ou apenas se calculam os zeros da derivada. Relativamente aos problemas resolvidos sem recorrer à derivada, a forma de resolução que identificámos mais vezes é através da calculadora gráfica, outros problemas calculam o extremo através do vértice da parábola e apenas um problema apresenta a resolução, para além de gráfica, também geométrica e algébrica.

É ainda de referir que, apesar de no período 3.4 surgirem problemas de optimização no 10º ano, para resolver através do vértice da parábola, nenhum desses problemas vem acompanhado da resolução.

Variáveis	**Período**	**3.2**	**3.3.2**	**3.3.3**	**3.4**	**3.5**
Graf./fig./ esq. Aux. (g)	**Gn**	100	48	9	0	0
	Gf	0	41	50	0	3
	Gqm	0	11	50	100	50
	Gg	0	0	5	25	47

Acerca dos gráficos, figuras ou esquemas auxiliares presentes nas resoluções dos problemas, no período 3.2 as resoluções não têm qualquer tipo de gráfico, figura ou esquema auxiliar. No período seguinte o número de problemas sem qualquer tipo de auxiliar diminui e existem já muitos problemas acompanhados de figura. Alguns ainda apresentam o quadro de monotonia. No período 3.3.3 o número de problemas, sem qualquer tipo de auxiliar, é muito reduzido, mostrando um grande número de problemas figura ou quadro de monotonia, surgem neste período, pela primeira vez, alguns problemas com o gráfico da função a optimizar.

Nos dois últimos períodos todos os problemas apresentam algum tipo de auxiliar: no período 3.4 todas as resoluções apresentam quadro de monotonia e alguns problemas apresentam o gráfico da função e no período 3.5, metade dos problemas apresentam quadro de monotonia e bastantes problemas apresentam gráfico da função. Encontramos ainda neste período um número reduzido de resoluções com figura.

Variáveis / Período		3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Valor pedido (v)	ve	61	42	61	67	71
	vi	39	58	39	33	29

Por fim, em relação ao valor pedido, em todos os períodos, com excepção do período 3.3.2, a percentagem de problemas em que o valor pedido surge explicitamente é superior à percentagem de problemas em que aparece implicitamente. Verificamos ainda que, com excepção do período 3.3.2, a percentagem de problemas em que o valor pedido surge explicitamente, vai aumentando, enquanto que a percentagem de problemas em que o valor pedido surge implicitamente vai diminuindo.

4. CONCLUSÕES FINAIS

Esta investigação teve como ponto de partida levar a cabo um estudo acerca dos problemas de optimização. Inicialmente o objectivo era a elaboração de um estudo histórico acerca da evolução do seu tratamento no Ensino Secundário em Portugal. Após algumas pesquisas foi verificado que havia uma diferença no estudo dos problemas de optimização antes e depois de se começar a utilizar a calculadora gráfica na sala de aula. Por esta razão levanta-se uma outra questão bastante pertinente: Como se terá dado a evolução do estudo dos problemas de optimização a nível histórico?

Ora, como não existia nenhum estudo rigoroso nesta área, com a excepção da investigação elaborada por Astudillo (2002), que fez uma investigação histórica acerca dos pontos críticos, sem elaborar propriamente uma análise específica aos enunciados e resoluções dos problemas de optimização, iniciamos esta investigação identificando e analisando os livros históricos de Matemática e os manuais escolares espanhóis com o objectivo de verificar, essencialmente, as diferenças entre a resolução dos problemas de optimização, antes e depois de surgir o conceito de derivada.

Assim, depois duma análise efectuada a seis livros históricos (dois antes de surgir o conceito de derivada e quatro depois de surgir o conceito de derivada), verificámos que, apesar de encontrarmos algumas semelhanças nos enunciados, ou seja, no problema de optimização, a forma de resolução foi sendo muito simplificada ao longo dos tempos. Deixámos de ter demonstrações extremamente construtivas como descobrimos na obra de Euclides e de Pappus e passámos para resoluções mais simples e directas depois de surgir o conceito de derivada e deste ser aplicado ao cálculo de máximos e mínimos de uma função.

Posteriormente dirigimos a nossa atenção para a análise dos programas oficiais com o objectivo de identificar aqueles que referem a abordagem dos problemas de optimização. Concluímos então, que apesar de se referirem às aplicações das derivadas nos programas oficiais a partir de 1954, só depois da Lei de Bases do Sistema Educativo se propõe explicitamente, que se faça o estudo dos problemas de optimização. Notamos ainda que, ao longo do século, a importância dada às aplicações dos conceitos leccionados, principalmente ao conceito de derivada, foi aumentando, sendo cada vez mais específica em cada reforma.

Foi sobretudo, com a Lei de Bases do Sistema Educativo que os problemas de optimização deixaram de fazer parte apenas de um ano lectivo. E uma vez que o conceito de derivada passou a ser abordado no 11º e no 12º ano, também os problemas de optimização fizeram parte desses dois anos. Mais ainda, tendo em conta que no 10º ano se fez o estudo de funções, como é o caso da função quadrática, também neste ano se abordaram problemas de optimização. Assim, os problemas de optimização deixaram de estar limitados apenas a um ano lectivo e apenas como aplicação da derivada, passaram a estar incluídos em todos os anos do Ensino Secundário, antes e depois de se abordar a derivada.

Por fim, fomos analisar um conjunto de manuais escolares para cada uma das distintas reformas. Também nestes registámos evolução dos problemas de optimização, quer em relação ao tipo de problemas abordado, quer em relação à forma como estes são resolvidos. Uma das questões que consideramos mais interessantes é o facto de o primeiro problema de optimização, que encontramos resolvido nos manuais escolares, sem que se use o conceito de derivada (JAFB10.1 (1997)) fosse, precisamente, um problema presente na obra de Euclides, a primeira obra histórica onde identificámos os problemas de optimização, sem recorrer ao cálculo da derivada. Identificámos nos manuais escolares alguns dos problemas de optimização que tínhamos analisado nos livros históricos.

Apurámos ainda que, apesar de a Lei de Bases do Sistema Educativo ser a que traz mais alterações, relativamente aos problemas de optimização, tais alterações não são significativas nos manuais escolares analisados. Apesar de existirem já problemas de optimização nos manuais escolares do 10º ano, estes não apresentam qualquer tipo de resolução. Em contrapartida, o reajustamento de 1997 marca a diferença no tratamento dos problemas de optimização. Tanto a quantidade como a diversidade de problemas e resoluções é notória nos manuais desta última reforma analisada.

Pudemos então verificar que a introdução do uso da calculadora gráfica na sala de aula foi um ponto importante para a evolução no estudo e na abordagem feita aos problemas de optimização abordados no Ensino Secundário em Portugal.

4.1. REALIZAÇÃO DOS OBJECTIVOS DA INVESTIGAÇÃO

Relativamente aos objectivos a que se propôs esta investigação podemos considerar o seguinte:

> 1º Objectivo: Fazer uma análise histórica dos problemas de optimização: Ver como e quando surgiram na História da Matemática. Ver também quais os matemáticos que os abordaram;

O primeiro problema de optimização que registámos foi no séc. IV A.C, na obra *Elementos,* de Euclides. Nesta obra identificámos apenas problemas de Geometria Plana. A seguinte obra em que Identificámos problemas de optimização foi no séc. IV D.C., na obra *La colection Matematique,* de Pappus. Nesta encontrámos problemas de Geometria Plana e de Geometria Espacial.

> 2º Objectivo: Verificar quando e de que forma foram introduzidos nos programas oficiais portugueses os problemas de optimização;

Os problemas de optimização foram inseridos nos programas oficiais com a reforma de 1954, como uma aplicação da derivada; posteriormente, como problemas de máximos e mínimos e nas últimas reformas como problemas de optimização. Em todas as reformas estes surgiam depois da derivada, como uma aplicação em casos concretos. A partir da Lei de Bases do Sistema Educativo encontrámos problemas de optimização não como uma aplicação da derivada, mas sim como uma aplicação ao cálculo de máximos e mínimos de uma função, no 10º ano.

> 3º Objectivo: Analisar, em cada plano de estudos, a importância dada à disciplina de Matemática e, dentro desta, a importância dada ao estudo da Análise, mais especificamente ao estudo dos Problemas de Optimização.

Ao longo dos anos a disciplina de Matemática sofreu várias alterações, especialmente no número de horas semanais atribuídas à mesma disciplina. Em relação ao estudo da Análise Infinitesimal averiguámos que lhe foi dada uma crescente importância sendo considerada a partir de 1918 uma área autónoma. Também as aplicações da matemática, em particular os problemas de optimização, foram conquistando em cada reforma um peso e um maior destaque.

> 4º Objectivo: Analisar como foram abordados: os tipos de problemas propostos pelo Ministério e os tipos de problemas abordados pelos manuais escolares;

Foi possível identificar algumas indicações nos programas oficiais relativas aos problemas de optimização no sentido de orientar, quer os professores, quer os autores dos manuais escolares no que se pretendia que fosse abordado.

> 5º Objectivo: Verificar se os manuais, acerca dos problemas de optimização, vão de encontro às propostas do Ministério;

Verificámos que nos primeiros programas oficiais analisados, apesar de se fazer referência às aplicações da derivada, apenas, posteriormente, surgiram os problemas de optimização como aplicação da derivada. Nos programas posteriores verificámos que, cada manual, de forma distinta, abordava os problemas de optimização.

> 6º Objectivo: Observar qual a alteração sofrida pelos programas, em relação aos problemas de optimização, após a introdução das calculadoras gráficas no Ensino Secundário;

É visível que, apesar dos problemas de optimização tomarem um papel mais importante a partir da Lei de Bases do Sistema Educativo, essa importância só foi notória nos manuais escolares depois de ser introduzida a calculadora gráfica nos programas oficiais.

7º Objectivo: Contribuir para um melhor conhecimento da História da Análise Matemática em Portugal;

Esta tese de doutoramento, uma vez que julgamos pioneira na análise histórica dos problemas de optimização, trouxe novas informações ao conhecimento da História da Matemática e da História da Didáctica da Matemática em Portugal. Até agora não conhecemos nenhuma investigação acerca dos problemas de optimização nos manuais escolares portugueses e dada a crescente importância referente às questões ligadas às aplicações dos conceitos matemáticos, penso que esta tese de doutoramento poderá ter um papel importante.

4.2. HIPÓTESES DE INVESTIGAÇÃO. RESULTADOS

As hipóteses desta investigação eram:

4. Será que os problemas de optimização surgiram antes de surgir o conceito de derivada?

Relativamente a esta hipótese observamos que sim. De facto, os problemas de optimização surgiram muito antes de surgir o conceito de derivada. Os primeiros problemas de optimização foram identificados na obra *Elementos,* de Euclides, datada do séc. IV a.C.

5. Será que as várias fases por que passou o conceito de derivada influenciaram a forma de resolução dos problemas de optimização?

Também verificámos que à medida que os tempos foram passando, a forma de resolução dos problemas de optimização se tornou mais simples. Antes de se utilizarem as derivadas para determinar a solução óptima, a resolução dos problemas era muito extensa e complexa, e depois de se começar a aplicar as derivadas, essa resolução foi-se tornando cada vez mais simples.

6. Será que em alturas distintas eram abordados distintos tipos de problemas de optimização?

Apurámos, de facto que em cada época, os problemas que surgiam eram distintos. Inicialmente os problemas abordados eram mais abstractos, mas com o passar dos tempos foram aumentando os problemas aplicados à vida real, à Física ou à Economia.

4.3. LIMITAÇÕES DO TRABALHO

Como em grande parte dos trabalhos científicos, também nesta dissertação não conseguimos abarcar tudo o que inicialmente tínhamos ambicionado.

Tendo em conta a grande quantidade de livros históricos que abordam os problemas de optimização, não foi possível fazer a análise de todos. Fizemos então uma selecção e apenas analisámos os que nos pareceram mais representativos da época em que se enquadravam.

Também em relação aos manuais escolares sentimos essa dificuldade. Apesar das primeiras reformas terem um número reduzido de manuais escolares, dado que vigorava o regime do Livro Único, quando terminou este regime o número de manuais escolares publicados, para cada uma das reformas, foi aumentando significativamente. Assim, para os últimos períodos, sentimos necessidade de fazer uma selecção de manuais para analisar em cada um dos períodos. Essa escolha foi feita tendo em conta os manuais mais utilizados ou os que apresentavam problemas, do nosso ponto de vista, mais interessantes para serem analisados.

4.4. IMPLICAÇÕES PARA FUTURAS INVESTIGAÇÕES

A realização deste trabalho de investigação acerca da evolução histórica dos problemas de optimização e do seu tratamento no Ensino Secundário português, nos séculos XX e XXI, deixa em aberto algumas questões importantes para realização de novas investigações. Apesar de terminarmos a investigação, e sem menosprezar o muito que foi feito, e que demos muito de nós ao longo destes anos, concluímos que muito mais poderia ser feito. Por isso, não queremos terminar sem referir algumas questões que consideramos da maior importância e que bem mereciam um condigno tratamento:

- Utilizar o modelo construído, quer para analisar os problemas de optimização nos manuais escolares, quer para analisar outro tipo de problemas;
- Desenvolver investigações semelhantes à nossa própria investigação para outro tipo de questões Matemáticas;
- Elaborar um estudo histórico acerca da forma como os professores, nas distintas reformas, faziam o estudo dos problemas de optimização;
- Analisar a última reforma do sistema educativo para a Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais, relativamente ao facto de abordarem ou não os problemas de optimização e, no caso de serem abordados, identificar o tipo de problemas que são abordados para cada uma das disciplinas;
- Comparar os resultados obtidos nesta investigação para os problemas de optimização dos manuais escolares portugueses com os problemas de optimização dos manuais escolares de outros países.

BIBLIOGRAFIA

AIRES, A. P. (2006) *O conceito de derivada no ensino secundário em Portugal ao longo do século XX: Uma abordagem histórica através dos planos curriculares e manuais escolares.* Salamanca (Tese de doutoramento apresentada na Universidade de Salamanca).

BERNARDES, A. e outros (1994) Reflexão sobre a aplicação dos Novos Programas do. 10º Ano. Em *Encontro de professores Profmat*.

BEZOUT, Etienne (1764) *Cours de mathématique*. Avignon: Imp. H. Offray.

BISQUERA, R. (1989) *Métodos de investigación educativa*. Madrid: CEAC.

BOYER, C. B. (1959) *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover Publications, inc.

BOYER, C. B. (1993) *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda.

CAMACHO MACHIN, M e GONZÁLEZ MARTIN, A. S. (1998) Una aproximación a los Problemas de Optimización en libros de bachillerato y su resolución con la TI-92. *Revista de Enseñanza e Investigación Educativa AULA,* Vol. 10, p. 137-152.

CARVALHO, R. (2001) *História do Ensino em Portugal*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

CASTAÑEDA ALONSO, A. (2002) Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. Em *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa*. Março. México.

CASTAÑEDA ALONSO, A. (2006) Formación de un discurso escolar: El caso del máximo de una función en la obra de L´Hospital y Maria G. Agnesi. Em *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa*. Julho. México.

CASTRO, R. V. (Coord) (1993) *Conteúdos e contextos da Reforma Curricular no* 11º *ano de escolaridade -concepções e práticas de professores experimentadores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

CASTRO, R. V. (coord) (1999) *Manuais Escolares: Estatuto, Funções e História*. Braga: Centro de Estudos em Educação e Psicologia do Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.

DES (!997) Matemática – Programas 10º, 11º *e* 12º *anos.* Lisboa: Ministério da Educação.

DGBES (1991) *Programas de Matemática* e *Métodos Quantitativos. Organização Curricular e Programas. Ensino Secundário*. Lisboa: DGEBS, Ministério da Educação.

EDWARDS, C. H. Jr. (1979) *The Historical Development of Calculus*. New York: Springer-Verlag.

EECKE, Paul Ver (Trad) (1933) *La collection mathématique / Pappus d'Alexandrie*. Paris: Desclée de Brouwer.

FERNANDEZ, C. S. e CASTRO, C. V. (2004) *De los Bernoulli a los Bourbaki: una historia del arte y la ciencia del cálculo*. Tres Cantos: NIVOLA libros y ediciones, S. L.

GONÇALVES, V. (1992) Graves problemas na "experiência" dos novos programas de Matemática para o Ensino Secundário. Em *Boletim da SPM*, nº 24.

GONÇALVES, V. (1993) *A experimentação dos novos programas de Matemática: reflexões e algumas propostas concretas.* Em *Boletim da SPM*, nº 25.

GONZÁLEZ ASTUDILLO, M. T. (2002) *Sistemas Simbólicos de Representación en la Enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva Histórica.* Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

GRAÇA, M. M. e MÁXIMO, M. O. (1991) Novos programas, que generalização para 92/93. Em *Educação e Matemática*, nº 19/20.

HEATH, Thomas L. (Trad) (1956) *The thirteen books of Euclid's Elements*. New York: Dover.

KAPUT, J. (1992) Technology and Mathematics Education. Em Grows, Douglas A. (Ed) *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* p. 515-555. New York: MacMillan.

KINDT, M. (1995) Problemas antiguos y la calculadora gráfica. Em *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO*, nº4, p. 41 – 52.

L'HÔPITAL, G. F. A. (1988) *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris: ACL – editions**.**

LITHNER, J. (2004) Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. Em J*ournal of Mathematical Behavior* nº 23.

LOBATO, G. (1991) Novos Programas de Matemática no Ensino Básico e Secundário. Em *Educação e Matemática*.

LUNDGREN, U. P. (Coord) (1981) *Relatório final do Projecto de Avaliação do Ensino Secundário Unificado*. Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e das Universidades.

MALAASPINA, U. (2007) Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. Em *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Novembro. México.

MESA, V (2004) Characterizing practices associated with functions in Middle School textbooks: An empirical approach. Em *Educational Studies in Mathematics*, nº56. Nederlands: Kluwer Academic Publishers.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (1986) *Lei de Bases do Sistema Educativo,* DR45/86, de 14 de Outubro. Lisboa: Assembleia da República.

POLYA, G. (1975) How to solve it: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press.

PONTE, J. P. (1987) A Matemática não é só cálculo e mal vão as reformas curriculares que a vêem como simples disciplina de serviço. Em *Educação e Matemática* nº4.

PONTE, J. P. (1992) Os programas de Matemática no Ensino Secundário. Em *Encontro de Professores Profmat*.

PROENÇA, M. C. (1998) *O Sistema de Ensino em Portugal (Séculos XIX-XX)*. Lisboa: Edições Colibri.

RICO, L. e Sierra, M. (1994) Educación matemática en la España del siglo XX. Em J. Kilpatrick, L. Rico e M. Sierra, *Educación matemática e investigación*. Síntesis: Madrid, p. 99-202.

RUIZ BERRIO, J. (1997) El método histórico en la investigación histórico-educativa. Em N. De Gabriel e A. Viñao (eds) *La investigación histórico-educativa*. Barcelona: Ronsel.

RUTHVEN, K. (1996) Calculators in the Mathematics Curriculum: the Scope of Personal Computation Technology. Em BISHOP, A. J. e outros, *International Handbook of Mathematics Education,* p. 435-468. Alemanha: Kluwer Academic Publishers.

SCHUBRING, G. (1987) On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Autor. *For the learning of mathematics* 7, 3 p. 41-51.

SCHUBRING, G. (1989) *Categorías para la investigación en la historia social de la enseñanza de la matemática y algunos modelos característicos*. Traduzido por A. Orellana e L. Rico

SERRET, J. A. (1879) *Cours de Calcul Différentiel et Intégral*. Paris : Gauthier Villars.

SIERRA, M (Coord.) (1997) *Los conceptos de límite y continuidad en educación secundaria: transposición didáctica y concepciones de los alumnos*. Salamanca: Dpto Didáctica da Matemática y CE (Memoria Inédita).

SIERRA, M (Coord.) (2003) *Evolución de la enseñanza del Análisis Matemático y del Álgebra: de los libros de texto a las nuevas tecnologías*. Salamanca: Dpto Didáctica da Matemática y CE (Memoria Inédita).

SILVA, J. C. (!991) Sobre a Proposta de Novas Programas de Matemática para o. Ensino Secundário. Em *Revista Educação e Matemática*, nº 19/20.

SILVA, J. C. (1992) Reforma Educativa: cresce a insatisfação dos professores. Em *Boletim da SPM*, nº 22.

STRUIK, D. (1989) *História concisa das Matemáticas.* Lisboa: Gradiva.

STURM, J. C. F. (1884) *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. Paris: Gauthier Villars.

TIKHOMIROV, V. M. (1986) *Stories About Maxima and Minima*. Rhode Island: American Mathematical Society.

TRULLS, O. S. (Coord) (1991) *A Experimentação dos Novos Programas para o 10º Ano de Escolaridade*. Braga: Centro ode Estudos Educacionais e Desenvolvimento Comunitário do Instituto de Educação da Universidade do Minho.

VALENTE, M. O. (Coord) (1989) *Manuais Escolares: Análise de Situação*. Lisboa: GEP e o Dpto de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Variáveis	Problemas	PF1	PF2	PF3	PF4	PF5	PF6	PF7	PF8	PF9	SP1	SP2	SP3	SP4	SP5	SP6	SP7	SP8	SP9	Total	Soma	Percentagem
Tipo Problema (T)	TEP										X	X								2	18	11
	TER	X																		1		6
	TEX		X	X	X	X	X	X	X				X	X	X	X	X	X	X	14		78
	TDM									X										1		6
	TR																			0		0
Contexto do Problema (C)	CGM	X			X	X	X	X	X	X	X		X			X				10	18	56
	CGA																			0		0
	CAR		X	X										X	X					4		22
	CRM											X					X	X	X	4		22
	CRF																			0		0
	CRE																			0		0
Função a optimizar (O)	OD																			0	18	0
	OA	X				X	X	X		X	X	X	X			X	X		X	11		61
	OPE				X															1		6
	OV								X									X		2		11
	OPR			X										X						2		11
	OS		X												X					2		11
	OT																			0		0
	OC																			0		0
Esq./ Fig. auxiliares (F)	FSE	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	18	18	100
	FFS																			0		0
	FFD																			0		0
Tipo de dados (D)	DN	X	X	X	X	X	X	X	X		X		X					X		11	18	61
	DG									X		X		X	X	X	X		X	7		39
Tipo de en. (EN)	ENS	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X				X	14	18	78
	ENE												X			X	X	X		4		22
Func./ Eq. auxiliar (A)	AE		X	X	X		X	X		X		X	X	X	X		X		X	12	18	67
	AI	X				X			X		X					X		X		6		33
Noções aplicadas (N)	NTP					X			X		X					X				4	18	22
	ND																	X		1		6
	NSF																			0		0
	NPE	X					X			X			X							4		22
	NAR				X															1		6
	NVO							X				X					X		X	4		22
	NSO		X	X										X						3		17
	NPR														X					1		6
	NF																			0		0
	NFT																			0		0
	NMF																			0		0
Estratégia (E)	EH	X						X					X	X						4	18	22
	EE					X				X	X									3		17
	EM																			0		0
	EN		X	X	X		X		X			X			X	X	X	X	X	11		61
Funções Utilizadas (f)	fp	X	X	X			X		X	X			X	X	X			X		10	18	56
	fr				X			X				X					X		X	5		28
	fir					X					X					X				3		17
	ft																			0		0
Esquema de cálculo (e)	ez																			0	3	0
	ezs	X									X	X								3		100
	ezss																			0		0
	ev																			0		0
	ecg																			0		0
	eo																			0		0
Graf./fig./ esq. Aux. (g)	gn	X									X	X								3	3	100
	gf																			0		0
	gqm																			0		0
	gg																			0		0
Valor pedido (v)	ve		X	X		X				X	X	X	X			X	X	X	X	11	18	61
	vi	X			X		X	X	X					X	X					7		39